Français des Sciences - Physique 5
Le Champ Électrostatique

École Centrale Pékin

2018-2019 - Année 3

Table des matières

1 Distributions de charges électriques

1.1 La charge électrique

■ La charge électrique (notée q, mesurée dans le système international d'unité en *coulomb*, symbole C), est une grandeur caractéristique de chaque particule élémentaire constituant la matière.

■ La charge est **invariante** (indépendante du référentiel d'étude).

■ La charge est **conservée** (on ne peut la créer, ni la détruire).

■ Les charges électriques des particules stables sont toutes des multiples entiers de la *charge élémentaire* notée e :

$$e = 1,602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

On retiendra en particulier les charges des 3 particules ci dessous :

Particule	charge	masse
électron	$q_e = -e$	$m_e = 9,919 \times 10^{-31}$ kg
proton	$q_p = +e$	$m_p = 1,673 \times 10^{-27}$ kg
neutron	$q_n = 0$	$m_n = 1,675 \times 10^{-27}$ kg

1.2 Distribution discrète de charges

Si l'on regarde de très près un objet, il est constitué principalement de vide, de protons, neutrons et électrons. Comment décrire la charge qu'il possède ?

La modélisation la plus simple des charges dans un objet (macroscopique) est la modélisation discrète (ou dénombrable) : les N charges q_i sont réparties à chaque instant aux points P_i de l'espace. La charge totale de l'objet est $q_{tot} = \sum_{i=1}^{i=N} q_i$.

Considérons la fonction f qui a un point M de l'espace associe la charge en ce point.

La répartitions de charges n'est pas continue dans l'espace.

Or en physique, on aime bien travailler avec des grandeurs continues (pour faire des calculs de dérivées principalement).

1.3 Distribution volumique de charges

1.3.1 L'élément de charges à associé à un volume $d\tau$

On définit *l'élément de charges* $dq(M,t)$ associé au volume dτ(M) par :

$$\boxed{dq(M,t) \triangleq \sum_{\text{particules } i \in d\tau(M)} q_i}$$

C'est la charge totale contenue dans le volume dτ(M) centré sur un point M.

1.3.2 Densité volumique de charges

- La densité volumique de charges en un point M à la date t est définie par :

$$\boxed{\rho(M,t) = \frac{dq(M,t)}{d\tau}} \quad \text{(unité : C} \cdot \text{m}^{-3}\text{)}$$

où $dq(M,t)$ est l'élément de charges associé au volume $d\tau$ centré sur M.

- Si $d\tau(M)$ est trop petit (échelle microscopique), la fonction ρ n'est pas continue.

- Si $d\tau(M)$ est trop grand (échelle macroscopique), on ne peut plus parler de la densité de charges **en un point**.

Il existe une échelle intermédiaire (échelle mésoscopique) où $d\tau(M)$ est suffisamment grand pour que la densité de charges soit continue, et suffisamment petit pour que l'on puisse considérer à notre échelle que $d\tau(M)$ est un point.

Dans la suite du cours, on travaillera presque toujours avec **une densité** $\rho(M,t)$ **continue** dans l'espace (et le temps).

- La charge $Q(t)$ contenue dans un volume $(\mathcal{V})$ est : $\boxed{Q(t) = \iiint_{M \in (\mathcal{V})} \rho(M,t) d\tau}$

Exemple 1 : Densité $\rho(M,t)$ constante dans l'espace :

Pour une densité volumique $\rho_0(t)$ constante dans l'espace, la charge totale d'un volume V est $Q = \rho_0(t) \times V$.

Exemple 2 : Densité $\rho(M,t)$ non constante :

1.4 Distribution surfacique de charges

Dans certains cas, on a pas besoin de décrire ce qu'il se passe suivant une des dimensions du problème, ça veut dire que notre problème est bidimensionnel (en deux dimensions) . Par exemple les charges aux bornes d'un condensateur :

- Lorsque les charges sont localisées dans un volume d'épaisseur faible par rapport aux autre dimensions (notées a et b sur la figure 1), on peut utiliser une **modélisation surfacique**.

- L'élément de charges peut alors s'écrire $dq(M,t) = dS(M) \underbrace{\int_{\text{ep}} \rho(M,t)dz}_{=\sigma(M,t)}$ où ep est l'épaisseur "locale"[1] de l'élément de volume, d'axe z.

- La densité surfacique de charges $\sigma(M,t)$ en M à la date t est définie par la relation :

$$\boxed{\sigma(M,t) = \frac{dq}{dS}(M,t)} \qquad \text{(unité : C.m}^{-2}\text{)}$$

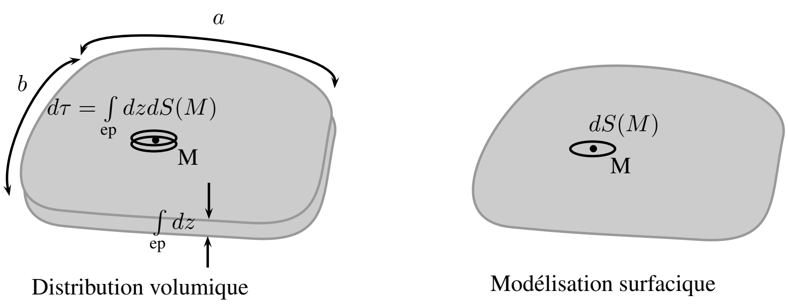


Figure 1 – Modélisation surfacique ; ep est l'épaisseur "locale" de l'objet.

✎ **Exercice :** Calculer la charge totale créée par un disque de rayon R uniformément chargé par une densité surfacique σ_0.

Pour une densité surfacique $\sigma_0(t)$ constante dans l'espace, la charge totale d'une surface S est $Q = \sigma_0(t) \times S$.

✎ **Exercice :** Calculer la charge totale créée par un disque de rayon R chargé par une densité surfacique $\sigma(r,\theta) = \sigma_0 \dfrac{r}{a}$. Quelle est la dimension de a ?

