OPTIQUE 1 :
Vers les bases de l'optique géométrique

École Centrale Pékin

Année 3

Table des matières

1 De l'électromagnétisme à l'optique géométrique 2
1.1 Notion de rayon lumineux . . . 2
1.2 Approximation de l'optique géométrique . . . 2
1.3 Grandeurs ondulatoires utiles pour l'optique . . . 3
1.4 Milieu de propagation et indice optique . . . 4

2 Fondement de l'optique géométrique 5
2.1 Chemin optique . . . 5
2.2 Principe de FERMAT . . . 7
2.3 Lois de l'optique géométrique . . . 7

3 Applications 7
3.1 Lois de SNELL - DESCARTES . . . 7
3.2 Théorème de MALUS-DUPIN . . . 9

4 Cas des milieux hétérogènes 10
4.1 Équation des rayons lumineux . . . 10

Qu'est-ce que la lumière ? Quel modèle choisir pour décrire les différents phénomènes lumineux observés ? Comment maîtriser la propagation de la lumière et l'utiliser dans la vie quotidienne ? L'optique est le domaine de la physique qui étudie la lumière sous toutes ses formes et permet de répondre à ces questions. C'est un domaine de la physique étudié depuis l'antiquité, toujours très fécond qui ne cesse de s'enrichir. Le but de ce cours est de donner les bases de l'optique et d'étudier la lumière en utilisant différents modèles.

1 De l'électromagnétisme à l'optique géométrique

1.1 Notion de rayon lumineux

L'onde électromagnétique décrite par le champ $\left(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t)\right)$ transporte une certaine énergie électromagnétique volumique à la vitesse c dans le vide :

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)$$

Ce transport est caractérisé par l'équation locale de conservation de l'énergie (sans puits ni source) :

$$\text{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = 0$$

Le vecteur $\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ est le **vecteur de Poynting** noté $\overrightarrow{\Pi}$. Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface correspond à la puissance transportée par l'onde à travers cette même surface. Le module de ce vecteur est donc une puissance par unité de surface et s'exprime en $W.m^{-2}$. La direction du vecteur de Poynting correspond donc à la direction de propagation de l'énergie électromagnétique.

À partir de ce vecteur de Poynting, on définit la notion de rayon lumineux :

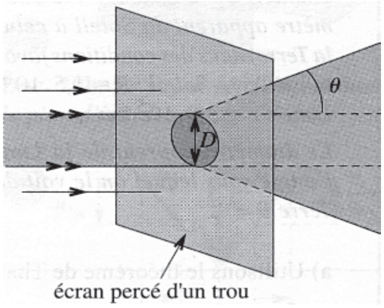
> **Définition :** On appelle **rayon lumineux** une ligne de champ du vecteur de Poynting [a]
>
> a. Rappelons qu'une ligne de champ du vecteur de Poynting est une courbe telle qu'en chacun de ses points, le vecteur de Poynting lui est colinéaire

Ainsi la puissance de l'onde électromagnétique s'écoule le long d'un rayon lumineux.

Remarque : La notion de rayon lumineux est intuitive en optique et correspond à des phénomènes observables : la représentation du Soleil, les raies de lumière visible avec la poussière, le rayon d'un laser, le faisceau lumineux d'une lampe de poche... Cela suggère bien que la lumière peut être considérée comme un ensemble de rayons lumineux.

1.2 Approximation de l'optique géométrique

On souhaite isoler expérimentalement un rayon lumineux d'un pinceau de rayons parallèles. Pour ce faire, on illumine un écran percé d'un trou circulaire de diamètre variable D avec un faisceau laser cylindrique de longueur d'onde λ. On constate qu'on ne peut obtenir un rayon lumineux car le faisceau «s'ouvre» derrière le diaphragme à mesure que l'on diminue D.



