Analyse 1

École Centrale de Pékin

Équipe de Mathématiques du Cycle Préparatoire

Avant-propos

Notice : vous trouverez au fil du texte différents symboles et types d'écritures. Chacun donnant une indication particulière pour la lecture du cours.

— Le symbole "☡", situé dans la marge, signifie que le point correspondant est un point délicat (il s'agit d'un *virage dangereux*). Plus ce symbole est gros, plus le point en question est subtil.
— Le symbole "◀", situé dans la marge, signifie qu'un point technique dans le fil du cours n'a pas été totalement explicité. Il s'agit d'un choix volontaire afin d'obliger l'étudiant à écrire entièrement le détail du point manquant. Si ce point n'est pas détaillé, c'est qu'il ne *doit pas* présenter de difficulté.
— Le symbole "□" est un marqueur signifiant la fin d'une démonstration.
— Un mot est écrit **en gras** s'il fait l'objet d'une définition mathématique précise qu'il conviendra d'identifier clairement.

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

Dans ce chapitre, il ne s'agit pas de « construire » les nombres réels. Il ne s'agit pas non plus de donner la liste exhaustive des axiomes permettant une définition rigoureuse des nombres réels. Mais il s'agit de *dégager les propriétés fondamentales* des nombres réels et d'apprendre à manipuler rigoureusement ces propriétés. Ainsi les objectifs principaux de ce chapitre sont :

1. la manipulation précise de la *borne supérieure* dans $\mathbb{R}$;
2. l'utilisation rigoureuse du caractère archimédien à travers la l'emploi de la *partie entière* et les démonstrations de *densité*.

Les mécanismes que nous allons introduire dans ce chapitre (notamment la propriété de la borne supérieure) seront au coeur de tout le cours d'analyse et d'une partie du cours d'algèbre de l'intégralité du cycle préparatoire. Ainsi ce chapitre sera à travailler par l'étudiant de manière particulièrement approfondie.

Table des matières du chapitre

I Le corps des réels

1. Présentation

Lorsque l'on a cherché à mesurer une longueur, une fois choisie une unité, on a d'abord utilisé les *nombres entiers*, soit l'ensemble que nous notons :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Pour améliorer cette mesure, on s'est servi d'une portion de cet unité, ce qui introduit des nombres s'écrivant comme quotients d'entiers (cf. fig. 1.1), ce que les Grecs appelaient *raison* ($\lambda o\gamma o\varsigma$), et que nous appelons aujourd'hui *nombre rationnel*, soit l'ensemble que nous notons :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

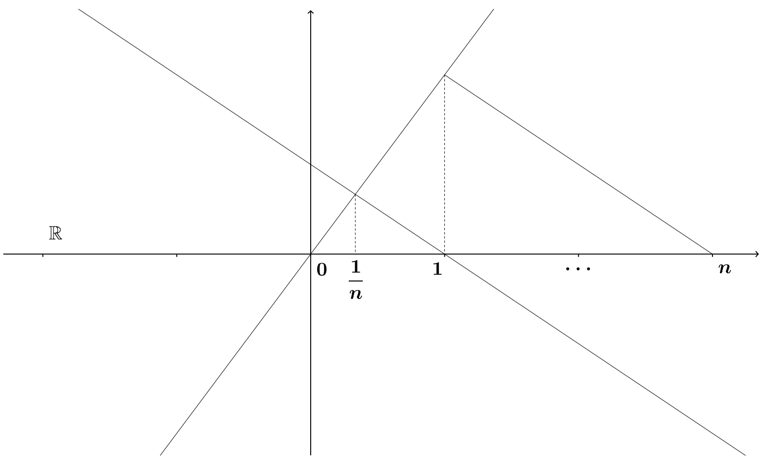


FIGURE 1.1 – Représentation de la droite réelle et d'une « portion d'entier ».

Lorsque l'école pythagoricienne s'est posé le problème de pouvoir mesurer toute longueur à l'aide de quotients d'entiers, elle découvrit que la longueur de la diagonale d'un carré ne peut être égale au quotient de deux entiers, lorsqu'on prend comme unité de longueur le côté du carré (cf. fig. 1.2). Dès l'antiquité, les nombres rationnels se sont donc montrés insuffisants pour décrire la réalité du monde. Cette insuffisance de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, peut de façon moderne, s'exprimer de trois façons différentes :

— Il n'existe pas de rationnel x vérifiant $x^2 = 2$. *Pour démontrer ce fait, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers naturels p et q tels que*

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Quitte à diviser les entiers p et q autant de vois qu'il est nécessaire par 2, on peut supposer p ou q impairs. Or l'égalité $p^2 = 2q^2$ prouve que p^2 (et par la suite p) est pair. On a donc $p = 2p'$ mais par suite $q^2 = 2p'^2$, ce qui prouve de même que q est pair et cela contredit notre hypothèse.

— Sur $\mathbb{Q}$, la fonction continue $f : x \mapsto x^2 - 2$ prend des valeurs positives et des valeurs négatives mais elle ne s'annule pas, ce qui ne paraît pas "naturel".