1. L'épaisseur de l'objet peut dépendre des autres coordonnées.

1.5 Distribution linéique de charges

Dans certains cas, on a pas besoin de décrire ce qu'il se passe suivant deux dimensions du problème : ça veut dire que notre problème est uni-dimensionnel (=en une dimension). C'est le cas par exemple d'un fil dans un circuit électrique :

- Lorsque les charges sont localisées dans un volume en forme de tube de diamètre faible par rapport à sa longueur (voir figure 2), on peut adopter une *modélisation linéique.*
- L'élément de charges peut alors s'écrire $dq(M,t) = d\ell(M) \underbrace{\int_{\text{"surface"}} \rho(M,t)dxdy}_{=\lambda(M,t)}$ où x et y représentent les dimensions du diamètre de l'élément de volume considéré.
- La densité linéique de charges $\lambda(M,t)$ en M à la date t est définie par la relation :

$$\boxed{\lambda(M,t) = \frac{dq}{d\ell}(M,t)} \qquad (\text{unité : C.m}^{-1})$$

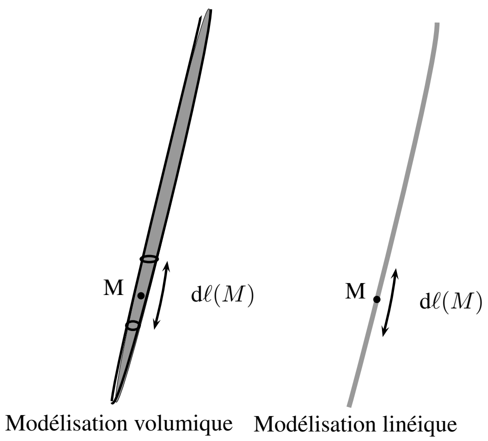


Figure 2 – Modélisation linéique

✎ **Exercice**

1. Calculer la charge totale d'un fil de longueur ℓ avec une densité linéique $\lambda(x,t) = \lambda_0 e^{-x/\ell_0}$
2. Que vaut la charge totale quand la longueur du fil tend vers $+\infty$?

1.6 Passage Surfacique $\leftrightarrow$ Volumique $\leftrightarrow$ Linéique

✎ Exercice : Volumique $\rightarrow$ Surfacique $\rightarrow$ Linéique

On considère un pavé de longueurs a, b et c. La charge totale de cet objet est Q.

1. Calculer la densité volumique ρ en supposant qu'elle est constante sur tout l'objet.
2. On suppose que $b \ll a, c$. Exprimer alors la densité surfacique σ en fonction de ρ.
3. On suppose maintenant que $b, c \ll a$. Exprimer la densité linéique λ en fonction de ρ puis de σ.

✎ Exercice : Surfacique / Volumique

On regarde de loin un électron. Il apparaît comme un point de charge $-e$. Quand on s'approche on s'aperçoit que l'électron n'est pas ponctuel mais sphérique, de rayon R.

1. On suppose que la charge de l'électron est répartie uniquement sur sa surface, et de manière uniforme. Avec ce modèle, quelle est la valeur de la répartition de charges σ ?
2. On mesure la charge à la surface et on ne trouve pas la bonne valeur de σ. On décide alors de faire une modélisation volumique de l'électron en considérant que la densité volumique est constante. Calculer alors la densité volumique ρ.

2 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

La loi de Coulomb (Physicien Français du XVIII^{e} siècle) est une loi qui se base sur l'observation des forces exercées entre des particules chargés. À partir des expériences, on en déduit qu'il existe deux types de charges. Coulomb a donné l'expression de la force entre deux particules chargés par analogie avec la force gravitationnelle.

Nous allons d'abord parler du **champ créé par une particule chargé** avant de donner l'expression de la force.

2.1 Parenthèse mathématique : Notion de champ

2.1.1 Définition

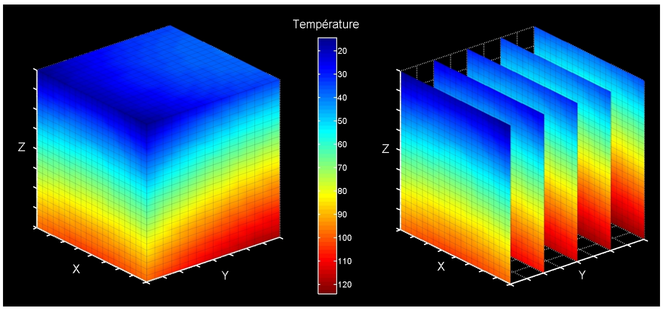
■ Un champ est l'ensemble des mesures d'une grandeur locale en tout point M d'un domaine $\mathcal{D}$ et à toute date t d'un intervalle $\mathcal{I}$.

■ On fait la différence entre :

- le *champ de scalaires* [a] : $\{U(M,t)$ où $M \in \mathcal{D}$ et $t \in \mathcal{I}\}$;
- le *champ de vecteurs* [b] : $\left\{\vec{A}(M,t)\right.$ où $M \in \mathcal{D}$ et $\left.t \in \mathcal{I}\right\}$.

a. On dit aussi *champ scalaire.*
b. On dit aussi *champ vectoriel.*

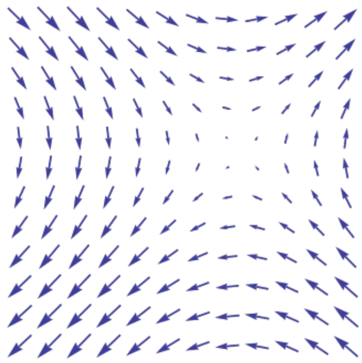
Exemple d'un Champ Scalaire



Champ de température :

- Champ **tridimensionnel** (3D)
- **Inhomogène**
- **Stationnaire** ou **instationnaire** ?

