OMPP 1
Charges et champ électrostatique (rappels)

École Centrale Pékin

2019-2020

Table des matières

1 Distributions de charges électriques

1.1 La charge électrique

■ La charge électrique (notée q, mesurée dans le système international d'unité en *coulomb*, symbole C), est une grandeur caractéristique de chaque particule élémentaire constituant la matière.

■ La charge est **invariante** (indépendante du référentiel d'étude).

■ La charge est **conservée** (on ne peut la créer, ni la détruire).

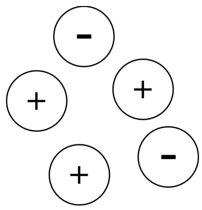
■ Les charges électriques des particules stables sont toutes des multiples entiers de la *charge élémentaire* notée e :

$$e = 1,6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

1.2 Distributions charges

1.2.1 Distributions discrètes

Lorsqu'on peut dénombrer les charges présentes dans le système on utilise une modélisation discrète



Si le système présente N charges q_i la charge totale contenue dans le système est :

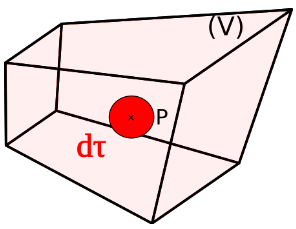
$$q = \sum_{i=1}^{i=N} q_i$$

1.2.2 Distribution continues de charges

Lorsqu'on ne peut plus dénombrer les charges, on dit que la distribution de charges est continue. En fonction des dimensions caractéristiques du problème on choisis une des trois distributions suivantes :

Distribution volumique

(Volume chargé)



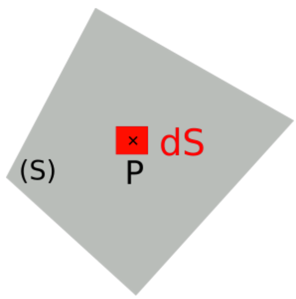
$$dq = \rho\ d\tau$$

ρ : densité volumique de charge

$$q = \iiint_{(\mathcal{V})} dq = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho\ d\tau$$

Distribution surfacique

(Surface chargée)



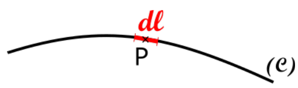
$$dq = \sigma\ dS$$

σ : densité surfacique de charge

$$q = \iint_{(\mathcal{S})} dq = \iint_{(\mathcal{S})} \sigma\ dS$$

Distribution linéique

(Ligne de charges)



$$dq = \lambda\ dl$$

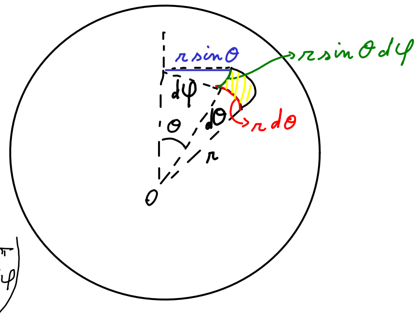
λ : densité linéique de charge

$$q = \int_{(\mathcal{C})} dq = \int_{(\mathcal{C})} \lambda\ dl$$

Les distributions surfaciques et linéiques sont des simplifications de la distribution volumique lorsque respectivement une ou deux dimensions du problèmes sont faibles devant les autres.

✎ Déterminer la charge totale contenue dans un boule de rayon R et dont la densité volumique de charge est $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$

$$q = \iiint \rho(r)\, d\tau = \int_r \int_\theta \int_\varphi \overbrace{\rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)}^{\rho(r)} \overbrace{\underbrace{r\, d\theta\, r \sin\theta\, d\varphi}_{dS}\, dr}^{d\tau}$$



$$q = \rho_0 \left(\iiint r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi - \iiint \frac{r^3}{R} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \right)$$

les 3 paramètres r, θ et φ sont indépendant
on peut séparer les intégrales :

$$q = \rho_0 \left(\int_{r=0}^{R} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi - \int_{r=0}^{R} \frac{r^3}{R} dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right)$$

$$q = \rho_0 \left(\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[-\cos\theta\right]_0^\pi 2\pi - \left[\frac{r^4}{4R}\right]_0^R \left[-\cos\theta\right]_0^\pi 2\pi \right)$$

$$q = 4\pi \rho_0 R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{q = \frac{1}{3} \pi \rho_0 R^3}$$

2 Champ électrostatique et force de Coulomb

Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ caractérise la perturbation de l'espace due à la présence d'une charge ou d'une distribution de charge.