— L'ensemble $X = \left\{x \geq 0 \;\middle|\; x^2 \leq 2\right\}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (comme nous le verrons par la suite).

— Cette insuffisance des nombres rationnels se manifeste aussi par exemple dans le fait que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

sont telles que :
— u est croissante ;
— v est décroissante à partir du rang 1 ;
— la différence $v_n - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
mais on peut montrer qu'elles ne convergent vers aucun rationnel. Nous montrerons plus tard, dans le chapitre sur les suites, que ces deux suites convergent vers le nombre e.

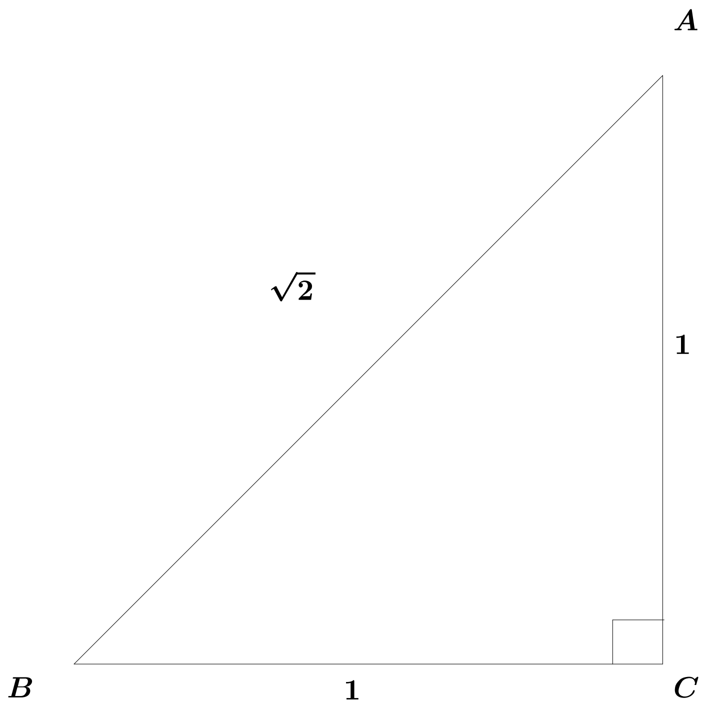


Figure 1.2 – Triangle rectangle dont l'hypoténuse est irrationnelle.

Pour remédier à toutes ces insuffisances, on a introduit le corps[1] $\mathbb{R}$ des nombres réels,

- qui contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels comme sous-corps,
- dans lequel toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure (nous définierons précisément ce point par la suite).

Comme $\mathbb{Q}$ ne vérifie par cette propriété, l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est stricte. Les éléments de $\mathbb{R}$ qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés *irrationnels*.

2. Définition

Nous admettrons l'existence d'un tel ensemble $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes que nous définissons et développerons dans ce chapitre :

Théorème 1
Il existe un ensemble, noté $\mathbb{R}$, qui est un corps totalement ordonné et vérifiant la propriété de la borne supérieure.

Comme nous l'avons dit, nous admettrons tout ce qui concerne la construction des nombres réels, c'est-à-dire tout ce qui concerne la preuve de ce théorème. Ainsi, nous admettrons ici, sans trop nous poser de questions, que $\mathbb{R}$ est un ensemble qui contient les ensembles usuels de nombres que sont :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

L'année prochaine, durant le cours d'algèbre, nous donnerons un sens général à la structure algébrique de $\mathbb{R}$. Pour l'instant, nous retiendrons que $\mathbb{R}$ possède deux *opérations* : l'addition et la multiplication[2] $+$ et $\times$. Ces deux opérations *prolongent* les opérations usuelles de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. Elles vérifient les propriétés fondamentales suivantes :

1. ces opérations sont *associatives*, i.e. :

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x+y)+z = x+(y+z) \quad \text{et} \quad x \times (y \times z) = (x \times y) \times z.}$$

2. ces opérations sont *commutatives*, i.e. :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x+y = y+x \quad \text{et} \quad x \times y = y \times x.}$$

3. ces opérations possèdent un *élément neutre* : 0 est neutre pour $+$, i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+0 = 0+x = x$$

et 1 est neutre pour $\times$, i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \times 1 = 1 \times x = x.$$

On notera $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. La notion de «*corps*» sera définit en toute généralité dans le cours de mathématique de l'année prochaine.
2. Par souci de simplicité, cette opération de multiplication se note souvent par un point, voire même parfois ne se note pas du tout. Ainsi $x \times y$ s'écrira parfois $x \cdot y$ ou xy.