Exemple d'un Champ Vectoriel



Champ de vitesse :

- Champ **bidimensionnel** (2D)
- **Inhomogène**
- C'est **la somme vectorielle** de deux champs scalaires :

Très souvent en physique $\mathcal{I} =]-\infty; +\infty[$, et le domaine de définition de $\mathcal{D}$, sera $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, la surface ou l'intérieure d'une sphère, la surface ou l'intérieur d'un cylindre, ...

⚠ **Attention**

Dans cette description, les variables de temps et d'espaces ne sont pas reliées. *Il ne faut pas confondre avec la description de la trajectoire d'une particule ou les coordonnées d'espace d'un point sont reliés entre elles et au temps*

2.2 Champ créé par une charge

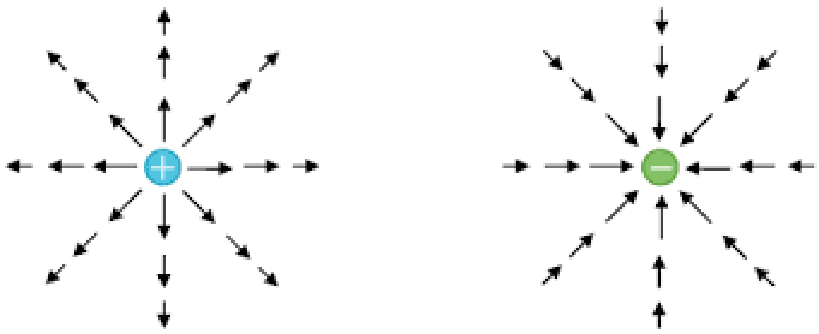
■ Dans le vide, le champ électrostatique créé en un point M par une charge ponctuelle Q située en O est :

$$\boxed{\overrightarrow{E}_Q(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r} \quad \text{[unité : V}\cdot\text{m}^{-1}\text{]}$$

■ Ce champ est défini **en tout point M de l'espace privé du point O où se trouve la charge Q**.
La constante ε_0 se nomme *permittivité diélectrique du vide* :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\ \text{F}\cdot\text{m}^{-1} \approx 8,85 \times 10^{-12}\ \text{F}\cdot\text{m}^{-1}$$

Représentation du champ créé par une charge positive (à gauche) et négative (à droite) :



Propriétés importantes du champ :

- C'est un champ vectoriel tridimensionnel. Si la distribution de charges n'évolue pas dans le temps, le champ est stationnaire.
- Le champ décroit en $\dfrac{1}{r^2}$
- Le champ ne dépend pas de θ et ϕ. Comme il ne dépend pas de la direction de l'espace, on dit qu'il est **isotrope**.
- Le champ est **radial** : il est orienté suivant $\vec{e_r}$.
- Si la charge est positive, le champ est orienté vers l'extérieur de la charge, si elle est négative, le champ est orienté vers la charge.

Remarque : L'expression du champ $\overrightarrow{E}$ est valable dans le vide. Quand on est pas dans le vide, l'expression du champ est parfois encore valable, en remplaçant ϵ_0 par une autre constante...(que vous verrez en 3ème année).

2.3 Loi de Coulomb

À quoi ça sert de calculer le champ créé par une charge électrique ?

Connaitre le champ créé par une particule permet de calculer la force exercée sur une autre particule plongée dans le champ. C'est la loi de Coulomb qui donne l'expression de la force en fonction du champ.

■ Dans le vide, la force $\vec{F}_{1\to 2}$ qu'exerce une charge ponctuelle q_1 située en M_1 sur une charge ponctuelle q_2 située en M_2 est :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_{1\to 2}} \quad \text{où} \quad \vec{e}_{1\to 2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|} \quad \text{et} \quad r = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$$

■ On peut réécrire cette force comme :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = q_2\vec{E}_1} \quad \text{où } \vec{E}_1 \text{ est le champ créé par la charge } q_1$$

On reconnaît la force de la forme $\vec{F} = q\vec{E}$ que l'on a vu dans le cours précédent.

■ La force $\vec{F}_{1\to 2}$ est *répulsive* lorsque les charges sont de même signe ($q_1q_2 > 0$; cf. figure 3) et *attractive* lorsque les charges sont de signe opposé ($q_1q_2 < 0$; cf. figure 4).

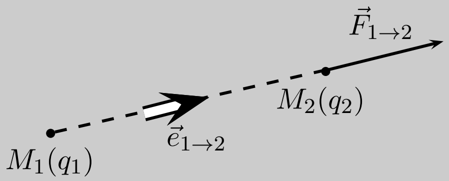


Figure 3 – Charges de même signe ($q_1q_2 > 0$)

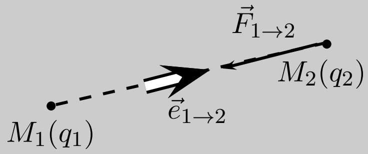


Figure 4 – Charges de signe opposé ($q_1q_2 < 0$)

Mais la particule 2 crée aussi un champ $\vec{E}_2$

La force électrostatique vérifie le principe des actions réciproques : $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$

2.4 Expression du champ électrostatique créé par une distribution de charges

2.4.1 Cas d'une distribution discrète de charges

Théorème de superposition

Le champ électrostatique $\vec{E}_\Sigma(M)$ créé en un point M par une distribution discrète de charges $\Sigma = \{P_i(q_i); i \in [\![1; N]\!]\}$ est la somme des champs électriques créés par chacune des charges de la distribution au point M :

$$\boxed{\vec{E}_\Sigma(M) = \sum_{i=1}^{i=N}\vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^{i=N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^3}}$$

En chaque point, pour obtenir le champ total, on doit additionner **vectoriellement** les champs créés par toutes les charges.