Il s'agit du phénomène de **diffraction** qui ne peut être interprété que dans le cadre d'un modèle ondulatoire : si le diamètre D diminue, alors l'angle θ augmente. L'angle θ prend des valeurs non négligeables lorsque D est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ. De manière générale, **le phénomène de diffraction se manifeste lorsque les caractéristiques des milieux traversés varient à l'échelle de la longueur d'onde.**

L'**approximation de l'optique géométrique** consiste à considérer que les caractéristiques du milieu traversé varient peu peu à l'échelle de la longueur d'onde dans le vide λ_0. On parle de «limite des courtes longueurs d'onde» de l'électromagnétisme.

1.3 Grandeurs ondulatoires utiles pour l'optique

En considérant la lumière comme une onde électromagnétique, nous pouvons définir des grandeurs optiques qui nous serons utiles tout au long de ce cours. Nous nommerons $s(x,t)$ l'onde lumineuse.

1.3.1 La période temporelle

Il existe un temps T nommé **période temporelle** ou simplement **période** tel que $s(x, t+T) = s(x,t)$ qui possède la propriété suivante :

La **période** T (en s) est une grandeur intrinsèque de l'onde : elle ne dépend pas du milieu dans lequel l'onde se propage.

On définit également la fréquence f (en Hz) et la pulsation ω (en rad.s^{-1}) telles que : $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$.

1.3.2 La période spatiale ou longueur d'onde

Il existe une longueur λ nommée **période spatiale** ou **longueur d'onde** telle que $s(x+\lambda, t) = s(x,t)$.

La **longueur d'onde** λ (unité : m) dépend du milieu dans lequel l'onde se propage.

Remarque : La **célérité** v (ou vitesse de phase) d'une onde électromagnétique dépend du milieu dans lequel elle se propage et est reliée aux paramètres précédents par la relation :

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T}} \qquad \text{(unité : m.s}^{-1}\text{)}$$

1.3.3 Spectre électromagnétique

On caractérise généralement l'onde par sa longueur d'onde. Comme cette dernière dépend du milieu de propagation, on convient de choisir le vide :

On note λ_0 la longueur de l'onde **si elle se déplaçait dans le vide :**

$\boxed{\lambda_0 = cT}$ où $c = 299\ 792\ 458\ \text{m.s}^{-1}$ désigne la célérité de la lumière dans le vide

La figure 1 représente l'ensemble du spectre électromagnétique en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0, de la fréquence notée $\nu = \dfrac{1}{T}$.

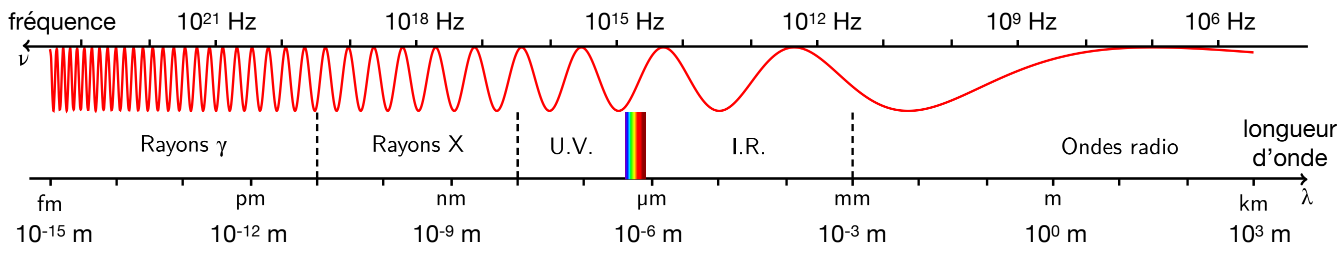


Figure 1 – Spectre électromagnétique

Dans le domaine visible, une longueur d'onde donnée correspond à une couleur déterminée. Le **domaine visible est étroit et s'étend de 400 nm (bleu/violet) à 800 nm (rouge)**.

