OMPP 1
Charges et champ électrostatique (rappels) suite

École Centrale Pékin

2019-2020

Table des matières

4 Symétrie des sources : symétrie des champs

4.1 Plan de symétrie

4.1.1 Définition

Un plan π constitue un plan de symétrie des charges si et seulement si :

$$\forall P \in \mathcal{D}, dq(P) = dq(P') \text{ où } P' = \mathcal{S}_\pi(P) \text{ (P' est le symétrique de P par le plan π).}$$

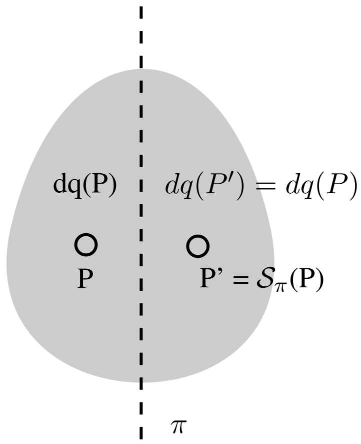


Figure 1 – Exemple d'un plan π constituant un plan de symétrie des charges.

4.1.2 Symétrie du champ électrostatique

Soit π un plan de symétrie des charges.

- Si $M' = \mathcal{S}_\pi(M)$ alors $\overrightarrow{E}(M') = \mathcal{S}_\pi\left(\overrightarrow{E}(M)\right)$.
- Si $M \in \pi$ alors $\overrightarrow{E}(M) \in \pi$.

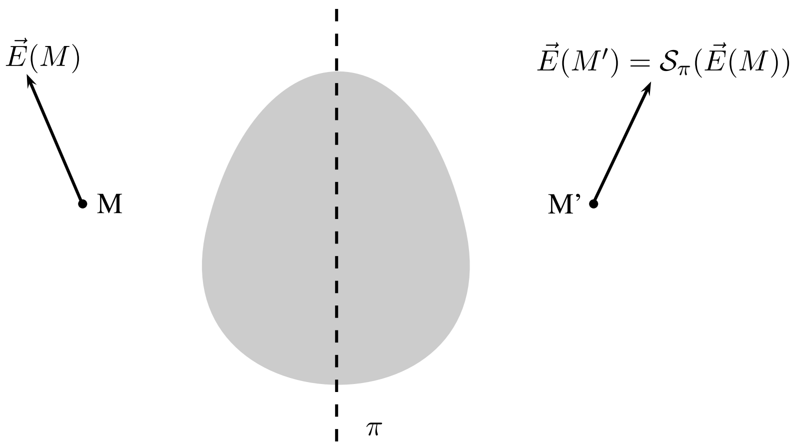


Figure 2 – Symétrie du champ électrostatique par rapport à un plan de symétrie des charges

Conséquence : Les lignes de champ électrostatique ne peuvent pas couper un plan de symétrie des charges

4.2 Plan d'antisymétrie

4.2.1 Définition

Un plan π^* constitue un plan d'antisymétrie des charges si et seulement si :

$$\forall P \in \mathcal{D}, dq(P) = -dq(P') \text{ où } P' = \mathcal{S}_{\pi^*}(P)$$

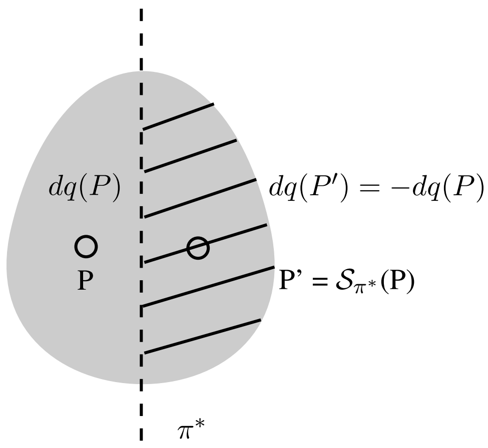


Figure 3 – Exemple d'un plan Π^* constituant un plan d'antisymétrie des charges

4.2.2 Antisymétrie du champ électrostatique

Soit π^* un plan de d'antisymétrie des charges.

