Distribution de charges et de courants

I Distributions de charges électriques

I.1 La charge, grandeur invariante et conservée

■ **La charge électrique (notée q, mesurée dans le système international d'unité en *coulomb*, symbole C), est une grandeur caractéristique de chaque particule élémentaire constituant la matière.**

■ **La charge est *invariante* (indépendante du référentiel d'étude).**

■ **La charge est *conservée* (pour chaque particule, elle reste constante au cours du temps et, si la particule est détruite ou modifiée, la charge totale après transformation est la même que celle de la particule initiale).**

■ **Les charges électriques des particules sont toutes des multiples entiers d'un tiers de la *charge élémentaire* notée e :**

$$\boxed{q_{min} = \frac{1}{3}e \textbf{ avec } e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}}$$

Les charges effectivement fractionnaires en e sont celles des quarks (comme u (up) et d (down), avec $q_u = \frac{2}{3}e$ et $q_d = -\frac{1}{3}e$) qui sont, dans les états stables, regroupés de sorte que la charge des particules ordinaires de matière soit un multiple entier de e. On connaît en particulier les particules du tableau ci-après :

Particule	charge	masse
Particules matérielles (fermions) stables		
électron	$q_e = -e$	$m_e = 9,919 \times 10^{-31}$ kg
positron	$q = +e$	$m = m_e$
proton uud	$q_p = +e$	$m_p = 1,673 \times 10^{-27}$ kg
antiproton $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	$q_{\bar{p}} = -e$	$m_{\bar{p}} = m_p$
neutron udd	$q_n = 0$	$m_n = 1,675 \times 10^{-27}$ kg
antineutron $\bar{u}\bar{d}\bar{d}$	$q_{\bar{n}} = 0$	$m_{\bar{n}} = m_n$
Particule d'interaction (boson) stable		
photon	$q_\gamma = 0$	$m_\gamma = 0$

Á l'échelle macroscopique, on définit aussi la charge d'une mole de charges élémentaires, ou *faraday*[1] :

$$\mathcal{F} = \mathcal{N}_A \cdot e \approx 96485 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1} = 9,65 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Toutefois, une telle charge ne se rencontre que très rarement du fait de la difficulté de séparer les charges positives (protons) et négatives (électrons) de la matière ordinaire, qui exercent l'une sur l'autre des efforts attractifs très intenses. Ainsi la charge la plus élevée sur une armature d'un condensateur industriel ($C \approx 1$ F) chargé sous une tension d'une centaine de vols atteint seulement $Q = CU \approx 100$ C.

I.2 Distribution discrète de charges

La modélisation la plus simple de la répartition des charges dans un échantillon macroscopique est la modélisation discrète (ou dénombrable) : les N charges q_i sont réparties à chaque instant aux points P_i de l'espace, avec une charge totale $q_{tot} = \sum_{i=1}^{i=N} q_i$.

1. On rappelle que la constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,022 \times 10^{23}$ mol^{-1} est le nombre d'espèces contenues dans une mole de matière.

I.3 Distribution volumique de charges

I.3.a Approximation des milieux continus : notion d'échelle mésoscopique

■ Trois échelles spatiales

La définition de la *densité particulaire* notée $n(M)$ d'une espèce en un point M de l'espace :

$$n(M) \triangleq \frac{dN(M)}{d\tau} \qquad (\text{unité : m}^{-3})$$

où $dN(M)$ représente le nombre de représentants de l'espèces contenus dans le volume $d\tau(M)$ centré sur M, n'a de sens que si elle est indépendante, dans un certaine mesure, de la taille $d\tau(M)$. Illustrons cela.

Les points noirs sur la figure 3 représentent des molécules dont les plus proches sont en moyenne à une distance notée ℓ. Si $d\tau(M)$ désigne le volume d'une sphère centrée sur M (cf. figure 3), on réalise le rapport suivant $\dfrac{\text{nombre de molécules dans } d\tau}{d\tau}$ et on porte le résultat sur le graphe de la figure 2. Si le rayon de la sphère est plus faible que ℓ, le rapport précédent dépend fortement du choix de la sphère (c'est le cas pour les sphères en pointillés de la figure 3 : lorsqu'on passe de la sphère de plus faible rayon à la suivante, le rayon est doublé donc le volume multiplié par huit alors que le nombre de molécule dans les sphères reste égal à un). Au contraire, lorsque le rayon est suffisamment grand, le rapport demeure constant, affranchi des fluctuations du nombre de molécules.