4. tout nombre réel x possède un inverse pour $+$. Cet inverse est noté $-x$ et vérifie :

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

De même, tout nombre réel x non nul possède un inverse pour $\times$. Cet inverse est noté $\frac{1}{x}$ ou x^{-1} et vérifie :

$$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1.$$

5. enfin l'opération $\times$ est *distributive* sur l'opération $+$:

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \times (y+z) = x \times y + x \times z.}$$

En outre, $\mathbb{R}$ est aussi muni d'une *relation d'ordre* que l'on note $\leqslant$. Là encore, cette relation prolonge les relations d'ordre usuelles de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. Cette relation vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

1. cette relation est *totale*, i.e. :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x.}$$

2. cette relation est *compatible* avec l'addition et la multiplication dans le sens suivant :

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leqslant y \implies x+z \leqslant y+z}$$

et

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leqslant y \text{ et } 0 \leqslant z \implies xz \leqslant yz.}$$

À nouveau ici, nous étudierons de manière beaucoup plus générale la notion de relation d'ordre dans le cours d'algèbre de l'an prochain.

Mentionnons enfin que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nous noterons :
— $x \geqslant y$ pour $y \leqslant x$;
— $x < y$ pour $x \leqslant y$ et $x \neq y$;
— $x > y$ pour $y \leqslant x$ et $x \neq y$.

II Notions liées à l'ordre

Nous commençons, dans cette première partie d'étude des réels, par nous intéresser aux propriétés fondamentales qui ressortent de l'utilisation de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

1. Partie positive & valeur absolue

Grâce à la relation d'ordre $\leqslant$, nous pouvons définir les ensembles $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-$, et $\mathbb{R}_-^*$ respectivement par :

$$\mathbb{R}_+ = \left\{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\right\}, \quad \mathbb{R}_+^* = \left\{x \in \mathbb{R},\ x > 0\right\},$$

$$\mathbb{R}_- = \left\{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 0\right\}, \quad \mathbb{R}_-^* = \left\{x \in \mathbb{R},\ x < 0\right\}.$$

Et nous dirons qu'un nombre réel x appartenant à l'un de ces quatre cas respectifs est **positif,** resp. **strictement positif,** resp. **négatif,** resp. **strictement négatif.**

Ainsi nous pouvons définir la **valeur absolue** d'un nombre réel x par :

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est positif} \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Il s'en suit que la fonction « valeur absolue » :

$$\begin{array}{rccc} |\cdot| : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

possède le graphe dessiné en figure 1.3.

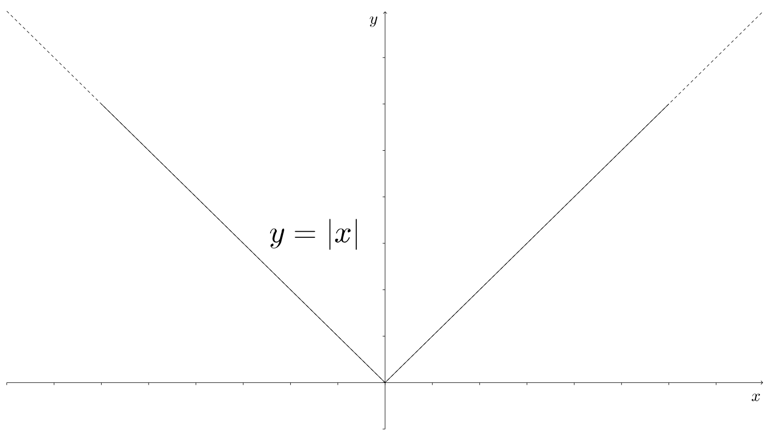


FIGURE 1.3 – Graphe de la fonction « valeur absolue »

Parmi les différentes propriétés de cette fonction, les suivantes se révéleront remarquablement utiles :

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geqslant 0.$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \iff x = 0.$

(3) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x| = |y| \iff x = \pm y.$

(4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad |x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y.$

(5) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| = |x|\,|y|$

(6) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Toutes ces petites propriétés élémentaires se démontrent de la même façon : en distinguant les cas positifs des cas négatifs. En d'autre termes, dès que nous manipulerons des valeurs absolues, la méthode sera la plupart du temps la même :

Méthode 1 — ***Manipulation de valeurs absolues.*** *On procédera par distinction de cas en commençant par éliminer toutes les valeurs absolues des calculs, expressions ou équations qui en comportent.*

On notera enfin une conséquence très utile de l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big| |x| - |y| \Big| \leqslant |x-y|}$$

Preuve — Prenons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a par inégalité triangulaire

$$|x| = |x-y+y| \leqslant |x-y| + |y|$$

et

$$|y| = |y-x+x| \leqslant |x-y| + |x|\,.$$

Donc :

$$\pm\left(|x| - |y|\right) \leqslant |x-y|\,.$$

Ce qui fournit l'inégalité cherchée. □

Remarque 1 — *Nous utiliserons souvent la valeur absolue pour traduire le concept de distance d'un réel à un autre, ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nous définissons la distance de x à y comme :*

$$d(x,y) = |x-y|\,.$$

2. Borne supérieure

Afin de comprendre précisément la propriété de la borne supérieur dans $\mathbb{R}$, il est nécessaire d'introduire un peu de vocabulaire.