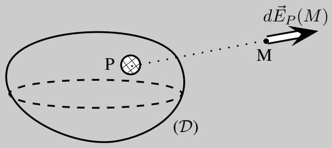
2.4.2 Cas d'une distribution continue

■ Chaque élément de charge $dq(P)$ centré sur P crée en M le champ électrostatique élémentaire :

$$\boxed{d\overrightarrow{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}dq(P)}$$

■ Le *théorème de superposition* permet de dire que le champ électrostatique total $\vec{E}(M)$ est la somme des champs élémentaires $d\vec{E}_P(M)$ quand P parcourt l'objet chargé (que l'on appelle la distribution $\mathcal{D}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \int..\int_{P\in(\mathcal{D})} d\overrightarrow{E}_P(M)}$$



☐ Cas d'une distribution volumique :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \iiint_{P\in(\mathcal{V})} d\overrightarrow{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{P\in(\mathcal{V})}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}dq(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{P\in(\mathcal{V})}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\rho(P)d\tau}$$

Dans ce cas, le champ électrostatique est **défini** et **continu** en tout point M de l'espace.

☐ Cas d'une distribution surfacique :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \iint_{P\in(\mathcal{S})} d\overrightarrow{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{P\in(\mathcal{S})}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}dq(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{P\in(\mathcal{S})}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\sigma(P)dS}$$

Dans le cas, le champ électrostatique est continu en tout point M de l'espace **sauf aux points N tels que** $\sigma(N) \neq 0$ **où le champ n'est pas défini** (admis)[2].

☐ Cas d'une distribution linéique :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \int_{P\in(\mathcal{C})} d\overrightarrow{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P\in(\mathcal{C})}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}dq(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P\in(\mathcal{C})}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\lambda(P)d\ell}$$

Dans le cas, le champ électrostatique est continu en tout point M de l'espace **sauf aux points N tels que** $\lambda(N) \neq 0$ **où le champ n'est pas défini** (admis)

2. La discontinuité au voisinage des densités surfaciques de charges est due à la modélisation surfacique, qui n'est plus valable a ce moment là.

3 Symétrie des sources : symétrie des champs

3.1 Plan de symétrie

3.1.1 Définition

Un plan π constitue un plan de symétrie des charges si et seulement si :

$$\forall P \in \mathcal{D}, dq(P) = dq(P') \text{ où } P' = \mathcal{S}_\pi(P) \text{ (P' est le symétrique de P par le plan π).}$$

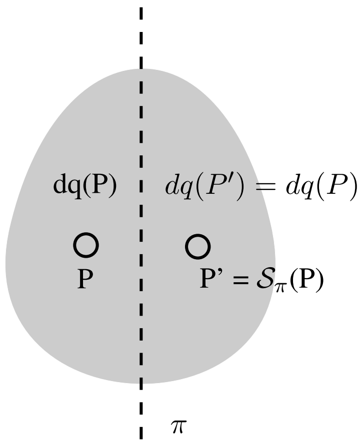


Figure 5 – Exemple d'un plan π constituant un plan de symétrie des charges.

3.1.2 Symétrie du champ électrostatique

Soit π un plan de symétrie des charges.

- Si $M' = \mathcal{S}_\pi(M)$ alors $\overrightarrow{E}(M') = \mathcal{S}_\pi\left(\overrightarrow{E}(M)\right)$.
- Si $M \in \pi$ alors $\overrightarrow{E}(M) \in \pi$.

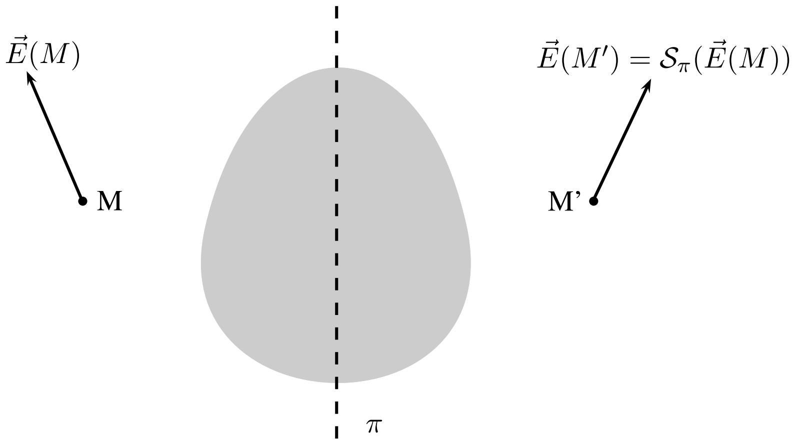


Figure 6 – Symétrie du champ électrostatique par rapport à un plan de symétrie des charges

Exemples :

3.2 Plan d'antisymétrie

3.2.1 Définition

Un plan π^* constitue un plan d'antisymétrie des charges si et seulement si :

$$\forall P \in \mathcal{D}, dq(P) = -dq(P') \text{ où } P' = \mathcal{S}_{\pi^*}(P)$$

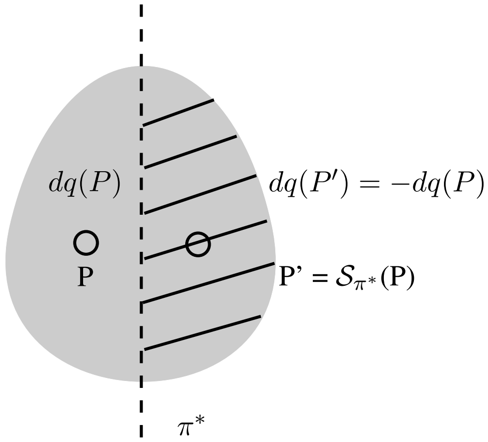


FIGURE 7 – Exemple d'un plan Π^* constituant un plan d'antisymétrie des charges

3.2.2 Antisymétrie du champ électrostatique

Soit π^* un plan de d'antisymétrie des charges.

- Si $M' = \mathcal{S}_{\pi^*}(M)$ alors $\overrightarrow{E}(M') = -\mathcal{S}_{\pi^*}\left(\overrightarrow{E}(M)\right)$.
- Si $M \in \pi^*$ alors $\overrightarrow{E}(M,t) \perp \pi^*$.