L'analyse du graphe de la figure 2 nous amène à distinguer *trois échelles spatiales caractéristiques* :

— **L'échelle microscopique**
Lorsque $d\tau \ll V_m \sim (10\text{ nm})^3$, les fluctuations du nombre de particules à l'intérieur du volume V ne permettent pas de définir de manière unique une densité particulaire $n(M)$ au point M.

— **L'échelle macroscopique**
Lorsque $d\tau \gg V_M \sim (1\text{ mm})^3$, la taille de la sphère est trop importante pour qu'il soit légitime de parler d'une grandeur locale (c'est-à-dire «en un point M») et des fluctuations dues cette fois-ci à l'inhomogénéité du milieu peuvent apparaître.

— **L'échelle mésoscopique**
$(V_m \ll d\tau \ll V_M)$ est une échelle intermédiaire qui permet de définir par exemple la *densité particulaire* M ou toute autre grandeur de la forme $\dfrac{d...}{d\tau}$.

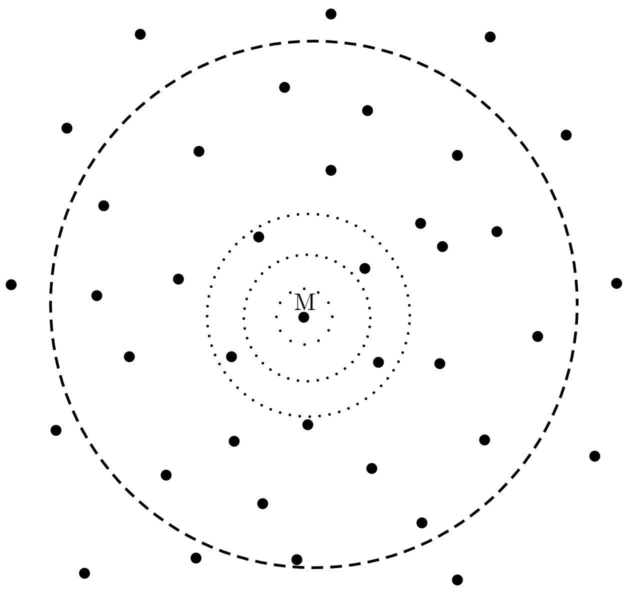


Figure 1: Les points noirs représentent des molécules

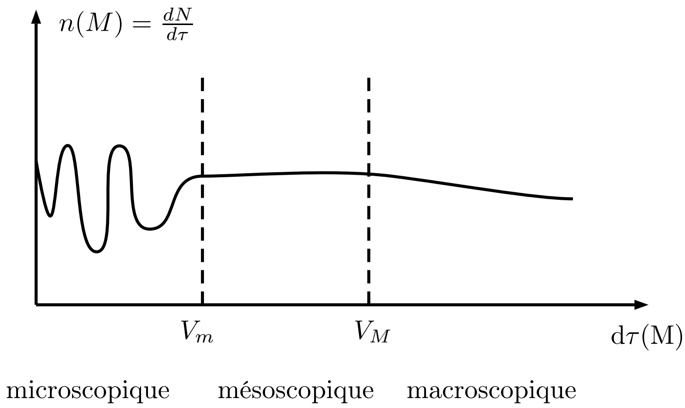


Figure 2: Mise en évidence de trois échelles spatiales

■ **Approximation des milieux continus**

S'il existe une échelle intermédiaire dite **mésoscopique** qui permette de définir la densité particulaire $n(M,t)$ *comme toute autre grandeur* de la forme $\dfrac{d...}{d\tau}$, on dit que **l'approximation des milieux continus** est réalisée. On se placera dans le cadre de cette approximation dans la suite du cours.

On considèrera, dans la suite, N types de charges (électrons, ions positifs ou négatifs, etc.) et on notera pour l'espèce n°k ($\in [\![1;N]\!]$) dans le cadre d'une modélisation volumique :

- $n_k(M,t)$: la densité particulaire volumique au point M à la date t (c'est le nombre de représentants par unité de volume) de l'espèce k [unité : $\mathrm{m^{-3}}$] ;
- q_k : la charge de l'espèce n°k [unité : C] ;
- $\vec{v}_k(M,t)$: la moyenne statistique des vitesses des charges de l'espèce n°k situées dans un volume $d\tau(M)$ à la date t [unité : $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$].

Pour aider à la compréhension du cours, nous faisons le choix d'utiliser l'indice i *quand on somme sur toutes les charges* et l'indice k *quand on somme sur les espèces.*

Á titre d'illustration, supposons que l'on dispose de 3 espèces comme représenté sur la figure 3 : 7 représentants des ions Na^+, 6 représentants des ions H_3O^+ et 5 représentants des ions HO^-.