- Si $M' = \mathcal{S}_{\pi^*}(M)$ alors $\overrightarrow{E}(M') = -\mathcal{S}_{\pi^*}\left(\overrightarrow{E}(M)\right)$.
- Si $M \in \pi^*$ alors $\overrightarrow{E}(M,t) \perp \pi^*$.

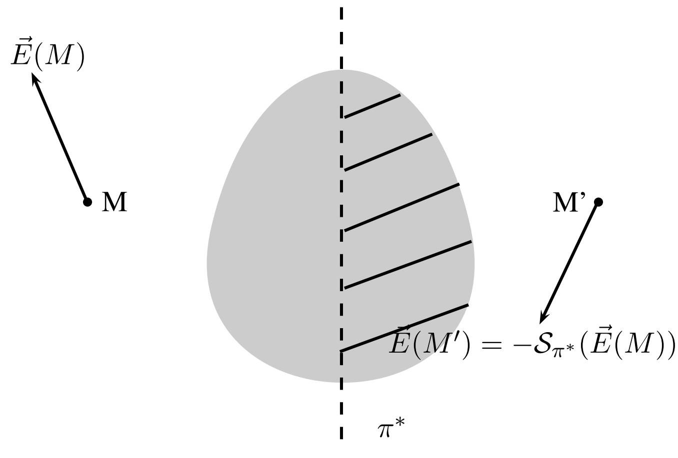


Figure 4 – Antisymétrie du champ électrostatique par rapport à un plan d'antisymétrie des charges

Conséquence : Les lignes de champ électrostatique coupent orthogonalement un plan d'antisymétrie des charges

4.3 Invariance d'une distribution

4.3.1 Définition

Une distribution de charges $dq(\alpha, \beta, \gamma)$ est **invariante selon la coordonnée** γ si elle prend la même valeur quelque soit la valeur de γ, c'est-à-dire $dq = dq(\alpha, \beta)$.

4.3.2 Vocabulaire usuel

- Lorsque les sources sont indépendantes de l'angle θ dans les coordonnées cylindriques, on dit que **les sources sont invariantes par rotation autour de l'axe (Oz)**.
- Lorsque les sources sont indépendantes de la variable x dans les coordonnées cartésiennes, on dit que **les sources sont invariantes par translation selon** $\vec{e}_x$.
- Lorsque les sources sont invariantes par rotation autour d'un axe et invariantes par translation le long de cet axe, on dit que le problème présente **une symétrie cylindrique**.
- Lorsque les sources sont invariantes par rotation autour d'un point, on dit que le problème présente **une symétrie sphérique**.

4.3.3 Principe de Curie

Le champ électrostatique admet, au moins, les mêmes propriétés d'invariance et de symétrie que la distribution de charges qui le crée.

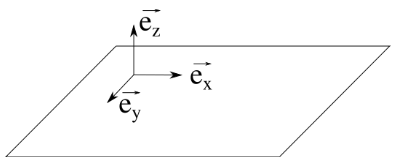
Si une distribution de charges est invariante selon la coordonnée γ, les **composantes du champ électrostatique ne dépendent pas de** γ :

$$\overrightarrow{E}(\alpha, \beta, \gamma) = E_\alpha(\alpha, \beta)\,\overrightarrow{e_\alpha} + E_\beta(\alpha, \beta)\,\overrightarrow{e_\beta} + E_\gamma(\alpha, \beta)\,\overrightarrow{e_\gamma}$$

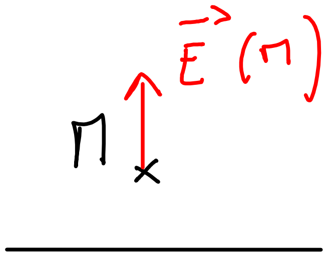
⚠ **Attention**
Cela ne veut pas dire que la composante du champ E_γ est nulle !

4.4 Exemples

✎ Soit un plan infini dans les directions x et y. Donner les invariances et symétries de la distribution de charges, en déduire l'expression la plus simple de $\overrightarrow{E}(M)$.



