Alors on continue avec le chapitre 4. Donc l'objectif du chapitre 4, c'est d'arriver justement à trouver $s(t)$ pour une entrée donnée. Donc c'est ce qu'on avait appelé les réponses temporelles. Alors pardon, non. L'objectif est de déterminer $s(t)$, mais on n'en est pas encore aux réponses temporelles, on en est aux outils mathématiques qui vont nous permettre ensuite de trouver $s(t)$. Donc ce sont les outils mathématiques qu'il va nous falloir introduire pour trouver $s(t)$. Donc pour ça, eh bien je rappelle quel est l'objectif. J'ai un système qui est un système linéaire continu invariant à une entrée et une sortie. Cette entrée, je suppose qu'elle est connue, et je cherche à déterminer la sortie. Je sais que le système est linéaire continu invariant, donc on a montré que, si le système est linéaire, continu et invariant, la relation qui existe entre l'entrée et la sortie, c'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n. Et ce qu'on a déjà dit, c'est que si l'équation est d'ordre 1, vous savez résoudre, si l'équation est d'ordre 2, vous savez résoudre, si l'équation est d'ordre 3, 4, 5, 6, 7, vous ne savez plus résoudre. Donc il nous faut une autre méthode qui nous permette de trouver s connaissant e quelle que soit la valeur de n. Et donc pour ça, la méthode, eh bien je vous l'avais déjà donnée, c'est : à partir de l'équation différentielle, on utilise la transformée de Laplace pour trouver ce qu'on appelle la fonction de transfert. La fonction de transfert, c'est $H(p)$ qui est définie comme $\dfrac{S(p)}{E(p)}$: $S(p)$, c'est l'image de $s(t)$, $E(p)$, c'est l'image de $e(t)$, par la transformée de Laplace. Ensuite, j'applique la transformée de Laplace à l'entrée, et j'en déduis l'image $E(p)$ de $e(t)$. Si je connais $E(p)$, si je connais $H(p)$, je peux en déduire $S(p)$: $S(p) = H(p)E(p)$. Et une fois que j'ai $S(p)$, je reviens en arrière en appliquant la transformée de Laplace inverse, plus d'autres choses puisqu'on va revoir au chapitre 5 qu'il nous faut en plus en général décomposer en éléments simples. Donc tout ça, c'est ce qu'on veut mettre en place pour, à partir d'une entrée qu'on connaît, déterminer l'expression de la sortie du système. Maintenant la question, c'est qu'est-ce que c'est que la transformée de Laplace ?

Alors la transformée de Laplace d'une fonction f continue est définie comme l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ de $f(t)e^{-pt}dt$. p, je vous le rappelle, c'est $\sigma + j\omega$, donc c'est un nombre complexe, c'est ce qu'on appelle la variable symbolique de Laplace. Et je vous rappelle que seuls les Français la notent p, dans n'importe quel livre anglais ou chinois, elle sera notée s. Donc ça, c'est la transformée de Laplace qu'on appelle transformée de Laplace bilatérale, parce qu'on intègre de $-\infty$ à $+\infty$, donc ça veut dire pour les réels négatifs et pour les réels positifs. Donc on intègre des deux côtés, c'est pour ça qu'on l'appelle transformée de Laplace bilatérale. Ce qu'on avait démontré en cours, c'est que pour que le système soit causal, il faut que les fonctions soient causales. Et qu'est-ce que c'est qu'une fonction causale ? Eh bien ça veut dire que, si je prends une fonction $f(t)$, f sera nulle pour tous les temps strictement négatifs. Donc pour qu'un système soit causal, toutes les fonctions qu'on considère doivent être nulles pour les instants strictement négatifs. Ca veut dire que si je prends une fonction causale ici, dans mon intégrale bilatérale, eh bien ça veut dire que l'intégrale de $-\infty$ à 0 sera nulle. Et ça veut dire que ma transformée de Laplace devient : transformée de Laplace de f égale somme de 0 à $+\infty$ de $f(t)e^{-pt}dt$. Alors ici, j'ai indiqué 0. Dans les livres, vous trouverez trois versions. Dans la plupart des livres, vous verrez 0, dans quelques livres, vous trouverez 0^+, et dans très peu de livres, vous trouverez 0^-. Et la vraie définition, c'est 0^- puisque vous allez voir que tous les théorèmes, du moins on a vu par le passé que tous les théorèmes, de la transformée de Laplace sont vrais si ici j'ai 0^- et non pas 0 ou 0^+. Donc notamment, le théorème de la valeur finale et le théorème de la valeur initiale, on ne peut les démontrer que si vous avez un 0^- ici en borne inférieure de l'intégrale. Donc ça, c'est la transformée de Laplace unilatérale.