Il ne faudra pas confondre :

$$\sum_{\text{charges i } \in d\tau} q_i = +8e \quad \text{noté} \quad \sum_i q_i = +8e$$

$$\sum_{\text{espèces k }=1 \ \in d\tau}^{k=1} q_k = +7e \quad \text{noté} \quad \sum_{k=1}^{k=1} q_k = +7e$$

$$\sum_{\text{espèces k }=1 \ \in d\tau}^{k=2} q_k = +13e \quad \text{noté} \quad \sum_{k=1}^{k=2} q_k = +13e$$

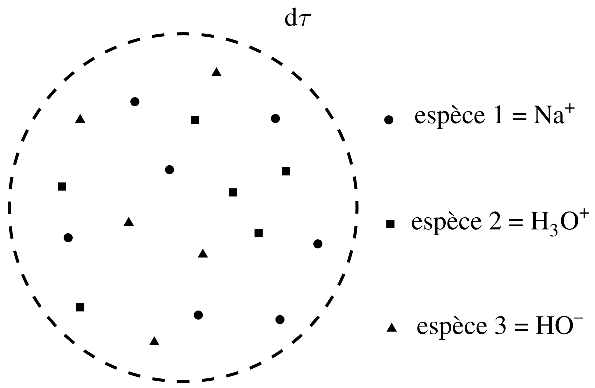


Figure 3

I.3.b L'élément de charges à associé à un volume $d\tau$

On définit *l'élément de charges* $dq(M,t)$ associé au volume dτ(M) par :

$$\boxed{dq(M,t) \triangleq \sum_{\textbf{charges } i\in d\tau(M)} q_i}$$

C'est la charge totale contenue dans le volume mésoscopique dτ(M) centré sur un point M.

I.3.c Densité volumique de charges

- **La densité volumique de charges en un point M à la date t est définie par :**

$$\boxed{\rho(M,t) \triangleq \frac{dq(M,t)}{d\tau}} \qquad \textbf{(unité : } \mathrm{C\cdot m^{-3}}\textbf{)}$$

où $dq(M,t)$ est l'élément de charges associé au volume $d\tau$ centré sur M.

- **La charge $Q(t)$ contenue dans un volume $(\mathcal{V})$ est :** $\boxed{Q(t) = \iiint_{M\in(\mathcal{V})} \rho(M,t)d\tau}$

- **On a la relation :** $\boxed{\rho(M,t) = \sum_{\textbf{espèce } k=1}^{k=N} \underbrace{q_k n_k(M,t)}_{\triangleq \rho_k(M,t)}}$

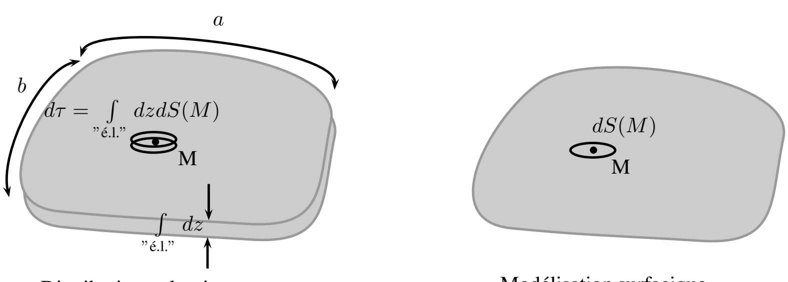
Preuve :

I.4 Distribution surfacique de charges

- **Lorsque les charges sont localisées dans un volume d'épaisseur faible par rapport aux dimensions latérales (notées a et b sur la figure 4), on peut adopter une *modélisation surfacique.***

- **L'élément de charges peut alors s'écrire $dq(M,t) = dS(M)\underbrace{\int_{\text{"é.l."}} \rho(M,t)dz}_{\triangleq \sigma(M,t)}$ où l'axe z désigne la normale locale. La densité surfacique de charges $\sigma(M,t)$ en M à la date t est définie par la relation :**

$$\boxed{\sigma(M,t) \triangleq \frac{dq}{dS}(M,t)} \qquad \textbf{(unité : } \mathrm{C.m^{-2}}\textbf{)}$$



Distribution volumique | Modélisation surfacique

Figure 4: Modélisation surfacique ; "é.l." est l'abréviation de «épaisseur locale»

I.5 Distribution linéique de charges

- Lorsque les charges sont localisées dans un volume en forme de tube de diamètre faible par rapport à sa longueur (voir figure 5), on peut adopter une *modélisation linéique*.