§ *1. Terminologie* — Donnons-nous X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1
*Nous dirons que X est **majoré** par un réel M si*

$$\forall x \in X, \quad x \leqslant M.$$

On dira dans ce cas que X *est majoré par* M ou que M *est un majorant de* X ou encore que M *majore* X. On dira aussi que X est un ensemble *majoré* si un tel M existe. On notera $\mathscr{M}_X$ l'ensemble des majorants de X. Donc :

$$M_X = \Big\{ M \in \mathbb{R} \;\big/\; \forall x \in X,\ x \leqslant M \Big\}.$$

Ainsi X est majoré si et seulement si M_X est non vide.

Entièrement de même :

Définition 2
*X est **minoré** par un réel m si*

$$\forall x \in X, \quad x \geqslant m.$$

On dira dans ce cas que X *est minoré par* m ou que m *est un minorant de* X ou encore que m *minore* X. On dira aussi que X est un ensemble *minoré* si un tel m existe. On notera ${}_X$ l'ensemble des minorants de X. Donc :

$$m_X = \Big\{ m \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in X,\; x \geqslant m \Big\}.$$

Ainsi X est minoré si et seulement si m_X est non vide.

DÉFINITION 3
*X est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\forall x \in X, \quad |x| \leqslant M.$$

Ainsi, si une partie X est bornée, alors elle est majorée et minorée. Réciproquement, si X est majorée par M et minorée par m, alors $\forall x \in X$ on a :

$$|x| \leqslant \max(|m|, |M|).$$

Et donc X est bornée.

DÉFINITION 4
*X possède un **maximum** [resp. **minimum**] s'il existe $x_0 \in X$ tel que x_0 majore X [resp. minore X]. Dans ce cas, on notera ce maximum $\max(X)$ [resp. ce minimum $\min(X)$].*

Notons que si un tel maximum, resp. minimum existe, alors il est unique. En effet, si X possédait par exemple deux maximum M_1 et M_2 alors $M_1 \leqslant M_2$ et $M_2 \leqslant M_1$.

EXEMPLES 1

1. *Prenons $X = \{1, 2\}$. X est majoré par tout réel x tel que $x \geqslant 2$. Et 2 est un majorant de X qui appartient à X, c'est donc le maximum de X.*
2. *$\mathbb{Z}$ n'est ni majoré, ni minoré.*
3. *Prenons $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. X est minoré par 0 par exemple. Mais X n'a pas de minimum. En effet, si X possédait un minimum, il existerait $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0}$ minore X, mais $\frac{1}{n_0+1} < \frac{1}{n_0}$ ce qui contredirait la définition de ce minimum. Cependant on se rend bien compte dans cet exemple que 0 est « une sorte de minimum » de X. Il s'agit de la borne inf de X que nous allons définir au paragraphe suivant.*

Comme nous venons de le voir dans l'exemple qui précède, toute partie non vide de $\mathbb{R}$ ne possède pas nécessairement de minimum ou de maximum. En revanche, nous avons le résultat intuitif et très utile suivant :

PROPOSITION 1
Toute partie finie et non vide de $\mathbb{R}$ possède un maximum et un minimum.

Preuve — Si X est une partie non vide et fini, nous pouvons la numéroter de manière croissante :

$$X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$x_1 = \min(X) \quad \text{et} \quad x_n = \max(X).$$

□

§ *2. Position du problème* — Si toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ ne possède pas nécessairement de maximum, elle possède cependant ce que l'on va appeler une *borne supérieure.* Le problème de l'existence d'un tel réel constitue le résultat le plus important sur les nombres réels. Il ne s'agit pas d'une propriété que nous démontrerons dans ce cours puisqu'elle provient directement de la construction des nombres réels. Pour cette raison, cette propriété est souvent appelée « *l'axiome de la borne supérieure* ».

Afin d'étudier précisément ce problème, commençons par définir les notions de borne supérieure et de borne inférieure.

Définition 5

*Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Nous dirons que M est une **borne supérieure** [resp. **borne inférieure**] de X si :*

1. *M est un majorant [resp. minorant] de X ;*
2. *pour tout M' dans $\mathbb{R}$ qui est un autre majorant [resp. minorant] de X, alors $M \leqslant M'$ [resp. $M \geqslant M'$].*

En d'autre terme, la borne supérieure de X est le « meilleur » des majorants de X au sens où tout autre majorant de X est supérieur, ou encore au sens où c'est le plus petit des majorants de X. Nous noterons la borne supérieure de X, si elle existe, $\sup(X)$ et de même $\inf(X)$ pour la borne inférieure. La traduction formelle de ce que nous venons de dire consiste à utiliser les ensembles M_X et m_X. Ainsi (sous l'hypothèse d'existence des bornes sup et inf) :

$$\boxed{\sup(X) = \min\left(M_X\right) \qquad \text{et} \qquad \inf(X) = \max\left(m_X\right).}$$

Il faut bien comprendre que la notion de borne sup ou inf prolonge la notion de plus grand ou plus petit élément au sens suivant.