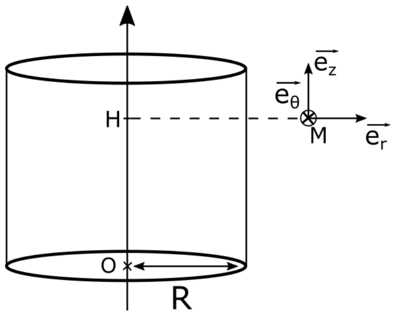
La plaque est infinie dans les directions x et y donc tous plans contenant M et $\vec{e_z}$ est un plan de symétrie. $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie donc $\vec{E} \propto \vec{e_z}$



La distribution est invariante selon x et y donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$

Finalement $\boxed{\vec{E}(M) = \vec{E}(z)\,\vec{e_z}}$

✎ Soit un cylindre de rayon R et de hauteur h, chargé seulement sur sa surface. Donner les invariances et symétries de la distribution de charges, en déduire l'expression la plus simple de $\vec{E}(M)$. Comment sont modifiés les résultats précédents si le cylindre est de hauteur infinie ?



le problème est invariant par rotation d'angle θ donc $\vec{E}$ ne dépend pas de θ.
tous les plans $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ sont des plans de symétrie des charges donc $\vec{E}$ appartient à ces plans
Ainsi $\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r,z)\vec{e_r} + E_z(r,z)\vec{e_z}}$

Lorsque le cylindre est infini il y a invariance selon $\vec{e_z}$
De plus tout plan perpendiculaire au cylindre devient un plan de symétrie
Ainsi $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{e_r}}$

5 Exemples de calculs directs classiques de champ électrostatique

On imagine que l'on connaît la répartition des charges dans l'espace (densité volumique, surfacique, linéique, etc).
Le but est de connaître le champ électrique créé en tout point. Pour faire le calcul on doit sommer vectoriellement les champs électriques élémentaires $d\vec{E}$ créés par toutes les charges élementaires dq dans la distribution de charges $\mathcal{D}$.

5.1 Méthode pour le calcul direct

1. Choisir un système de coordonnées adapté au problème (cartésien, cylindrique, sphérique, ...). Pour choisir le bon système de coordonnées, on utilise les invariances et symétries du système.
2. Écrire le petit élément de volume $d\tau$ (ou de surface dS ou de longueur $d\ell$ suivant le problème).
3. Écrire le petit élément de charge au point P, $dq(P)$.
4. Exprimer $\dfrac{1}{PM^2}$ dans le système de coordonnées choisi.
5. Exprimer le vecteur $\vec{e}_{PM}$ dans le système de coordonnées choisi.
6. On peut alors écrire le champ élémentaire $d\vec{E}(M)$ en M, créé par la charge en P :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq(P)}{PM^2}\vec{e}_{PM}$$

7. **Utilisation des symétries :** On cherche des plans de symétrie et d'antisymétrie pour prévoir la direction du champ $\vec{E}$
8. Faire l'intégrale sur toute la distribution de charges $\mathcal{D}$ des champs élémentaires $d\vec{E}$ pour trouver le champ total $\vec{E}$. Pour cela il faut écrire les composantes scalaires de $d\vec{E}$ et sommer composante par composante.

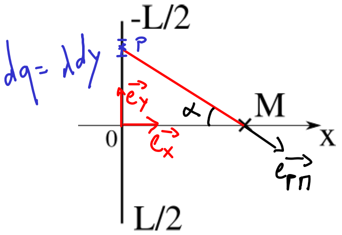
$$\vec{E}(M) = \int_{P\in\mathcal{D}} d\vec{E}(M)$$

Si l'on connaît déjà la direction du champ total, on peut simplifier les calculs de cette étape et ne sommer que les parties qui vont donner un champ non nul.

5.2 Exemple de calcul direct

✎ Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M \in \text{mediatrice})$ créé par un fil de longueur L portant la densité linéique de charges uniforme λ, en tout point M de la médiatrice.