- L'élément de chargess peut alors s'écrire $dq(M,t) = \lambda(M,t)d\ell(M)$ ce qui revient à définir la densité linéique de charges $\lambda(M,t)$ en M à la date t par la relation :

$$\boxed{\lambda(M,t) \triangleq \frac{dq}{d\ell}(M,t)} \qquad \text{(unité : C.m}^{-1}\text{)}$$

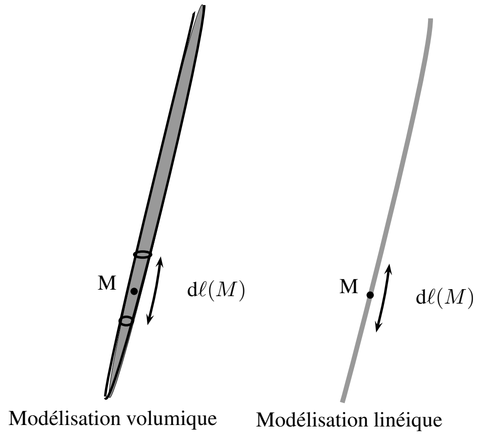


Figure 5: Modélisation linéique

II Distributions de courant électrique

II.1 L'élément de courant associé à un volume dτ

On définit *l'élément de courant* $d\vec{C}(M,t)$ associé au volume dτ(M) par :

$$\boxed{d\vec{C}(M,t) \triangleq \sum_{\textbf{charges } i \in d\tau(M)} q_i \vec{v}_i}$$

II.2 Densité volumique de courant

II.2.a Définition

- **La *densité volumique de courant* $\overrightarrow{j}(M,t)$ en un point M à la date t est définie par :**

$$\boxed{d\overrightarrow{C}(M,t) \triangleq \overrightarrow{j}(M,t)d\tau(M)}$$

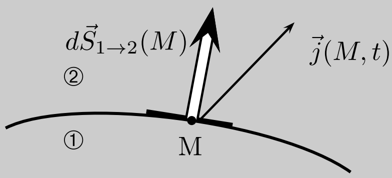
- **En regroupant par espèces, cela revient à définir l*a densité volumique de courant* $\overrightarrow{j}(M,t)$ en un point M à la date t par :**

$$\boxed{\overrightarrow{j}(M,t) \triangleq \sum_{\textbf{espèces } k=1}^{k=N} \underbrace{n_k(M,t)q_k}_{\rho_k(M,t)} \overrightarrow{v}_k(M,t)} \qquad \textbf{(unité : } \mathrm{A \cdot m^{-2}}\text{)}$$

II.2.b Propriétés

- On démontre alors que la charge algébrique $\delta q_{1\to2}(M,t)$ traversant pendant l'intervalle de temps $[t, t+dt[$ l'élément de surface $d\overrightarrow{S}_{1\to2}(M) = dS(M).\overrightarrow{n}_{1\to2}$ centré sur M et dirigé de ① vers ② s'écrit :

$$\boxed{\delta q_{1\to2}(M,t) = \vec{j}(M,t)\cdot d\vec{S}_{1\to2}(M)\ \ dt}$$



- Il s'en suit que le courant $I_{\Sigma,1\to2}(t)$ qui traverse la surface Σ à l'instant t dans le sens ① vers ② est :

$$\boxed{I_{\Sigma,1\to2}(t) = \iint_{M\in\Sigma} \vec{j}(M,t)\cdot d\vec{S}_{1\to2}(M)}$$

Cette dernière relation rappelle bien que l'unité de $\vec{j}(M,t)$ est $\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ (alors que $\vec{j}(M,t)$ se nomme vecteur densité **volumique** de courant).

II.3 Densité surfacique de courant

II.3.a Définition

- Sous les mêmes conditions qu'au paragraphe I.4, on peut être amené à définir un *vecteur densité surfacique de courant* $\overrightarrow{j}_s(M,t)$ tel que :

$$\boxed{d\overrightarrow{C}(M,t) = dS(M) \int_{\text{"é.l."}} \overrightarrow{j}(M,t)dz = \overrightarrow{j}_s(M,t)dS(M)}$$

où z désigne la normale locale à la nappe et «é.l.» signifie «épaisseur locale».

- Le vecteur densité de courant surfacique $\overrightarrow{j}_s(M,t)$ s'exprime en $\mathrm{A \cdot m^{-1}}$.