Proposition 2

Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Si X possède un maximum M [resp. minimum m], alors ce maximum [resp. minimum] est la borne supérieure [resp. inférieure] de X. Autrement dit :

$$M = \max(X) = \sup(X) \quad \left[\ \textit{resp.}\ \ m = \min(X) = \inf(X)\right].$$

Preuve — Supposons que M est le maximum de X (où X est une partie non vide de $\mathbb{R}$), alors M est un majorant de X et si L est un autre majorant de X, alors L majore tous les éléments de X dont M (car $M \in X$). Donc $M \leqslant L$ ainsi M est la borne supérieure de X. □

Exemples 2

1. *L'ensemble $X = \mathbb{R}_-^*$ possède 0 pour borne supérieur mais ne possède pas de maximum. En effet, 0 est un majorant. Si M est un majorant de X, et si $M < 0$, alors $x = \frac{M}{2} \in X$ et $M < x$ ce qui est impossible. Nécessairement $M \geqslant 0$. Donc 0 est bien le meilleur majorant de X. Comme $0 \notin X$, 0 n'est pas le maximum de X. Et X n'a pas de maximum.*
2. *L'ensemble $X = \mathbb{R}_-$ possède 0 pour maximum. Donc 0 est le sup de X.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la propriété clé de l'ensemble des nombres réels :

THÉORÈME 2 (de la borne supérieure)
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

On déduit naturellement du théorème précédent que :

COROLLAIRE 1
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Preuve — Soit X une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Posons $X' = \{-x, x \in X\}$. Comme X est minorée, X' est majorée et donc d'après la propriété de la borne supérieure, on en déduit que X' possède un sup que nous noterons M'. Posons alors $M = -M'$ et montrons que $M = \inf(X)$. Pour ce faire, nous montrons successivement les deux propriétés qui définissent l'inf :

1. M minore X. En effet, si $x \in X$, on a : $-x \leqslant M'$ et donc $x \geqslant M$.
2. si L est un autre minorant de X, alors $-L$ est un autre majorant de M' et donc par définition $M' \leqslant -L$. D'où $L \leqslant M$.

Ainsi X possède bien une borne inf . □

Comme nous l'avons dit, le théorème de la borne supérieure est admis puisqu'il ne peut se démontrer qu'à l'aide du mode de construction choisi pour établir l'existence des nombres réels.

REMARQUE 2 — *Pour bien comprendre l'aspect absolument remarquable de ce fait, il convient de prendre un instant pour explorer la situation en matière de borne sup dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.*

Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \left\{ x \in \mathbb{Q} \;/\; x > 0,\ x^2 \leqslant 2 \right\}.$$

Il est évident que X est non vide puisque $1 \in X$. De plus X est majoré par 2 par exemple. Si le théorème de la borne supérieure était aussi vrai dans $\mathbb{Q}$, alors il existerait $M \in \mathbb{Q}$ tel que $M = \sup(X)$. Montrons que cette borne supérieure M vérifie $M^2 = 2$.

— *Supposons $M^2 > 2$ et posons $\epsilon = M^2 - 2$. Pour $h > 0$, on a :*

$$(M-h)^2 = M^2 - 2M\,h + h^2 \geqslant M^2 - 2M\,h = 2 + \epsilon - 2M\,h.$$

En prenant $h = \min\left(\frac{\epsilon}{2M}, M\right) > 0$, on obtient $(M-h)^2 \geqslant 2$. Par suite, pour tout $x \in X$:

$$x^2 \leqslant 2 \leqslant (M-h)^2$$

et donc $x \leqslant M - h$ puisque $x > 0$ et $M - h \geqslant 0$. Ainsi le réel $M - h$ est un majorant de X strictement plus petit que M, ce qui contredit le fait que M est le plus petit des majorants de X.

— *Supposons $M^2 < 2$ et posons $\epsilon = 2 - M^2$. Pour h strictement compris entre 0 et 1, on a :*

$$(M+h)^2 = M^2 + 2M\,h + h^2 \leqslant M^2 + 2M\,h + h \leqslant 2 - \epsilon + (2M+1)\,h.$$

En prenant $h = \min\left(1, \frac{\epsilon}{(2M+1)}\right)$, on obtient $(M+h)^2 \leqslant 2$ et donc $M + h$ est un élément de X strictement plus grand que M, ce qui contredit le fait que M est un majorant de X.

Nécessairement $M^2 = 2$ et $M > 0$ donc $M = \sqrt{2}$. Mais nous savons que $\sqrt{2}$ est un nombre réel et non rationnel[3]*. Donc $M \notin \mathbb{Q}$. Il y a donc une contradiction : en effet, X n'a pas de borne supérieure. Et* ***la propriété de la borne supérieure est fausse dans*** $\mathbb{Q}$.

3. Nous dirons que $\sqrt{2}$ est *irrationnel*.

D'un point de vue fondamental, il s'agit là de la véritable raison qui justifie mathématiquement l'introduction des nombres réels : bénéficier d'un ensemble qui prolonge $\mathbb{Q}$ et dans lequel la propriété de la borne supérieure soit vrai.