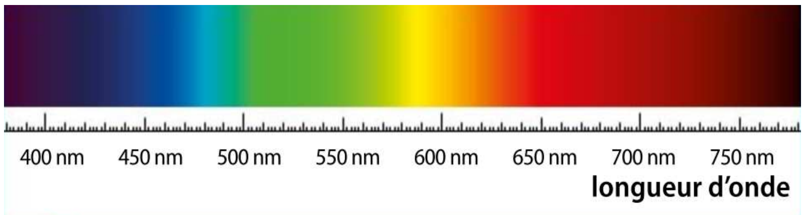


Figure 2 – Spectre de la lumière blanche

1.4 Milieu de propagation et indice optique

1.4.1 Nature du milieu de propagation

Dans le cadre de ce cours, nous considérerons les milieux de propagation comme :

- **diélectrique** : le milieu est isolant constitué de charges liées.
- **transparent** : la lumière peut se propager (il n'y a pas d'absorption)
- **linéaire** : les propriétés du milieu ne dépendent pas du champ appliqué
- **isotrope** : les propriétés physiques sont identiques dans toutes les directions de propagation

Les milieux seront généralement considérés comme homogènes (propriétés physiques identiques en tout point du milieu).

1.4.2 Indice optique

Le milieu de propagation est caractérisé par un **indice optique** :

Définition : L'**indice optique** n d'un milieu transparent linéaire et isotrope est défini par la relation :

$$\boxed{n = \frac{c}{v}} \quad (\text{ sans dimension })$$

avec c la vitesse de l'onde dans le vide et v la vitesse de l'onde dans le milieu.

Dans les milieux optiques que nous considérerons, la célérité v des ondes lumineuses est inférieure à c. Ainsi on aura toujours :

$$\boxed{n \geq 1}$$

On en déduit que les longueurs d'onde dans le milieu seront toujours plus courte que dans le vide :

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}}$$

Si le milieu n'est pas homogène, alors la vitesse v dépend du point considéré et n'est pas constante.

Ordres de grandeur :

État	Milieu	Indice
Solide	Verre de prisme type *flint* (silicates de potassium et de plomb)	1,620
	Verre de prisme type *crown* (silicates de potassium et de calcium)	1,516
	Verre de lunette	de 1,5 à 1,9
	Plexiglass	1,492
	Glace	1,309
Liquide	Eau à $20C$	1,3330
	Ethanol	1,359
Gaz	Air sec	1,000293
	Dioxyde de carbone	1,000448
	Eau	1,000249

Table 1 – Indices optiques de différentes substances

1.4.3 Milieux dispersifs

Définition : On dit qu'un milieu est **dispersif** lorsque son indice optique n dépend de la longueur d'onde dans le vide : $n = n(\lambda_0)$

Lien avec le cours de physique des ondes :
Cette définition est équivalente à celle qui a été donnée dans le cours de Physique des ondes : un milieu est dispersif si et seulement si la vitesse de phase v de l'onde dépend effectivement de la pulsation ω avec :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{cT} = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$$

La plupart des milieux dispersifs ont un indice optique qui suit la **loi de Cauchy** :

$$n(\lambda_0) = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

Cette propriété est à l'origine de la décomposition de la lumière blanche par un prisme en verre en un spectre continu. De même l'eau est un milieu dispersif : cette propriété permet d'expliquer les arc-en-ciel. Le tableau 2 permet de mettre en évidence l'évolution de l'indice de milieux dispersifs en fonction de la longueur d'onde considérée.

On remarque que des milieux sont plus dispersifs que d'autres : en fonction de l'expérience que l'on veut réaliser, on choisira un milieu peu ou très dispersif.