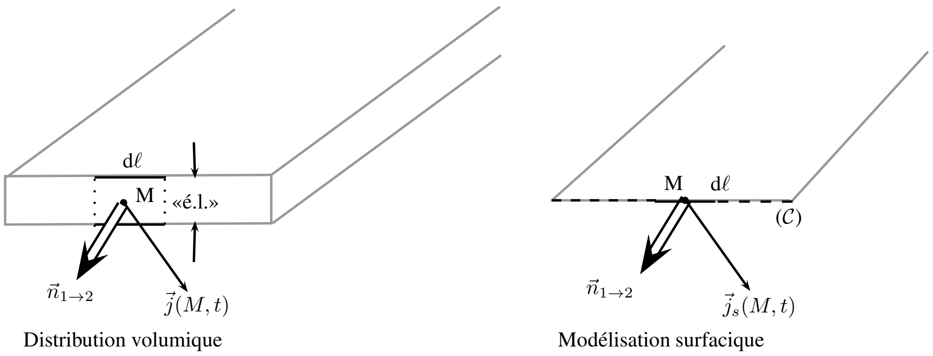


Figure 6: Modélisation surfacique

II.3.b Propriétés

- On adopte une modélisation surfacique (voir figure 6 à droite). Le vecteur $\vec{n}_{1\to2}$ est le vecteur normal à la portion de longueur $d\ell$ de la courbe $(\mathcal{C})$ et dirigé de ① vers ②.

La charge algébrique $\delta q_{1\to2}(M,t)$ traversant (de ① vers ②) pendant l'intervalle de temps $[t, t+dt[$ l'élément de longueur $d\ell$ centré sur M est :

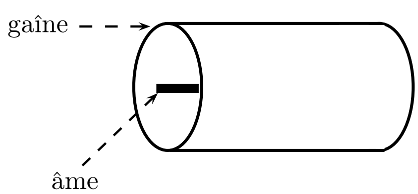
$$\boxed{\delta q_{1\to2}(M,t) = \overrightarrow{j_s}(M,t).\underbrace{d\ell\,\overrightarrow{n}_{1\to2}}_{\neq d\overrightarrow{\ell}}\,dt}$$

- Le courant $I_{\mathcal{C},1\to2}(t)$ traversant la courbe $\mathcal{C}$ à l'instant t de ① vers ② est :

$$\boxed{I_{\mathcal{C},1\to2}(t) = \int_{M\in\mathcal{C}} \overrightarrow{j_s}(M,t).\overrightarrow{n}_{1\to2}d\ell}$$

Remarque : Beaucoup d'élèves confondent $\vec{n}_{1\to2}d\ell$ avec $d\vec{\ell} \triangleq d\vec{M}$. C'est une fâcheuse erreur...et bien évitable en faisant un petit dessin pour se rappeler de la géométrie du problème.

Exemple : La tresse située dans la gaine d'un câble coaxial (cylindre d'axe Oz, de rayon a) est parcourue par des courants surfaciques de densité uniforme $\vec{j}_s = j_0\vec{u}_z$ engendrant un courant I. Exprimer le lien entre j_0, I et a.



III Équation locale de conservation de la charge

III.1 Cas d'un système unidimensionnel cartésien

• On se place dans le cadre d'un modèle *unidimensionnel* en géométrie *cartésienne* : c'est à dire que le seul paramètre d'espace intervenant dans les grandeurs sera noté x :

$$\rho(M,t) = \rho(x,t) \qquad et \qquad \vec{j}(M,t) = j_x(x,t)\vec{e}_x$$

• Dans le cadre de ces hypothèses, l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$$

traduit le caractère conservatif de la charge. [a]

a. On a postulé au paragraphe I.1 que la charge était «conservée». On dit aussi qu'il s'agit d'une grandeur *conservative*.

III.2 Cas général

***L'équation locale de conservation de la charge* traduit mathématiquement le caractère conservatif de la charge.** [a] **:**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t) + div(\vec{j}(M,t)) = 0}$$

a. On a postulé au paragraphe I.1 que la charge était «conservée». On dit aussi qu'il s'agit d'une grandeur *conservative.*

III.3 Cas particulier du régime stationnaire

III.3.a Le vecteur densité de courant est à flux conservatif

En régime statique, le vecteur densité de courant est à flux conservatif :

$$\boxed{div\left(\overrightarrow{j}(M)\right) = 0}$$

Preuve :

III.3.b Intensité du courant traversant un contour orienté - loi des nœuds

- ❑ **On peut parler de *l'intensité I du courant traversant un contour orienté.***
- ❑ **On peut parler de *l'intensité I d'un tube de courant orienté.***
- ❑ **On peut démontrer la loi des nœuds.**