Bon, alors maintenant qu'on a revu la définition, on va revoir les propriétés de la transformée de Laplace. Alors les propriétés. La première plus importante, qu'il faut que vous sachiez par cœur, c'est qu'elle est linéaire : ça veut dire que la transformée de Laplace de $\lambda f + \mu g$, c'est $\lambda \mathscr{L}[f(t)] + \mu \mathscr{L}[g(t)]$. Deuxième plus importante : elle est bijective. Alors pourquoi le fait qu'elle soit bijective, c'est la deuxième plus importante ? Parce que ça implique qu'il existe une transformée de Laplace inverse (ou réciproque). C'est ce qui va nous permettre de revenir en arrière ici. Donc elle est linéaire, elle est bijective.

Troisième plus importante : c'est ce qui justifie le fait que l'on applique la transformée de Laplace à une équation différentielle. Parce que la question, c'est : pourquoi je n'applique pas autre chose ? Pourquoi la transformée de Laplace est particulièrement adaptée aux équations différentielles ? Pour ça, supposons que la transformée de Laplace de $f(t)$, je la note $F(p)$. Si maintenant je cherche la transformée de Laplace de $\dot{f}(t)$ en fonction de $F(p)$. J'applique la définition : la définition me dit que la transformée de Laplace de $\dot{f}(t)$ est la somme de 0^- à $+\infty$ de $\dot{f}(t)e^{-pt}dt$. J'intègre par parties, donc je pose $u' = \dot{f}(t), v = e^{-pt}$, ça veut dire que j'ai $u = f(t)$ et j'ai $v' = -pe^{-pt}$. Donc tout ça, ça me donne que la transformée de Laplace de $\dot{f}$, c'est uv donc c'est $f(t)e^{-pt}$ que j'évalue entre 0^- et $+\infty$, moins l'intégrale de uv', donc avec le $-$ qui est ici, c'est $+p$ intégrale de 0^- à $+\infty$ de $f(t)e^{-pt}dt$. Alors ce que j'ai là : ça c'est $F(p)$, ça c'est p, donc j'ai $pF(p)$. Et ensuite, ce que j'ai là, eh bien j'ai $f(t)e^{-pt}$ quand t tend vers l'infini : on avait vu que pour que la transformée de Laplace soit définie, pour qu'elle converge, il faut que f soit d'ordre exponentiel, ça veut dire qu'à l'infini, il faut que l'exponentielle domine par rapport à $f(t)$. Et comme l'exponentielle tend vers 0, ça veut dire que $f(t)e^{-pt}$ tend vers 0 en l'infini. Donc en l'infini, ça vaut 0, en 0^-, l'exponentielle vaut 1 et donc j'ai $f(0^-)$: donc j'ai $pF(p) - f(0^-)$. Donc ça c'est pour la transformée de Laplace de la dérivée première. Si je passe à la dérivée seconde : donc si je veux maintenant la transformée de Laplace de $\ddot{f}$. Alors là, vous avez deux méthodes. Soit vous appliquez la définition, donc c'est l'intégrale de 0^- à $+\infty$ de $\ddot{f}(t)e^{-pt}dt$: vous pourrez calculer ça, mais il faut que vous fassiez deux intégrations par parties. Ou alors vous êtes malin. Et être malin, ça veut dire : $\ddot{f}$, c'est quoi ? C'est $\dot{f}$ que je dérive une fois, c'est la dérivée première de $\dot{f}$. Bon, et ensuite, j'applique la formule que je viens de trouver juste avant à $\dot{f}$: donc c'est $pF(p)$, donc c'est $p\mathscr{L}[\dot{f}(t)]$, moins $\dot{f}(0^-)$. Et la transformée de Laplace de $\dot{f}$, c'est $pF(p) - f(0^-)$. Donc c'est $p^2F(p) - pf(0^-) - \dot{f}(0^-)$. Donc je passe à la dérivée troisième. Alors transformée de Laplace de $\dddot{f}$. Alors là, vous avez trois méthodes. Soit vous appliquez la définition, donc somme de 0^- à $+\infty$ de $\dddot{f}(t)e^{-pt}dt$: vous pourrez calculer, mais en faisant trois intégrations par parties. Ou alors, eh bien vous dites que $\dddot{f}$, c'est la dérivée première de $\ddot{f}$, et vous appliquez