Que devient $\vec{E}$ lorsque le fil est infini ?



1) Ici le système de coordonnées cartésiennes semble le plus adapté

2) la distribution de charges est linéique

3) $\boxed{dq = \lambda dy}$

4) $PM = \sqrt{x^2+y^2}$

5) $\vec{e_{PM}} = \cos\alpha\, \vec{e_x} - \sin\alpha\, \vec{e_y}$

6) $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda dy}{x^2+y^2}(\cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\alpha\, \vec{e_y})\right)$

7) Le point P' symetrique de P par rapport à O va créer un champ identique selon $\vec{e_{P'M}} = \cos\alpha\, \vec{e_x} + \sin\alpha\, \vec{e_y}$. La somme des composantes du champ selon $\vec{e_y}$ est donc nulle par symetrie

Autre approche, tous les plans contenant Ox sont des plans de symétrie donc $\boxed{\vec{E} \propto \vec{e_x}}$

8) $\vec{E} = \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda dy}{x^2+y^2}\right)\cos\alpha\, \vec{e_x}$

y et α varient lorsque P varie, nous allons exprimer y en fonction de α.

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$ donc $\boxed{dy = \frac{x}{\cos^2\alpha}d\alpha}$ et $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Ainsi $\vec{E} = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda x(x^2+y^2)}{x^2(x^2+y^2)}\right)\cos\alpha\, d\alpha\, \vec{e_x}$ (α_0 est l'angle tel que $y = \frac{L}{2}$)

$\vec{E} = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\cos\alpha\, d\alpha\, \vec{e_x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(2\sin\alpha_0)\, \vec{e_x}$ avec $\sin\alpha_0 = \frac{L/2}{\sqrt{x^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}$

Finalement, $\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\frac{L/2}{\sqrt{x^2+(L/2)^2}}\vec{e_x}}$

Pour un fil infini $L \to \infty$ donc $\boxed{\vec{E} \to \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\vec{e_x}}$

6 Théorème de Gauss

6.1 Parenthèse mathématique : Flux d'un champ de vecteur

■ **Flux infinitésimal d'un champ de vecteurs**

Soient $\vec{A}(M,t)$ un champ de vecteurs et $d\vec{S}(M)$ un vecteur surface élémentaire d'un point M situé sur une surface $\mathcal{S}$ (cf. figure 5). On définit le *flux infinitésimal (ou élementaire)* de $\vec{A}(M,t)$ à travers $d\vec{S}(M)$ par :

$$\boxed{d\phi(M,t) \triangleq \overrightarrow{A}(M,t) \cdot d\overrightarrow{S}(M)}$$

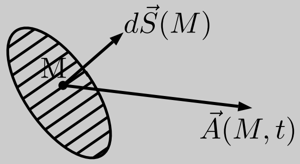


Figure 5 – Flux élementaire

■ **Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface**

On définit le flux du champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ à travers une surface $\mathcal{S}$ comme la somme des flux élémentaires $d\phi(M,t)$ quand M décrit la surface $\mathcal{S}$:

$$\boxed{\phi(t) = \iint_{M\in\mathcal{S}} d\phi(M,t) = \iint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{A}(M,t)\cdot d\overrightarrow{S}(M)}$$

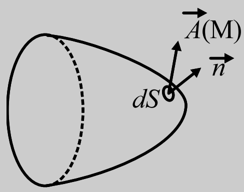


Figure 6 – Flux d'un champ de vecteurs

■ Par convention lorsqu'une surface est fermée, c'est à dire qu'elle délimite un volume, on choisit d'orienter le vecteur surface vers l'extérieur.

6.2 Version intégrale du théorème de Gauss

Soit $(\mathcal{S})$ une surface fermée, orientée vers l'extérieur. On note Q_{int} la charge contenue à l'intérieur de la surface $(\mathcal{S})$.