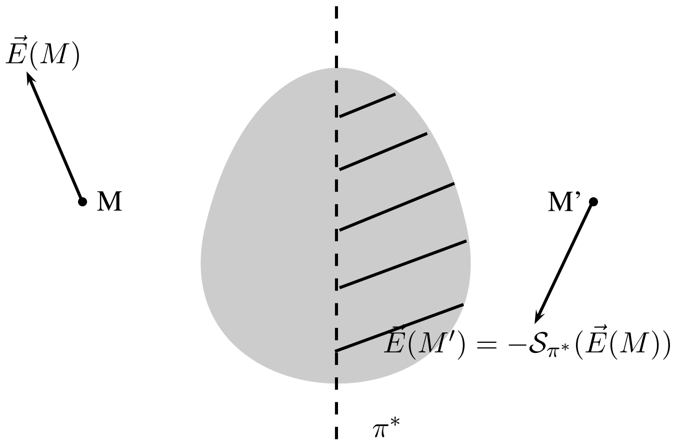


FIGURE 8 – Antisymétrie du champ électrostatique par rapport à un plan d'antisymétrie des charges

Exemples :

3.3 Invariance d'une distribution

3.3.1 Définition

Une distribution de charges $dq(\alpha, \beta, \gamma)$ est **invariante selon la coordonnée** γ si elle prend la même valeur quelque soit la valeur de γ, c'est-à-dire $dq = dq(\alpha, \beta)$.

3.3.2 Vocabulaire usuel

• Lorsque les sources sont indépendantes de l'angle θ dans les coordonnées cylindriques, on dit que **les sources sont invariantes par rotation autour de l'axe (Oz)**.

• Lorsque les sources sont indépendantes de la variable x dans les coordonnées cartésiennes, on dit que **les sources sont invariantes par translation selon** $\vec{e}_x$.

Exemples :

3.3.3 Théorème

Si une distribution de charges est invariante selon la coordonnée γ, les **composantes du champ électrostatique ne dépendent pas de** γ :

$$\overrightarrow{E}(\alpha, \beta, \gamma) = E_\alpha(\alpha, \beta)\overrightarrow{e_\alpha} + E_\beta(\alpha, \beta)\overrightarrow{e_\beta} + E_\gamma(\alpha, \beta)\overrightarrow{e_\gamma}$$

⚠ **Attention**

Cela ne veut pas dire que la composante du champ E_γ est nulle !

Exemples :

3.4 Parenthèse mathématique : Lignes de champ et tubes de champ

3.4.1 Définitions

■ Une *ligne de champ* est une courbe formée, à l'instant t, de points tels qu'en chacun de ces points et à l'instant t, **la ligne de champ est tangente au champ vectoriel** (cf. figure 9).

Une ligne de champ ne donne aucune information sur l'intensité du champ.

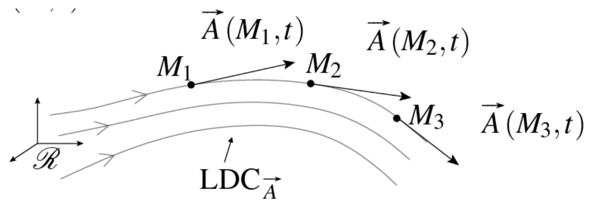
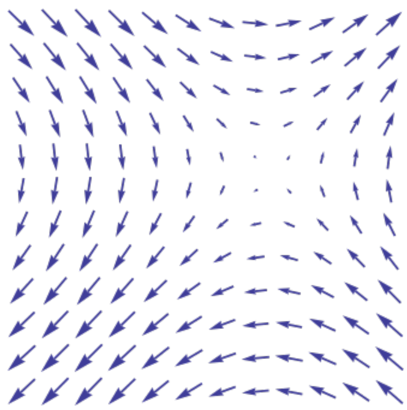
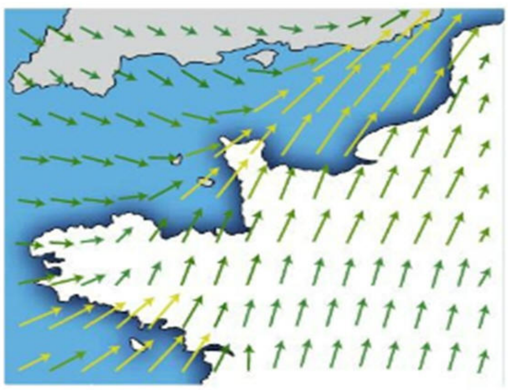


Figure 9 – Exemples de lignes de champ

Propriété : Deux lignes de champs ne peuvent pas se croiser (sauf en un point où le champ est nul ou non défini).

✎ **Exercice :** Tracer les lignes de champs sur les cartes de champs suivantes :





3.4.2 Tube de champ

■ L'ensemble des lignes de champs qui s'appuient sur un contour fermé Γ forment un *tube de champ* (cf. figure 10).

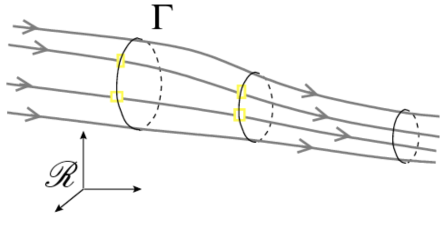


Figure 10 – Exemple de tube de champ

✎ **Exercice :** Tracer des tubes de champs sur les cartes de champs suivantes (On suppose que les champs sont tridimensionnel mais invariant suivant la direction z).