cette relation-là. Ou alors vous êtes encore plus malin, et vous dites que la dérivée troisième de f, eh bien en fait c'est $\dot{f}$ que vous dérivez deux fois. Et ensuite vous appliquez la formule qu'on vient juste de trouver pour la transformée de Laplace de $\ddot{f}(t)$. Donc la transformée de Laplace de $\ddot{f}$, c'est p^2, mais appliqué à $\dot{f}$, donc c'est p^2 fois $\mathscr{L}[\dot{f}(t)]$, qui vaut $pF(p) - f(0^-)$, moins $p\dot{f}(0^-)$ moins $\ddot{f}(0^-)$. Et donc ça vous donne au final $p^3F(p) - p^2f(0^-) - p\dot{f}(0^-) - \ddot{f}(0^-)$. Et une fois que j'ai ça, eh bien je peux généraliser. Si je généralise à la dérivée n-ième : la dérivée n-ième de f, quand j'en prendrai la transformée de Laplace, ça va me donner $p^nF(p)$ et ensuite je vais avoir moins une somme de termes, et cette somme de termes, ce sera une somme de $p^k f^{(n-1-k)}(0^-)$ pour k allant de 0 à $n-1$. Donc ça veut dire que je vais trouver n termes et, dans ces n termes, j'aurai $f(0^-), \dot{f}(0^-), \ddot{f}(0^-)$, jusqu'à $f^{(n-1)}(0^-)$. Donc ça veut dire que ce que je vais trouver là, ce sont les n conditions initiales.

Ce qui est normal, puisque ce que je suis en train de faire, c'est de résoudre l'équation différentielle, et l'on a dit que l'équation différentielle est d'ordre n, ça veut dire que pour trouver une solution unique, il vous faut bien n conditions initiales. Donc j'ai deux parties ici : j'ai une partie qui est très sympathique, puisque j'ai un terme qui est en fait la transformée de Laplace de f fois p^n, et j'ai un terme qui m'embête un peu, parce que j'ai quand même une somme de n termes qui sont mes conditions initiales. Donc ce que j'aimerais bien faire, c'est garder uniquement le terme de gauche, c'est-à-dire $p^nF(p)$. Donc pour faire ça, on fait une hypothèse, donc cette hypothèse, je vous rappelle, c'est ce qu'on appelle les conditions initiales de Heaviside, ou les conditions initiales nulles, et donc ça consiste à dire que je vais prendre $f(0^-) = \dot{f}(0^-) = \ddot{f}(0^-) = \cdots = f^{(n-1)}(0^-) = 0$. Si je fais ça, eh bien ça veut dire que toute ma somme devient égale à 0, et qu'il reste uniquement le terme $p^nF(p)$. Donc si j'applique cette hypothèse-là, si je dis que toutes mes n conditions initiales sont nulles, j'obtiens une relation qui est très très simple, et cette relation, c'est que la transformée de Laplace de $f^{(n)}(t)$, c'est $p^nF(p)$. Alors sachant qu'en plus, la relation que vous avez à droite était valable pour k allant de 0 à $n-1$, donc ça veut dire qu'il fallait que n soit entier, mais en plus entier non nul. Comme la relation que vous avez à gauche, on l'a trouvée à partir de celle de droite, ça veut dire qu'elle est valable quel que soit n entier naturel non nul, mais en plus si vous l'appliquez à $n = 0$, à gauche, j'ai la transformée de Laplace de f, à droite j'ai $F(p)$: donc ça veut dire que cette relation est vraie quel que soit n entier naturel. Et donc ça, c'est ce qui justifie pourquoi il est intéressant d'appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle écrite ici, puisque l'équation différentielle fait intervenir uniquement des dérivées et chacune de ces dérivées, quand je vais en prendre la transformée de Laplace, va me donner une puissance de p multipliée par la transformée de Laplace de l'entrée ou de la sortie. Donc je vais obtenir des polynômes. Donc c'est l'intérêt de la transformée de Laplace pour résoudre une équation différentielle.