Nous sommes donc maintenant en mesure de répondre précisément à la problématique que nous avons posé précédemment :

Si X est une partie non vide et majorée [resp. minorée] de $\mathbb{R}$. Alors :
- X ne possède pas toujours de maximum [resp. minimum] ;
- X possède toujours une borne supérieure [resp. inférieure] ;
- si X possède un maximum [resp. minimum], alors ce maximum [resp. minimum] est la borne supérieure [resp. inférieure] de X. Autrement dit :
$$\max(X) = \sup(X) \quad \big[\text{ resp. } \ m = \inf(X)\big].$$

§ *3. Caractérisation infinitésimale* — Une autre caractérisation des bornes inf et sup va se révéler particulièrement pratique pour les calculs. Elle est donnée par la proposition qui suit.

PROPOSITION 3
Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et M et m deux réels. On a :

1. *La borne sup de X existe et vaut M*[4] *si et seulement si*
   (1) $\forall x \in X, \quad x \leqslant M$;
   (2) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in X, \quad M - \epsilon < x (< M)$.
2. *La borne inf de X existe et vaut m si et seulement si*
   (1) $\forall x \in X, \quad m \leqslant x$;
   (2) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in X, \quad (m <) x < m + \epsilon$.

L'idée de cette proposition consiste, comme avant, à *distinguer* la borne sup de X parmi tous les majorants de X. À la différence près que, dans la définition, on caractérisait $\sup(X)$ comme étant le plus petit de tous les majorants possibles, alors qu'ici, il s'agit de caractériser ce majorant comme étant celui dont les éléments de X *se rapprochent autant que l'on souhaite*.

Preuve — Les preuves dans les deux cas étant similaire, nous démontrons ici uniquement le premier cas. Supposons que $M = \sup(X)$. Alors M majore X d'où la première assertion. Ensuite supposons la négation de la deuxième assertion : il existerait donc $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait :
$$x \leqslant M - \epsilon.$$
Mais alors $M - \epsilon$ majore X. Ceci contredit la minimalité de M.

Réciproquement, supposons que M vérifie les deux assertions. Alors M est un majorant de X (d'après la première). Si L est un autre majorant de X, supposons que $L < M$. Posons $\epsilon = M - L$. Alors il existerait $x \in X$ tel que $M - \epsilon = L < x$. Ceci contredit le fait que L soit un majorant. Donc nécessairement $L \geqslant M$. Ainsi $M = \min(\mathscr{M}_X)$. Donc X possède une borne sup et ce sup vaut M. □

4. La phrase « *la borne sup existe et vaut M* » peut sembler redondante de prime abord, mais elle a pourtant exactement la même signification que la formule « $\sup(X) = M$ ». Il faut donc bien garder à l'esprit qu'une telle formule signifie deux choses : d'abord que le sup existe puis que sa valeur est M.

§ *4. Synthèse & exemples* — Il convient de bien distinguer les méthodes liées au maniement des bornes inf et sup qui apparaissent dans la discussion précédente. En guise de synthèse, nous donnons ici les méthodes pour les bornes sup et laissons le soin au lecteur d'écrire la version correspondant aux bornes inf.

Méthode 2 — ***Manipulation des bornes sup.***

1. *Pour* ***utiliser*** *une borne sup :*
   - *À l'aide de la définition : si* $M = \sup(X)$ *et si* $\forall x \in X$*, on a* $x \leqslant M'$*, alors*[5] $M \leqslant M'$.
   - *À l'aide de la caractérisation : si* $M = \sup(X)$*, alors, pour le* $\epsilon > 0$ *de notre choix, on obtient qu'il existe* $x \in X$*, tel que* $x > M - \epsilon$.
2. *Pour* ***démontrer*** *une borne sup : soit* X *un ensemble non vide et* $M \in \mathbb{R}$.
   - *Méthode 1 (la définition) : on montre que* M *est un majorant puis que c'est le plus petit des majorants.*
   - *Méthode 2 (la caractérisation) : on montre que* M *est un majorant puis on se donne* $\epsilon > 0$ *quelconque et on montre qu'il existe* $x_\epsilon \in X$ *tel que* $x_\epsilon > M - \epsilon$.

Exemple 1 — *Illustrons les quatre méthodes précédentes sur des exemples.*

1. ***Utilisation à l'aide de la définition.*** *Prenons* A *une partie non vides et bornées de* $\mathbb{R}$*, alors on a :*

$$\boxed{\sup(-A) = -\inf(A)}$$

   En effet, pour tout $x \in A$*, on a* $\inf(A) \leqslant x$ *donc* $-x \leqslant -\inf(A)$ *et donc par passage au sup* $\sup(-A) \leqslant -\inf(A)$*. De même pour tout* $x \in A$*,* $-x \leqslant \sup(-A)$*, donc* $-\sup(-A) \leqslant x$ *d'où par passage à l'inf* $\inf(A) \geqslant -\sup(-A)$*. On a donc finalement* $\sup(-A) = -\inf(A)$*.*
   Pour A *et* B *deux parties de* $\mathbb{R}$*, on note :*

$$A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}.$$

   On a alors :

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \sup(a + A) = a + \sup(A) \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