2 Fondement de l'optique géométrique

2.1 Chemin optique

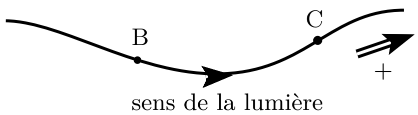
On peut définir la notion de **chemin optique** de manière équivalente par les définitions suivantes :

couleur / milieu	bleu (486,1 nm)	jaune (589,3 nm)	rouge (656,3 nm)
vide	1	1	1
air sec	1,000294	1,000292	1,000291
eau	1,3371	1,333	1,3311
Verre type *flint*	1,674	1,661	1,654
Verre type *crown*	1,521	1,515	1,513

Table 2 – Évolution de l'indice de milieux dispersifs avec la longueur d'onde

Définition : Soit un rayon lumineux quelconque dans un milieu transparent. Le **chemin optique** (BC) parcouru par la lumière entre B et C le long du rayon lumineux est l'intégrale curviligne suivante :

$$\boxed{(BC) = \int_{B, M \in \text{rayon lumineux}}^{C} n(M) ds} \qquad (\underline{\text{unité}} : \text{m})$$



<u>Remarque :</u> Il faut distinguer le sens de propagation de la lumière (notion *physique*) de l'orientation arbitraire de la courbe (notion *mathématique*). L'orientation de la courbe est nécessaire afin de pouvoir définir une **abscisse curviligne** qui est une valeur algébrique (positive ou négative). Par exemple, sur la figure 3, $s(C) - s(B) = BC > 0$ tandis que $s(A) - s(B) = BA < 0$.

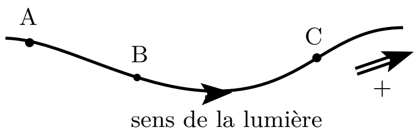


Figure 3 – Sens de propagation de la lumière/Orientation de la courbe

Il arrive souvent que l'on choisisse l'orientation arbitraire de la courbe dans le même sens que celui de propagation de la lumière.

Définition : Soit un rayon lumineux quelconque dans un milieu transparent. Le **chemin optique** (BC) parcouru par la lumière le long du rayon lumineux entre B et C est :

$$\boxed{(BC) = c \cdot t_{BC}}$$

où :

- t_{BC} désigne le temps mis par la lumière pour aller de B à C le long du rayon lumineux <u>dans le milieu</u> ;
- c désigne la vitesse de la lumière <u>dans le vide</u>.

Le chemin optique (BC) est la distance que parcourrait la lumière dans le vide pendant la durée qui lui est nécessaire pour aller de B à C dans le milieu.

Ce résultat suppose que l'on ait orienté la courbe dans le sens de propagation de la lumière.

Démonstration. Pour le montrer, il suffit de remarquer que

$$n(M) ds = \frac{c}{v(M)} ds = c \underbrace{\frac{ds}{v(M)}}_{=dt}$$

L'intégration mène à :

$$(BC) = \int_{B, M \in \text{rayon lumineux}}^{C} n(M) ds = \int_{B, M \in \text{rayon lumineux}}^{C} c dt = c t_{BC}$$

□

2.2 Principe de FERMAT

Principe de Fermat historique : «La lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que la durée du parcourt soit minimale».

Ce principe historique est aujourd'hui remplacé par le principe suivant :

Principe de Fermat actuel : Le trajet effectivement suivi par la lumière d'un point A vers un point B correspond à une valeur stationnaire du chemin optique

Remarque : ce principe est différent du principe historique tel que l'a énoncé Fermat au $17^{\text{ème}}$ siècle : le mot *minimal* a été remplacé par *stationnaire.*

2.3 Lois de l'optique géométrique

Ce principe puissant nous permet de démontrer les lois de l'optique géométrique.

2.3.1 Propagation rectiligne dans un milieu homogène

Principe de propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène et isotrope : La lumière progressant dans un milieu homogène et isotrope se propage en ligne droite.

Démonstration. Le milieu est homogène, on peut donc factoriser l'indice optique. La ligne droite est alors le chemin le plus court entre deux points (c'est donc un chemin stationnaire).
On peut aussi utiliser un point intermédiaire et montrer que si ce point n'est pas aligné la distance est plus longue. □

2.3.2 Retour inverse de la lumière

Principe de retour inverse de la lumière : Dans un milieu transparent isotrope, le trajet suivi par la lumière entre deux points A et B est indépendant du sens de propagation entre ces deux points (de A vers B ou de B vers A).