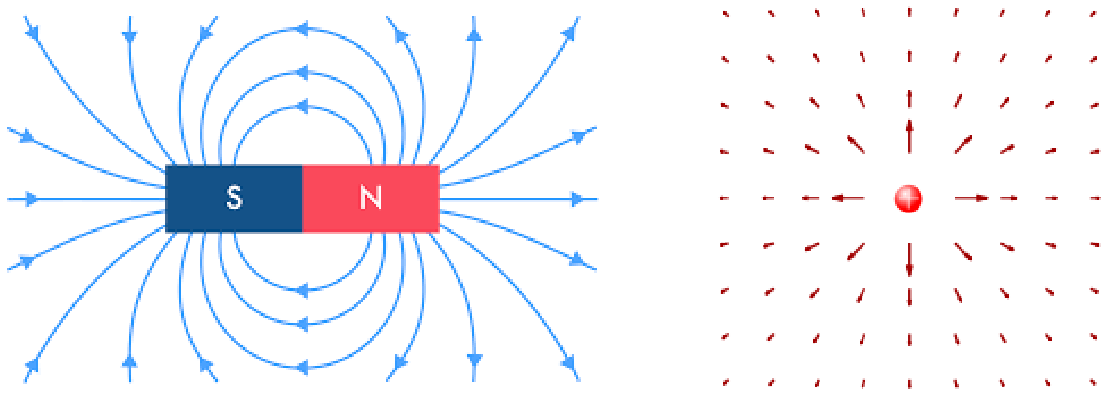


Figure 11 – À gauche : Lignes de champ magnétique créé par un aiment. À droite : Champ électrique créé par une charge positive.

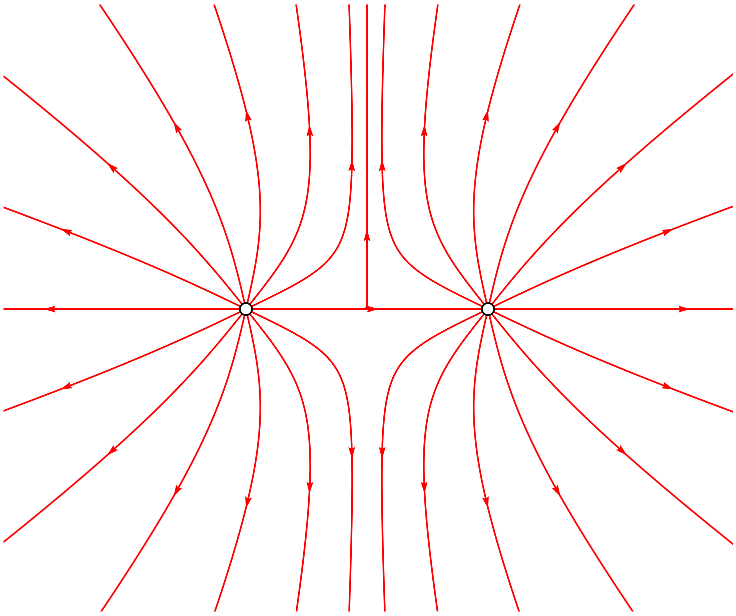
3.5 Lignes de champ électrostatique

3.5.1 Premières propriétés des lignes de champ électrostatique

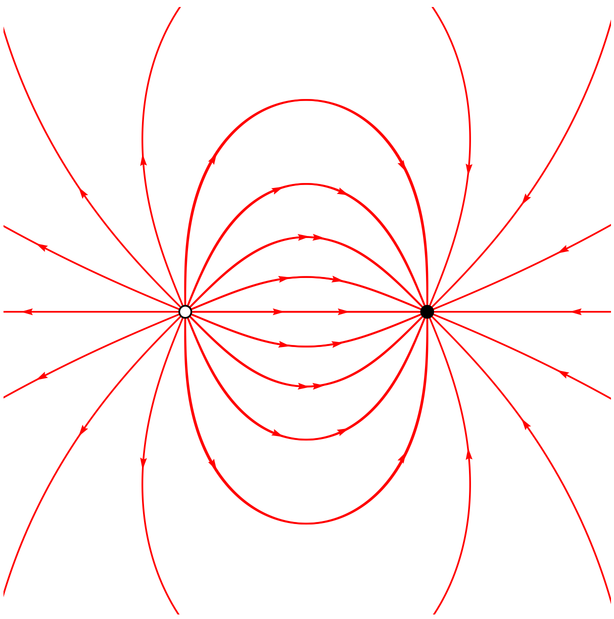
1. Deux lignes de champ électrostatique ne peuvent pas se couper (sauf en un point où le champ est nul ou non défini).
2. Les lignes de champ électrostatique sont symétriques par rapport à un plan de symétrie ou d'antisymétrie.
3. Les lignes de champ électrostatique ne peuvent pas couper un plan de symétrie.
4. Les lignes de champ électrostatique coupent orthogonalement un plan d'antisymétrie.