   En effet, pour tout $(x, y) \in A \times B$*, on a* $x + y \leqslant \sup(A) + \sup(B)$*, d'où par passage au sup* $\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$*. De même pour tout* $(x, y) \in A \times B$*, on a* $x \leqslant \sup(A+B) - y$ *et donc par passage au sup* $\sup(A) \leqslant \sup(A+B) - y$ *d'où pour tout* $y \in B$*,* $y \leqslant \sup(A+B) - \sup(A)$ *d'où par passage au sup à nouveau* $\sup(B) \leq \sup(A+B) - \sup(A)$*. Finalement, on a montré que* $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$*. Pour la deuxième égalité, il suffit d'appliquer le résultat précédent avec* $B = \{a\}$*.*
   A-t-on de même l'égalité $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$ *? Dans le cas général, on n'a pas* $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$ *(prendre* $A = B =]-1, 0[$*). Cependant, si* A *et* B *sont des parties de* $\mathbb{R}_+$*, le résultat est vrai.*
2. ***Utilisation à l'aide de la caractérisation.*** *Prenons* A *une partie majorée non vide de* $\mathbb{R}$ *telle que* $\sup(A) > 0$*. Alors il existe dans* A *des éléments strictement positifs. En effet, pour* $\epsilon = \frac{\sup(A)}{2}$*, la caractérisation nous donne* $x \in X$ *tel que* $\sup(A) - \epsilon = \frac{\sup(A)}{2} < x$*. Dans ce cas* $x > 0$*.*
3. ***Démonstration à l'aide de la définition.*** *L'exemple 2 précédent convient.*

5. On parle dans ce cas de « *passage au sup* » dans une inégalité.

4. ***Démonstration à l'aide de la caractérisation.*** *Posons*

$$X = \{e^{-x}, x \in \mathbb{R}_+\}.$$

Montrons que $\inf(X)$ *existe et vaut* 0*. Pour ce faire, on observe d'abord que* 0 *est un minorant par définition de l'exponentielle réelle, qui est à valeur dans* $\mathbb{R}_+$*. De plus, soit* $\epsilon > 0$.

(a) si $\epsilon \geqslant 1$*, alors* $x_\epsilon = 1$ *est tel que* $x' = e^{-x_\epsilon} = e^{-1} < \epsilon$.

(b) si $\epsilon < 1$*, alors prenons* $x_\epsilon = \ln(2) - \ln(\epsilon) > 0$*. Ainsi :*

$$x' = e^{-x_\epsilon} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Dans les deux cas, on a trouvé un élément $x' \in X$ *tel que* $x' < \epsilon$*. Donc* $\inf(X)$ *existe et vaut* 0.

3. Intervalles

Un type d'ensemble va jouer un rôle particulièrement important dans l'utilisation des nombres réels : les *intervalles.*

DÉFINITION 6
On appelle ***intervalle***[6] *de* $\mathbb{R}$ *tout sous-ensemble* I *de* $\mathbb{R}$ *tel que* $\forall (x, y) \in I^2$ *avec* $x < y$*, on a :*

$$\forall z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \implies z \in I.$$

Commençons par poser quelques notations et observations élémentaires[7] :

— avec cette définition, l'ensemble vide $\emptyset$, les singletons $\{x\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles.

— pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles, que nous noterons de manière générale de la façon suivante, sont des intervalles :

$$]a, +\infty[= \Big\{x \in \mathbb{R} \;/\; x > a\Big\}, \quad [a, +\infty[= \Big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leqslant x\Big\},$$

$$]-\infty, a[= \Big\{x \in \mathbb{R} \;/\; x < a\Big\},]-\infty, a] = \Big\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \leqslant a\Big\}.$$

— pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, les ensembles, que nous noterons de manière générale de la façon suivante, sont des intervalles :

$$]a, b[= \Big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x < b\Big\}, [a, b] = \Big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leqslant x \leqslant b\Big\},$$

$$]a, b] = \Big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x \leqslant b\Big\}, [a, b[= \Big\{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leqslant x < b\Big\}.$$

REMARQUE 3 — *On notera qu'il découle de manière évidente de la définition que toute intersection d'intervalle est un intervalle mais qu'une union d'intervalle n'est pas nécessairement un intervalle.*

6. Nous décidons ici de donner la définition d'un intervalle en tant que partie *convexe* de $\mathbb{R}$. Nous pourrions tout aussi bien définir un intervalle comme une partie *connexe* ou *connexe par arc.* Ces trois notions seront vues indépendamment dans les cours d'analyse des semestres prochain.

7. Les preuves de ces propriétés consistent à réécrire la définition. Nous les laissons donc au lecteur.

Le seul résultat important à ce stade sur la notion d'intervalle est le théorème de classification suivant.

Proposition 4
Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et de l'un des 10 types précédent.