Démonstration. $(AB) = \int_{A, M \in \text{rayon lumineux}}^{B} n(M) \mathrm{d}s$, donc selon le même parcours, (BA) a le même chemin optique. Le chemin optique est indépendant du sens de propagation. Ainsi, si un parcours est stationnaire, alors le retour aussi. □

2.3.3 Indépendance des rayons lumineux

Principe d'indépendance des rayons lumineux : Les rayons lumineux sont indépendants les uns des autres : la présence d'un rayon n'influence pas la propagation des autres.

Démonstration. Les autres rayons lumineux n'interviennent pas dans le calcul du chemin optique et donc pas non plus dans la détermination du chemin stationnaire. □

3 Applications

3.1 Lois de SNELL - DESCARTES

3.1.1 Cas d'un dioptre

Définition : Le **plan d'incidence** est le plan engendré par le rayon incident et la normale au dioptre au point I où le rayon incident atteint le dioptre (cf. figure 4).

Première loi de Snell-Descartes : le rayon **réfléchi** et le rayon **réfracté** (s'il existe) sont dans le plan d'incidence.

Deuxième loi de Snell-Descartes : le rayon **incident** et le rayon **réfléchi** sont symétriques par rapport à la normale

$$\boxed{i_1 = -r}$$

Troisième loi de Snell-Descartes : le rayon **réfracté** (s'il existe) [a] est tel que

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

a. Lorsque $n_1 \sin i_1 > 1$ alors le rayon réfracté n'existe pas : c'est le phénomène de réflexion totale qui a déjà été rencontré lors de l'étude des lois de Snell-Descartes en électromagnétisme.

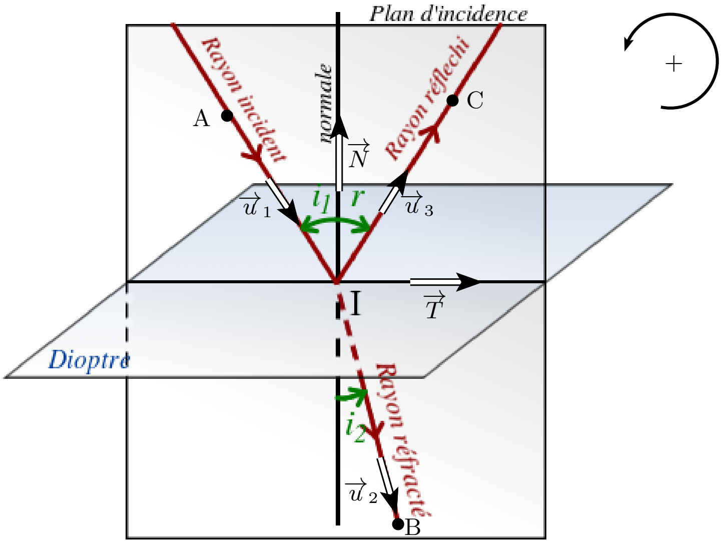


Figure 4 – Lois de Snell-Descartes pour le dioptre

Démonstration. Pour ce faire, on suppose le dioptre plan, ce qu'on peut faire en changeant l'échelle. On muni l'espace d'un repère (O, x, y, z) tel que z soit la distance au dioptre et l'axe x soit la projection normale de la droite (AB).
On a alors les coordonnées : $A(0, 0, z_A)$, $B(x_B, 0, z_B)$, $C(x_C, 0, z_C)$ et $I(x_i, y_I, 0)$
Le chemin optique (AIC) est donné par le théorème de Pythagore : $(AIC) = n_1(\sqrt{x_I^2 + y_I^2 + z_A^2} + \sqrt{(x_C - x_I)^2 + y_I^2 + z_C^2})$.
Qui est une fonction croissante de y_I. Donc d'après le principe de Fermat $y_I = 0$. En faisant le même raisonnement avec B, on prouve ainsi la première loi.