2.1 Champ créé par une charge

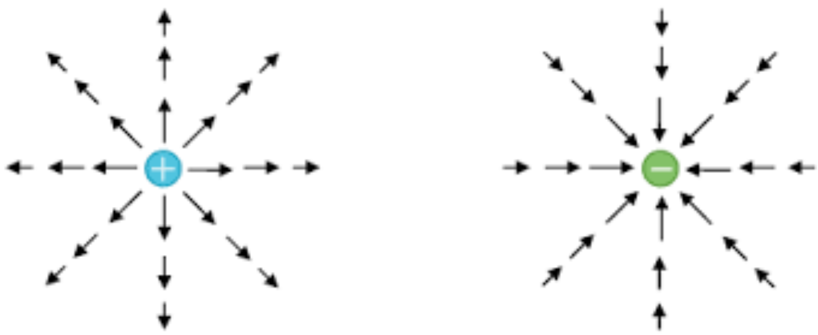
■ Dans le vide, le champ électrostatique créé en un point M par une charge ponctuelle Q située en O est :

$$\boxed{\overrightarrow{E}_Q(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r} \quad [\text{unité : V} \cdot \text{m}^{-1}]$$

■ Ce champ est défini **en tout point M de l'espace privé du point O où se trouve la charge Q**.
La constante ε_0 se nomme *permittivité diélectrique du vide* :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1} \approx 8,85 \times 10^{-12}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$

Représentation du champ créé par une charge positive (à gauche) et négative (à droite) :



Propriétés importantes du champ :

- C'est un champ vectoriel tridimensionnel. Si la distribution de charges n'évolue pas dans le temps, le champ est stationnaire.
- Le champ décroit en $\frac{1}{r^2}$
- Le champ ne dépend pas de θ et ϕ. Comme il ne dépend pas de la direction de l'espace, on dit qu'il est **isotrope**.
- Le champ est **radial** : il est orienté suivant $\overrightarrow{e_r}$.
- Si la charge est positive, le champ est orienté vers l'extérieur de la charge, si elle est négative, le champ est orienté vers la charge.

Ordres de grandeur :

- Téléphone portable $\simeq 1$ V.m^{-1}
- Fil électrique $\simeq 10^{-2}$ V.m^{-1}
- Clocher pendant un orage $\simeq 1$ MV.m^{-1}
- Noyau d'hydrogène sur son électron $\simeq 10^{11}$ V.m^{-1}

Remarque : L'expression du champ $\overrightarrow{E}$ est valable dans le vide. Quand on est pas dans le vide, l'expression du champ est parfois encore valable, en remplaçant ϵ_0 par une autre constante...(que vous verrez en 3ème année).

2.2 Champ créé par une distribution de charges

Théorème de superposition

Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}_\Sigma(M)$ créé en un point M par une distribution de charges est la somme des champs électriques créés par chacune des charges de la distribution au point M.

2.2.1 Distribution discrète de charges

$$\boxed{\overrightarrow{E}_\Sigma(M) = \sum_{i=1}^{i=N} \overrightarrow{E}_i(M) = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^3}}$$

2.2.2 Distributions continues de charges

Chaque élément de charge $dq(P)$ centré sur P crée en M le champ électrostatique élémentaire :

$$d\overrightarrow{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} dq(P)$$

☐ Cas d'une distribution volumique :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \iiint_{P\in(\mathcal{V})} d\overrightarrow{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{P\in(\mathcal{V})} \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} dq(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{P\in(\mathcal{V})} \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\rho(P)d\tau}$$

Dans ce cas, le champ électrostatique est **défini** et **continu** en tout point M de lespace.