3.5.2 Quelques exemples de lignes de champs

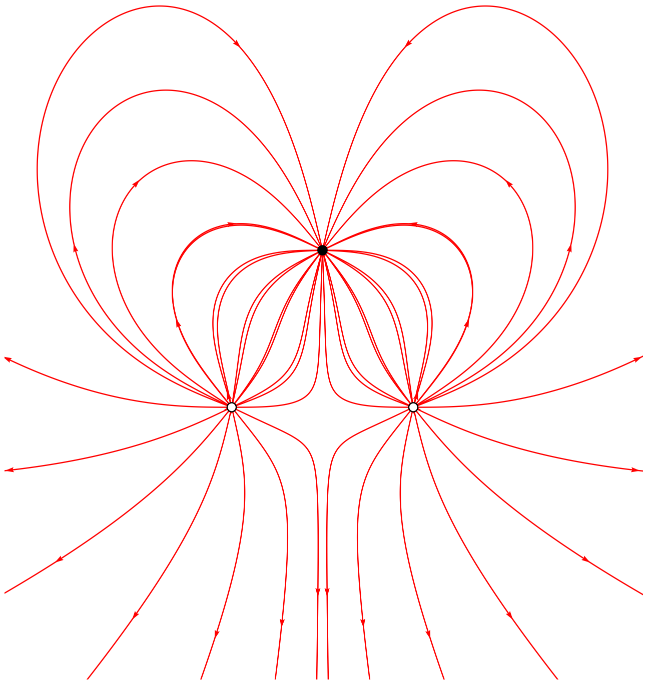
■ Deux charges identiques



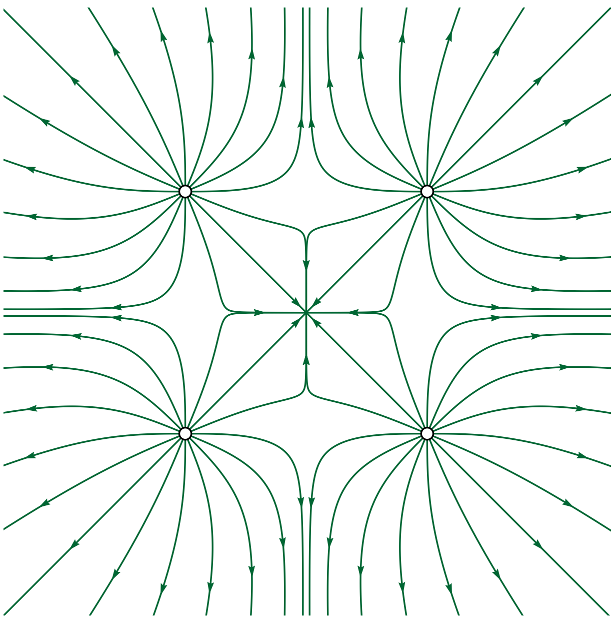
■ Deux charges de signe opposé



■ Trois charges aux sommets d'un triangle équilatérale : deux positives ; l'une négative



■ Quatre charges identiques disposées au sommet d'un carré



4 Exemples de calculs directs classiques de champ électrostatique

On imagine que l'on connaît la répartition des charges dans l'espace (densité volumique, surfacique, linéique, etc).
Le but est de connaître le champ électrique créé en tout point. Pour faire le calcul on doit sommer vectoriellement les champs électriques élémentaires $d\overrightarrow{E}$ créés par toutes les charges élementaires dq dans la distribution de charges $\mathcal{D}$.

4.1 Méthode pour le calcul direct

1. Choisir un système de coordonnées adapté au problème (cartésien, cylindrique, sphérique, ...). Pour choisir le bon système de coordonnées, on utilise les invariances et symétries du système.
2. Écrire le petit élément de volume $d\tau$ (ou de surface dS ou de longueur $d\ell$ suivant le problème).
3. Écrire le petit élément de charge au point P, $dq(P)$.
4. Exprimer $\dfrac{1}{PM^2}$ dans le système de coordonnées choisi.
5. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{e}_{PM}$ dans le système de coordonnées choisi.
6. On peut alors écrire le champ élémentaire $d\overrightarrow{E}(M)$ en M, créé par la charge en P :

$$d\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq(P)}{PM^2}\overrightarrow{e}_{PM}$$

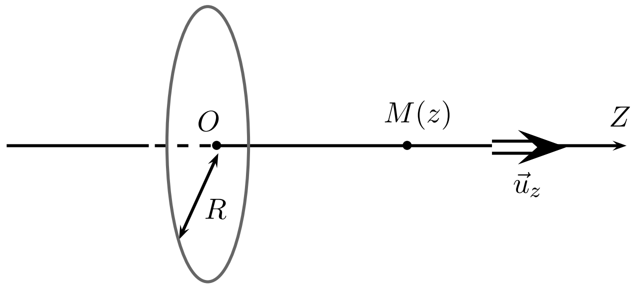
7. **Utilisation des symétries :** On cherche des plans de symétrie et d'antisymétrie pour prévoir la direction du champ $\overrightarrow{E}$
8. Faire l'intégrale sur toute la distribution de charges $\mathcal{D}$ des champs élémentaires $d\overrightarrow{E}$ pour trouver le champ total $\overrightarrow{E}$. Pour cela il faut écrire les composantes scalaires de $d\overrightarrow{E}$ et sommer composante par composante.

$$\overrightarrow{E}(M) = \int_{P\in\mathcal{D}} d\overrightarrow{E}(M)$$

Si l'on connaît déjà la direction du champ total, on peut simplifier les calculs de cette étape et ne sommer que les parties qui vont donner un champ non nul.

4.2 Exemples de calcul direct

■ Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M \in$ axe de révolution) créé par un cercle de rayon R portant la densité linéique de charges uniforme λ, en tout point M de l'axe de révolution.



■ Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M \in \text{axe de révolution})$ créé par un disque de rayon R portant la densité surfacique de charges uniforme σ, en tout point M de l'axe de révolution.

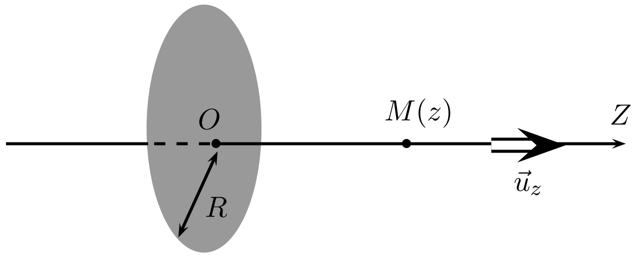


Figure 12 – Disque

■ **Applications :**

1. En déduire le champ électrostatique créé par un plan infini en tout point de l'espace.
2. En déduire le champ électrostatique créé sur l'axe de révolution d'un disque de rayon R_2 portant la densité surfacique de charges uniforme σ, percé en son centre d'un disque de rayon R_1 (voir figure 13).