Pour la seconde loi : On a $(AIC) = n_1(\sqrt{z_A^2 + x_I^2} + \sqrt{z_A^2 + (x_C - x_I)^2})$. On dérive alors par rapport à x_I :
$\frac{\mathrm{d}(AIC)}{\mathrm{d}x_I} = \frac{n_1}{2}\left(\frac{2x_I}{\sqrt{z_A^2+x_I^2}} + \frac{2x_I - 2x_C}{\sqrt{z_A^2+(x_C-x_I)^2}}\right)$. Donc la dérivée s'annule uniquement en $x_I = \dfrac{x_C}{2}$.
Or $i_1 = \arctan\frac{0 - x_I}{z_A}$ et $r = \arctan\frac{x_C - x_I}{z_C}$ donc $r = -i$.

Pour la troisième loi : Le principe de démonstration est similaire à celui de la seconde loi. Cette fois-ci on choisi $z_B = -z_A$. Attention, on ne peut plus factoriser par l'indice optique. On obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}(AIB)}{\mathrm{d}x_I} = \left(n_1 \frac{x_I}{\sqrt{z_A^2 + x_I^2}} + n_2 \frac{x_I - x_C}{\sqrt{z_A^2 + (x_C - x_I)^2}}\right) = n_1 \sin(i_1) - n_2 \sin(i_2)\,.$$

On a donc $n_1 \cdot \sin(i_1) = n_2 \cdot \sin(i_2)$ $\square$

3.2 Théorème de Malus-Dupin

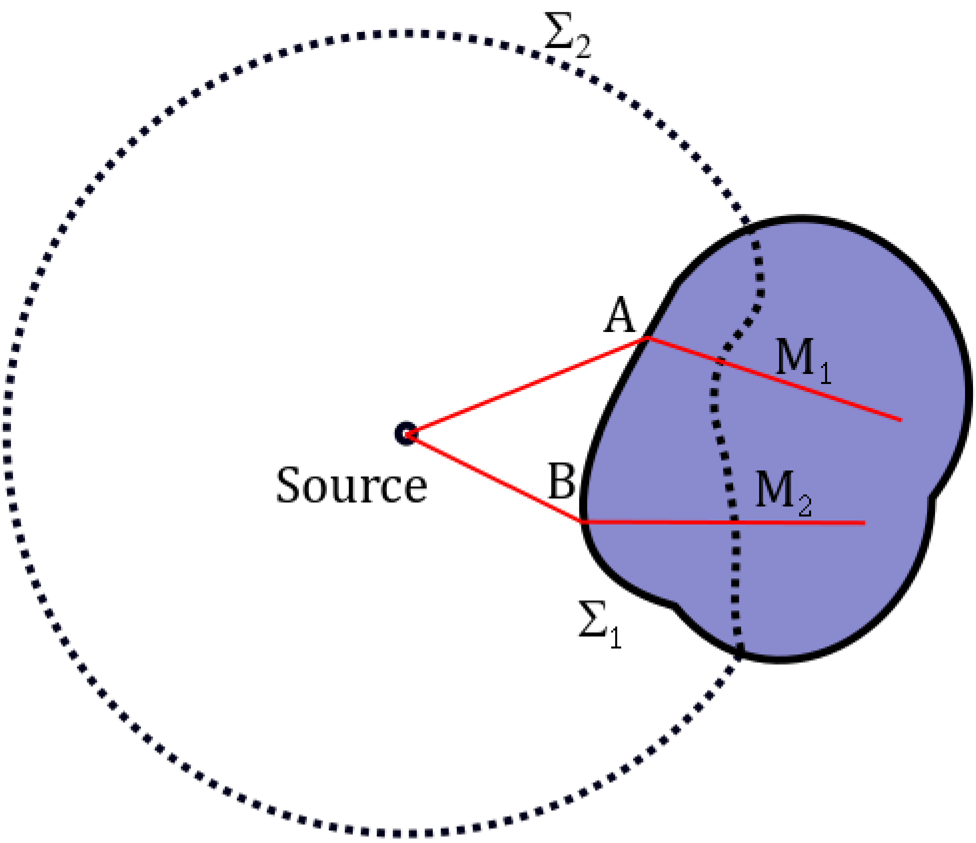
3.2.1 Rappel de la notion de surface d'onde