☐ Cas d'une distribution surfacique :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \iint_{P\in(\mathcal{S})} d\overrightarrow{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{P\in(\mathcal{S})} \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} dq(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{P\in(\mathcal{S})} \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\sigma(P)dS}$$

Dans le cas, le champ électrostatique est continu en tout point M de l'espace **sauf aux points N tels que** $\sigma(N) \neq 0$ **où le champ n'est pas défini** (admis) [1].

☐ Cas d'une distribution linéique :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \int_{P\in(\mathcal{C})} d\overrightarrow{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P\in(\mathcal{C})} \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} dq(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P\in(\mathcal{C})} \frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\lambda(P)d\ell}$$

Dans le cas, le champ électrostatique est continu en tout point M de l'espace **sauf aux points N tels que** $\lambda(N) \neq 0$ **où le champ n'est pas défini** (admis)

2.3 Loi de Coulomb

Connaitre le champ créé par une particule permet de calculer la force exercée sur une autre particule plongée dans le champ. C'est la loi de Coulomb qui donne l'expression de la force en fonction du champ.

■ Dans le vide, la force $\vec{F}_{1\to 2}$ qu'exerce une charge ponctuelle q_1 située en M_1 sur une charge ponctuelle q_2 située en M_2 est :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_{1\to 2}} \quad \text{où} \quad \vec{e}_{1\to 2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|} \quad \text{et} \quad r = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$$

■ On peut réécrire cette force comme :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = q_2\overrightarrow{E_1}} \quad \text{où } \overrightarrow{E}_1 \text{ est le champ créé par la charge } q_1$$

■ La force ressentie par une charge ponctuelle q est indépendante de la distribution de charges, elle dépend seulement du champ $\overrightarrow{E}$ créé par cette distribution. Elle est donnée par $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$.

1. La discontinuité au voisinage des densités surfaciques de charges est due à la modélisation surfacique, qui n'est plus valable a ce moment là.

2.4 Lignes de champ électrostatique

Une *ligne de champ* est une courbe formée, à l'instant t, de points tels qu'en chacun de ces points et à l'instant t, **la ligne de champ est tangente au champ vectoriel** (cf. figure 1).

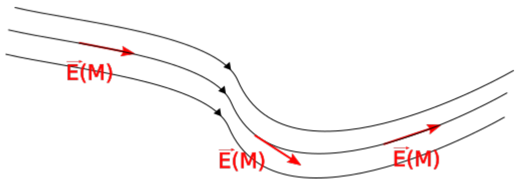


Figure 1 – Exemple de lignes de champ

Propriété :
- Deux lignes de champs ne peuvent se croiser qu'en un point ou le champ est nul.
- Les lignes de champs convergent vers les charges négatives et divergent des charges positives.
- Les lignes de champs ne se referment pas sur elles-même
- On représente une zone de champ intense par des lignes de champ plus resserrées

Un *tube de champ* est un ensemble de ligne de champ s'appuyant sur un contour fermé (cf. figure 2).

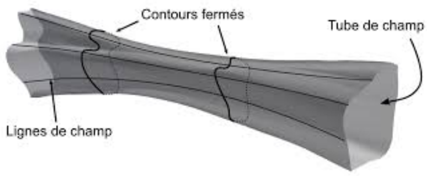


Figure 2 – Exemple de tube de champ

3 Potentiel électrostatique

3.1 Rappels sur le gradient

Soit $\{f(M) \text{ où } M \in \mathcal{D}\}$ un champ de scalaires *permanent*. Lorsque M est déplacé de $d\vec{M}$ alors la variation de $f(M)$ s'écrit :

$$\boxed{df(M) = \overrightarrow{grad} f(M) \cdot d\vec{M}}$$

C'est la définition de l'opérateur gradient.

On peut noter $\overrightarrow{grad} f(M)$ ou $\vec{\nabla}(f(M))$. Dans ce dernier cas, on dit «nabla f(M)» plutôt que «gradient de f(M)».

3.1.1 Propriétés

① L'opérateur gradient transforme un champ de scalaires en un champ de vecteurs.