Dernière propriété avant de passer aux théorèmes, donc les théorèmes, on les verra la prochaine fois. Dernière propriété : on a vu la dérivation, maintenant on va regarder ce qui se passe quand on intègre. Donc si la transformée de Laplace de $f(t)$, c'est $F(p)$, j'aimerais bien connaître la transformée de Laplace de l'intégrale, ou de la primitive qui s'annule en 0, de la fonction f. Alors pour trouver ça, il faut que vous vous rappeliez d'un résultat qu'on avait vu en cours que je ne vous ai pas rappelé aujourd'hui, qui est le produit de convolution. Et pour ça, je vais aussi avoir besoin de l'échelon $u(t)$ qui est la fonction qui vaut 1 si t est positif, qui vaut 0 sinon. Ca, c'est l'échelon unitaire de Heaviside : on reviendra dessus dans le prochain cours. Donc ce que je peux dire, c'est que la transformée de Laplace de l'intégrale de 0 à t de $f(u)$, c'est la même chose que l'intégrale de 0 à t de $f(\tau)u(t-\tau)d\tau$. Et cette intégrale-là, c'est le produit de convolution, qu'on avait vu justement au chapitre 4. Donc on avait vu au chapitre 4 qu'on pouvait définir $f * g(t)$, qui est le produit de convolution, comme l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ de $f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Ca, c'est la définition du produit de convolution. Et on avait dit que, pour f et g causales, eh bien ça réduisait l'intégrale à une intégrale de 0 à t, donc intégrale de 0 à t de $f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Donc ce que j'ai à gauche ici, eh bien ce n'est rien d'autre que $f * u(t)$: c'est le produit de convolution de f et u. Et pourquoi on avait introduit le produit de convolution ? Parce que la transformée de Laplace de l'intégrale de $f(u)du$, ça devient la transformée de Laplace du produit de convolution entre f et u, et la transformée de Laplace d'un produit de convolution, c'est le produit des transformée de Laplace. Ca veut dire que c'est égal à la transformée de Laplace de f fois la transformée de Laplace de u. La transformée de

Laplace de f, c'est $F(p)$, la transformée de Laplace de u, on l'a vue mais on le reverra au prochain cours, c'est $\dfrac{1}{p}$: ça veut dire que la transformée de Laplace de l'intégrale, c'est $\dfrac{F(p)}{p}$. Donc si j'intègre une fois, je divise par p, si j'intègre deux fois, je divise par p^2, et ainsi de suite. Donc vous voyez là un premier résultat qu'on avait déjà vu : quand je dérive dans le domaine temporel, ça revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace, donc si je dérive n fois, je multiplie par p n fois ; et inversement, si j'intègre dans le domaine temporel, je divise par p dans le domaine de Laplace. On arrête là pour aujourd'hui, pour les propriétés. La prochaine fois, on continue les révisions avec les théorèmes vérifiés par la transformée de Laplace, les réponses temporelles, les réponses fréquentielles. Voilà, bonne fin de journée, et à bientôt.