Définition : Soit une source lumineuse ponctuelle S. Une surface d'onde est le lieu des points M tel que le chemin optique (SM) soit constant le long d'un rayon lumineux.

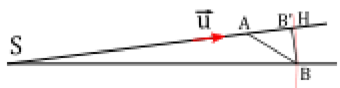
3.2.2 Malus-Dupin

Théorème de Malus-Dupin : Après un nombre quelconque de réflexion et de réfraction, les rayons lumineux issus d'une même source ponctuelle sont orthogonaux aux surfaces d'onde.

Démonstration. On considère une source S, un dioptre Σ_1 séparant un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2 et une surface d'onde Σ_2. Deux points M_1 et M_2 sur Σ_2 et A et B les points de passages respectifs sur Σ_1 des rayons issus de S passant par M_1 et M_2.



Par définition de la surface d'onde : $(SAM_1) = (SBM_2)$, et donc $(SA) - (SB) + (AM_1) - (BM_2) = 0$. On a ainsi $0 = n_1(SA - SB) + n_2(AM_1 - BM_2)$.
Pour M_1 suffisamment proche de M_2 on peut utiliser une expression vectorielle.



Posons le vecteur $\frac{\overrightarrow{SA}}{SA} \simeq \frac{\overrightarrow{SB}}{SB}$. De plus $SA = SB - AH \simeq SB + AB' = SB - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB} = SB + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{BA}$. On fait le même raisonnement pour AM_1 et BM_2 en introduisant la direction $\overrightarrow{u'}$. On obtient alors :
$0 = n_1(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{BA}) + n_2(\overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{M_2M_1} - \overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{BA})$

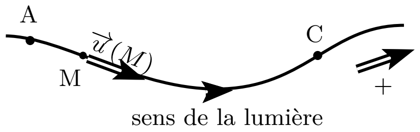
Or, d'après la formule de Snell-Descartes, $n_1(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{BA}) = n_2(\overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{BA})$, car l'angle dans le produit scalaire est l'angle entre le rayon et le dioptre, donc son cosinus est le sinus de l'angle entre le rayon et la normale. Cette expression revient donc à $n_1 \sin i_1 \cdot BA = n_2 \sin i_2 \cdot BA$. Ainsi $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$. Ce qui est vrai pour tout $\overrightarrow{M_1M_2} = 0$, donc pour tout vecteur de la surface d'onde le rayon incident est perpendiculaire à ce vecteur, ainsi le rayon incident est perpendiculaire à la surface d'onde. □

4 Cas des milieux hétérogènes

4.1 Équation des rayons lumineux

Si $s(M)$ désigne l'abscisse curviligne du point M sur le rayon lumineux, $n(M)$ l'indice optique au point M et $\overrightarrow{u}(M)$ la tangente au rayon lumineux au point M dirigée dans le sens de propagation de la lumière alors **l'équation différentielle des rayons lumineux** est :

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(n(M)\overrightarrow{u}(M)\right) = \overrightarrow{grad}\, n(M)}$$



Interprétation : si le champ des indices optiques $\{n(M) \text{ où } M \in \mathcal{D}\}$ (avec $\mathcal{D}$ le domaine considéré) est connu et si on connait la direction $\overrightarrow{u}(M_0)$ du rayon lumineux passant par M_0, on peut en déduire l'équation du rayon lumineux passant en $M_0 \in \mathcal{D}$ avec la direction $\overrightarrow{u}(M_0)$ dans le domaine $\mathcal{D}$.