② $\left\|\overrightarrow{grad} f(M)\right\|$ s'exprime en $\dfrac{\text{unité de f}}{\text{m}}$.

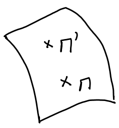
③ Le gradient est un opérateur linéaire c'est-à-dire que si λ et μ sont deux réels, $\{f(M) \text{ où } M \in \mathcal{D}\}$ et $\{g(M) \text{ où } M \in \mathcal{D}\}$ deux champs de scalaires alors :

$$\vec{\nabla}(\lambda f + \mu g)(M) = \lambda \vec{\nabla} f(M) + \mu \vec{\nabla} g(M)$$

④ Le vecteur gradient est orthogonal aux courbes iso-f (appelées aussi surfaces de niveau).

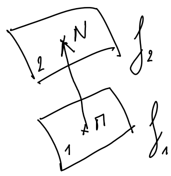
⑤ Le vecteur gradient de f est dirigé dans le sens des f croissants.

✎ Démontrer les affirmations ④ et ⑤

④  surface iso-f (f est constante sur toute la surface)

$df = \overrightarrow{grad} f . \overrightarrow{dM}$ et ici $df = 0$ et $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'}$

Ainsi $\overrightarrow{grad} f . \overrightarrow{MM'} = 0$, $\boxed{\overrightarrow{grad} f \perp \overrightarrow{MM'}}$

⑤  Soient 2 surfaces iso-f et $f_2 > f_1$

On a $df > 0$

$\boxed{\overrightarrow{grad} f . \overrightarrow{MN} > 0}$

Donc le $\overrightarrow{grad} f$ est orienté vers les f croissants

3.1.2 Exemple

La figure 3 représente les surfaces de niveau :

- $f(x, y, z) = 8$ (en jaune)
- $f(x, y, z) = 12$ (en magenta)

de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z$.

On a aussi représenté le gradient de f au voisinage de la surface de niveau $f(x, y, z) = 8$: ce champ de vecteurs est bien orthogonal à la surface de niveau et orienté vers la surface de niveau $f(x, y, z) = 12$, c'est à dire dans la direction de l'augmentation de $f(x, y, z)$.

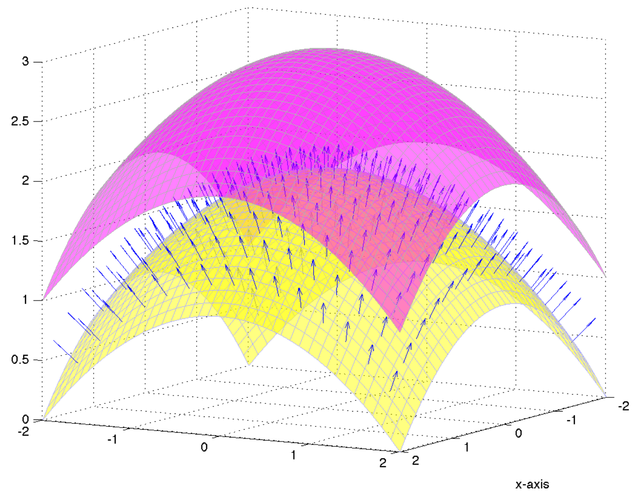


FIGURE 3 – Exemple de gradient

✎ Calculer le gradient de la fonction $f(x, y, z)$ donnée dans l'exemple précédent

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{df}{dx}\vec{e_x} + \frac{df}{dy}\vec{e_y} + \frac{df}{dz}\vec{e_z}$$

On a donc ici $\boxed{\overrightarrow{grad} f = 2x\,\vec{e_x} + 2y\,\vec{e_y} + 4\,\vec{e_z}}$

3.1.3 Expression du vecteur gradient dans les différents systèmes de coordonnées

Soit $\{f(M) \text{ où } M \in \mathcal{D}\}$ un champ de scalaires.

■ En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}(M)\vec{e_z}$$

■ En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} f(M) = \frac{\partial f}{\partial r}(M)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(M)\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}(M)\vec{e_z}$$

■ En coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} f(M) = \frac{\partial f}{\partial r}(M)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(M)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}(M)\vec{e_\varphi}$$

Seule l'expression en coordonnées cartésiennes est à connaître.