Le théorème de Gauss donne une relation entre le flux du champ électrostatique sortant créé par une distribution de charges et la charge contenue à lintérieur de $(\mathcal{S})$:

$$\boxed{\oiint_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{E}(P).d\overrightarrow{S}_{ext}(P) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

6.3 Exemples de calculs de champs

Si les symétries du problème sont suffisantes, le théorème de Gauss permet de calculer simplement le champ électrique créé par une distribution de charges.

⚠ **Attention**

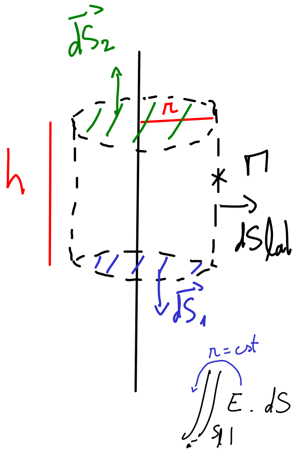
Il faut que le problème ait suffisamment de symétries pour que l'on puisse calculer $\overrightarrow{E}$ en tout point de l'espace à partir du théorème de Gauss. Sinon une seule équation scalaire ne donne pas suffisamment d'information sur le champ pour pouvoir le trouver complètement.

Nous allons voir que le théorème de Gauss est beaucoup plus rapide et demande moins de calculs compliqués que la méthode directe. Nous essayerons donc toujours de commencer par appliquer le théorème de Gauss **si les symétries sont suffisantes**, et sinon nous utiliserons la méthode de calcul direct.

✎ En utilisant le théorème de Gauss déterminer le champ électrique crée par un fil infini à une distance x de l'axe. Retrouve-t-on bien le résultat du calcul direct (5.2) ?

Symetrie cylindrique donc $\vec{E}$ est radial

$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r}$



On utilise comme surface de Gauss un cylindre de hauteur h et de rayon r

La charge contenue dans le cylindre est $\boxed{Q_{int} = \lambda h}$

On aplique le théorème de Gauss au cylindre : $\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

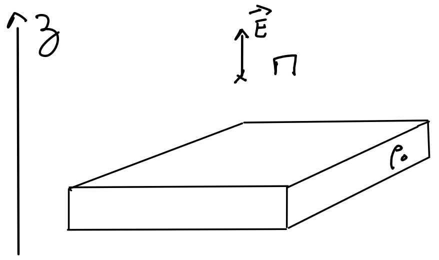
$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \cancel{\iint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{dS}}^{\,0} + \cancel{\iint_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{dS}}^{\,0} + \iint_{S_{lat}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_{lat}} E\,dS \quad \text{car } \vec{E} \propto \vec{e}_r$$

$$\iint_{S_{lat}} E\,dS \overset{r = cst}{=} E\,S_{lat} = E \times 2\pi r h \quad \text{donc} \quad E\,2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \text{puis} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r}$$

Le resultat ne dépend pas du choix de la surface de Gauss et on retrouve le resultat du 5.2

✎ Calculer le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par une plaque infinie d'épaisseur e portant la densité volumique de charges uniforme ρ_0.

Que devient ce résultat quand l'épaisseur tend vers 0 ?

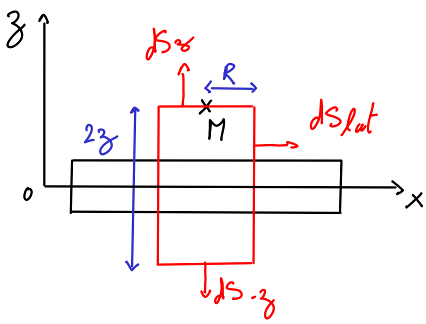


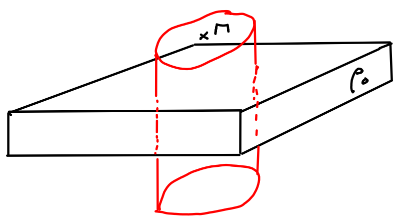
Le système présente les mêmes symetries que la plaque au 4.4 donc $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$

Nous allons choisir comme surface de Gauss un cylindre qui passe par M.

Il faut séparer 2 cas. M à l'intérieur de la plaque et M à l'exterieur.