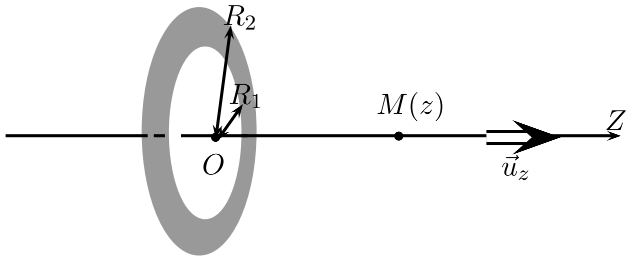


Figure 13 – Disque troué

5 Théorème de Gauss

5.1 Parenthèse mathématique : Flux d'un champ de vecteur

5.1.1 Flux infinitésimal (ou élémentaire) d'un champ de vecteurs

Soient $\vec{A}(M,t)$ un champ de vecteurs et $d\vec{S}(M)$ un vecteur surface élémentaire d'un point M situé sur une surface $\mathcal{S}$ (cf. figure 14). On définit le *flux infinitésimal (ou élementaire)* de $\vec{A}(M,t)$ à travers $d\vec{S}(M)$ par :

$$\boxed{d\phi(M,t) \triangleq \overrightarrow{A}(M,t) \cdot d\overrightarrow{S}(M)}$$

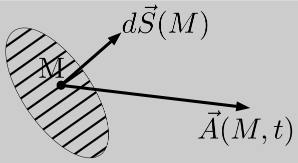


Figure 14 – Flux élémentaire

Par exemple, si $\vec{v}(M,t)$ désigne la vitesse[3] d'une particule de fluide centrée sur M à la date t, le produit scalaire $\overrightarrow{v}(M,t) \cdot d\overrightarrow{S}(M)$ représente le volume de fluide qui traverse $d\vec{S}(M)$ par unité de temps (compté positivement si le fluide se déplace dans le sens de $d\vec{S}(M)$).

5.1.2 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

■ On définit le flux du champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ à travers une surface $\mathcal{S}$ comme la somme des flux élémentaires $d\phi(M,t)$ quand M décrit la surface $\mathcal{S}$:

$$\boxed{\phi(t) = \iint_{M\in\mathcal{S}} d\phi(M,t) = \iint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{A}(M,t)\cdot d\overrightarrow{S}(M)}$$

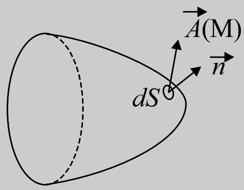


Figure 15 – Flux d'un champ de vecteurs

3. Cette vitesse est la moyenne statistique des vitesses des molécules qui constituent la particule mésoscopique.

■ Pour une surface *fermée* [a], on oriente la normale vers l'extérieur : c'est ce que l'on appelle **la convention de la normale sortante**.

$$\boxed{\phi(t) = \oiint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{A}(M,t)\cdot d\overrightarrow{S}_{ext}(M)}$$

a. Une surface est *fermée* si on peut définit l'intérieur et l'extérieur de la surface

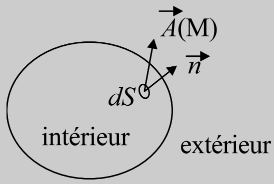


FIGURE 16 – Convention de la normale sortante

5.2 Version intégrale du théorème de Gauss

Soit $(\mathcal{S})$ une surface fermée (orientée avec la convention de la normale sortante). On note Q_{int} la charge contenue à l'intérieur de la surface $(\mathcal{S})$.

Le théorème de Gauss donne une relation entre le flux du champ électrostatique créé par une distribution de charges et la charge contenue à l'intérieur de $(\mathcal{S})$:

$$\boxed{\oiint_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{E}(P).d\overrightarrow{S}_{ext}(P) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

Remarques :
Soit une charge Q_{int} (ponctuelle ou non), centrée en O.

- Le flux total (sortant) de $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas de la taille de la surface qui entoure la charge (tant que l'on entoure toute la charge).

- Le flux total (sortant) de $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas de la forme de la surface qui entoure la charge.

- Le flux total (sortant) de $\overrightarrow{E}$ est positif si $Q_{\text{int}} > 0$ et négatif si $Q_{\text{int}} < 0$.

5.3 Exemples de calculs de champs

Si les symétries du problème sont suffisantes, le théorème de Gauss permet de calculer le champ électrique créé par une distribution de charges.

⚠ **Attention**

Il faut que le problème ait suffisamment de symétries pour que l'on puisse calculer $\overrightarrow{E}$ en tout point de l'espace à partir du théorème de Gauss. Sinon une seule équation scalaire ne donne pas suffisamment d'information sur le champ pour pouvoir le trouver complètement.

La méthode de calcul directe fonctionne toujours mais on ne peut pas toujours calculer explicitement les intégrales de $\int d\overrightarrow{E}$ pour exprimer $\overrightarrow{E}$.

Quand choisit-on d'utiliser plutôt le théorème de Gauss ou la méthode de calcul directe ?

Nous allons voir que le théorème de Gauss est beaucoup plus rapide et demande moins de calculs compliqués que la méthode directe. Nous essayerons donc toujours de commencer par appliquer le théorème de Gauss **si les symétries sont suffisantes**, et sinon nous utiliserons la méthode de calcul direct.

5.3.1 Symétrie sphérique

■ **Champ électrostatique créé par une boule contenant une densité volumique de charges uniforme** ρ_0

On considère une boule de rayon R contenant la densité volumique de charges uniforme ρ_0. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace. Quel résultat très connu retrouvons-nous en dehors de la boule ?

5.3.2 Symétrie cylindrique

■ **Champ électrostatique créé par un cylindre infini contenant la densité volumique de charges uniforme** ρ_0

Calculer le champ électrostatique créé en tout point M de l'espace par un cylindre infini de rayon R contenant la densité volumique de charges uniforme ρ_0.

5.3.3 Symétrie plane

■ **Champ créé par un plan infini de densité surfacique de charges uniforme** σ_0
Calculer le champ électrostatique créé par un plan infini portant la densité surfacique de charges uniforme σ_0.

On voit ici que **le champ sur le plan n'est pas défini sur le plan**. C'est pourquoi nous avions dit dans le paragraphe 2.4.2 que le champ électrique n'était pas défini au niveau des distributions surfacique et linéique.

Mais, **physiquement le champ électrique est une grandeur définie et continue en tout point de l'espace**. La discontinuité que l'on voit ici provient de la modélisation ! Si l'on veut connaître le champ exactement dans le plan de charges, il faut décrire le plan comme un volume d'épaisseur e et avec une distribution volumique ρ.