3.2 Potentiel créé par une charge ponctuelle

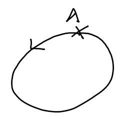
Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle dérive d'un potentiel électrostatique, on peut écrire :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}\ V(M) \quad \text{ou} \quad \vec{E}(M).\overrightarrow{dM} = -dV(M)$$

✎ Montrer que cela signifie que $\vec{E}(M).\overrightarrow{dM}$ est une forme différentielle totale exacte. En déduire la valeur de la circulation de $\vec{E}(M)$ sur un contour fermé.

$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dM} = \int_A^B -dV = V(A)-V(B)$

Ainsi l'intégrale de $\vec{E}.\overrightarrow{dM}$ ne dépend pas du chemin suivi, c'est une forme différentielle totale exacte.



$\oint \vec{E}.\overrightarrow{dM} = \int_A^A \vec{E}.\overrightarrow{dM} = V(A)-V(A) = 0$

la circulation de $\vec{E}$ sur un contour fermé est nulle.

Le potentiel électrostatique créé en M par une charge ponctuelle Q située en O est (à une constante près [2]) :

$$\boxed{V_Q(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 OM} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \quad \text{[unité : le volt (V)]} \quad \text{où} \quad r \triangleq OM$$

Le potentiel vérifie, comme le champ électrique, **le théorème de superposition** et donc le potentiel électrique $V_\Sigma(M)$ créé en un point M par une distribution discrète de charges $\Sigma = \{P_i(q_i); i \in [\![1;N]\!]\}$ est la somme des potentiels électriques créés en M par chacune des charges qui la constituent :

$$\boxed{V_\Sigma(M) = \sum_{i=1}^{i=N} V_{q_i}(M) = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_i M}}$$

2. La plupart du temps le système étudié ne présente pas de charges à l'infini on peut donc prendre cette constante nulle $V_Q(M) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ce n'est plus vrai s'il y a des charges à l'infini. Exemple : un fil infini chargé

3.3 Potentiel électrique créé par une distribution continue FINIE de charges

Considérons une distribution $(\mathcal{D})$ continue de charges. Soient P un point de cette distribution et $dq(P)$ une charge élémentaire centrée autour de P. La charge élémentaire $dq(P)$ crée en M le potentiel électrique élémentaire :

$$dV_P(M) = \frac{dq(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM}$$

Le potentiel $V(M)$ créé par l'ensemble de la distribution $(\mathcal{D})$ est obtenue par le théorème de superposition. Son calcul dépend de la forme de la distribution de charges.

■ Les trois expressions suivantes sont valables si les distributions sont d'extension finie :

- **Cas d'une distribution volumique :**

$$\boxed{V(M) = \iiint_{P\in(\mathcal{V})} dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{P\in(\mathcal{V})} \frac{dq(P)}{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{P\in(\mathcal{V})} \frac{\rho(P)d\tau}{PM}}$$

- **Cas d'une distribution surfacique :**

$$\boxed{V(M) = \iint_{P\in(\mathcal{S})} dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{P\in(\mathcal{S})} \frac{dq(P)}{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{P\in(\mathcal{S})} \frac{\sigma(P)dS}{PM}}$$

- **Cas d'une distribution linéique :**

$$\boxed{V(M) = \int_{P\in(\mathcal{C})} dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{P\in(\mathcal{C})} \frac{dq(P)}{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{P\in(\mathcal{C})} \frac{\lambda(P)d\ell}{PM}}$$

3.4 Énergie potentielle électrostatique

En électrostatique (c'est à dire en régime stationnaire), la force de Coulomb $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$ dérive d'une énergie potentielle, c'est donc une **force conservative** :

$$\boxed{\overrightarrow{F_e} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{pe})}$$

L'énergie potentielle électrostatique E_{pe} est reliée au potentiel électrostatique V, par la relation :

$$\boxed{E_{pe}(M) = qV(M)}$$