• M a l'exterieur





Par symétrie $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$ et $\vec{dS}_{-z} = -\vec{dS}_{z}$

$\vec{E} \perp \vec{dS}_{lat}$ $\qquad$ $z = cst$

$$\oint \vec{E}.\vec{dS} = \iint_{S_z} \vec{E}.\vec{dS}_z + \iint_{S_{-z}} \vec{E}.\vec{dS}_{-z} + \cancel{\iint_{S_{lat}} \vec{E}.\vec{dS}_{lat}} = 2 \iint_{S_z} \vec{E}.\vec{dS}_z = 2E\pi R^2$$

$Q_{int} = \rho_0 V = \rho_0 \pi R^2 e$ (seule l'épaisseur e contient de la charge)

Ainsi $E\pi R^2 = \dfrac{\rho_0 \pi R^2 e}{\varepsilon_0}$ donc $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\rho_0 e}{\varepsilon_0} \vec{e_z}}$

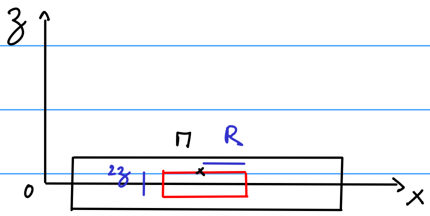
C'est un résultat remarquable car $\vec{E}$ ne dépend pas de z

Si l'épaisseur tend vers 0, on adopte une modélisation surfacique de densité surfacique de charges σ. Comme la charge dans le cylindre de Gauss ne dois pas changer on a $\sigma \pi R^2 = \rho_0 e \pi R^2$

donc $\boxed{\sigma = \rho_0 e}$ et $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e_z}}$

c'est un résultat à connaître

• M à l'interieur



Le seul changement est la charge intérieure au cylindre Q_{int}. Maintenant $Q_{int} = \rho_0 V = \rho_0 \pi R^2 2z$

Ainsi $E \pi R^2 = \dfrac{\rho_0 \pi R^2 2z}{\varepsilon_0}$ et $\vec{E} = \dfrac{2 \rho_0 z}{\varepsilon_0} \vec{e_z}$

Dans ce cas $\vec{E}$ dépend de z

7 Analogie entre le champ gravitationnel et le champ électrostatique

On a vu dans le cours de mécanique que la force gravitationnelle qu'exerce une masse m_1 sur une masse m_2 s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = -\mathcal{G}m_1m_2\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{||M_1M_2||^3} = -\mathcal{G}m_1m_2\frac{\overrightarrow{e}_{1\to 2}}{r^2} \quad \text{avec} \quad \mathcal{G} = 6.67.10^{-11}m^3.kg^{-1}.s^{-2}$$

Cette force est similaire à la force de Coulomb car :

- Elle décroit en $\dfrac{1}{r^2}$
- Elle est orienté suivant $\overrightarrow{e_r}$

À partir de cette ressemblance, on peut faire une analogie entre le champ gravitationnel $\overrightarrow{G}$ et le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$

Grandeur	Électrostatique	Gravitation
Grandeur sensible au champ	Charge q	Masse m
Force	$\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}q_1q_2\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\vert\vert M_1M_2\vert\vert^3} = q_1\overrightarrow{E}_2$	$\vec{F} = -G\, m_1 m_2 \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\vert\vert M_1M_2\vert\vert^3} = m_1\overrightarrow{\mathcal{G}_2}$
Champ	$\overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{\mathcal{G}}$
Constante caractéristique	$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
Potentiel	$V = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\dfrac{-Gm}{r}$
Énergie potentielle	qV	
Théorème de Gauss	$\oiint_{P\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{E}(P).d\overrightarrow{S}_{ext}(P) = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{P\in(S)} \overrightarrow{\mathcal{G}}\, d\overrightarrow{S}_{ext}(P) = -4\pi G M_{int}$

⚠ **Attention**

L'analogie n'est pas totale : Deux masses s'attirent, alors que deux charges de même signe se repoussent, et il n'existe pas d'équivalent d'une charge négative pour la masse.