Preuve — Considérons I un intervalle non vide. Nous allons procéder par distinction de cas afin de retrouver les différentes possibilités exposées précédemment :

— Supposons I borné. D'après la propriété de la borne sup, I possède donc une borne inf et une borne sup. Posons :
$$a = \inf(I) \quad \text{et} \quad b = \sup(I).$$
Il suffit de montrer l'inclusion $]a, b[\subset I$ puisqu'alors on aura :
$$I = [a, b], \quad I =]a, b], \quad I =]a, b[, \quad \text{ou} \quad I = [a, b[$$
en fonction de l'appartenance de a et b à I, c'est-à-dire suivant que a ou b est un maximum ou un minimum de I.
Soit $z \in]a, b[$. Comme $z < b$, le réel z n'est pas un majorant de I, et on peut trouver $y \in I$ tel que $z < y$. De même on peut trouver $x \in I$ tel que $x < z$.
On a ainsi $z \in [x, y]$ avec $x \in I$ et $y \in I$, ce qui entraîne que $z \in I$. Donc $]a, b[\subset I$.

— Supposons I non borné. Nous avons différents cas suivant que I est majoré ou non, minoré ou non.
1. Supposons que I est majoré. Il est donc non minoré (sinon il serait borné), alors d'après la propriété de la borne sup, I possède donc une borne sup $a = \sup(I)$. Montrons que $]-\infty, a[\subset I$. Soit $z \in]-\infty, a[$. Comme $z < a$, le réel z n'est pas un majorant de I et il existe $y \in I$ tel que $z < y$. De même comme I n'est pas minoré, z ne minore pas I et il existe donc $x \in I$ tel que $x < z$.
On a ainsi $z \in [x, y]$ avec $x \in I$ et $y \in I$, ce qui entraîne que $z \in I$. Donc $]-\infty, a[\subset I$. Ainsi on aura :
$$I =]-\infty, a] \quad \text{ou} \quad]-\infty, a[$$
en fonction de l'appartenance de a à I.
2. Le cas I minoré et donc non majoré se démontre de manière entièrement similaire au cas précédent en inversant le signe des inégalités.
3. Enfin, si I n'est ni majoré, ni minoré, alors pour tout $z \in \mathbb{R}$, z n'est ni majorant, ni minorant de I, il existe donc $(x, y) \in I^2$ tels que $x < z < y$.
On a ainsi $z \in [x, y]$ avec $x \in I$ et $y \in I$, ce qui entraîne que $z \in I$. Donc $I = \mathbb{R}$.

□

On déduit de la preuve précédente une méthode de classification des intervalles et une terminologie (on ne s'intéresse qu'aux intervalles non vides).

— Si un intervalle I est borné, il y a donc quatre cas :
1. le cas *ouvert borné* : $I =]a, b[$;
2. les deux cas *semi-ouverts bornés* : $I =]a, b]$ ou $[a, b[$;
3. le cas *fermé borné* : $I = [a, b]$. Dans ce cas, on dira aussi que I est un *segment.*

— Si un intervalle I est non borné, il y a donc cinq cas :
1. le cas *non borné à droite* : $I = [a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$;
2. le cas *non borné à gauche* : $I =]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$;
3. le cas *non borné à droite et à gauche* : $I = \mathbb{R}$.

Remarque 4 — *Dans le cas d'un intervalle borné I, on appellera* ***longueur de*** I*, noté* $l(I)$*, le nombre :*
$$l(I) = \sup(I) - \inf(I).$$
Ainsi nous dirons qu'un intervalle borné est ***de longueur fini****.*

Notons aussi dans ce cas que, pour tout $(x,y) \in I^2$, on a :

$$\boxed{|x-y| \leqslant l(I).}$$

Le cas d'égalité ayant lieu pour $\{x,y\} = \{\inf(I), \sup(I)\}$. En effet :

$$\left\{\begin{array}{l} \inf(I) \leqslant x \leqslant \sup(I) \\ \inf(I) \leqslant y \leqslant \sup(I) \end{array}\right. \implies |x-y| = \pm(x-y) \leqslant \sup(I) - \inf(I).$$

Pour le cas d'égalité, prenons par exemple $x \leqslant y$. Alors :

$$y - x = \sup(I) - \inf(I) \iff \underbrace{y - \sup(I)}_{\leqslant 0} = \underbrace{x - \inf(I)}_{\geqslant 0} \iff \left\{\begin{array}{l} y = \sup(I) \\ x = \inf(I). \end{array}\right.$$

On peut donc préciser l'inégalité précédente dans le cas où I n'est pas un segment : pour tout $(x,y) \in I^2$ on a :

$$|x-y| < l(I).$$

III CARACTÈRE ARCHIMÉDIEN

Nous en venons maintenant au *caractère archimédien* de $\mathbb{R}$, qui concerne la façon dont les nombres entiers sont disposés parmi les nombres réels.

1. Propriété d'Archimède

PROPOSITION 5
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$y \leqslant nx.$$

Preuve — Faisons une démonstration par l'absurde en supposant, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; nx < y.$$

L'ensemble $A = \left\{nx \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$ est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ qui possède donc une borne supérieure a.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \; (n+1)x \leqslant a$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; nx \leqslant a - x$ ce qui signifie que $a - x$ est un majorant de A strictement inférieur à a et contredit donc le fait que a est le plus petit des majorants de A. Nécessairement A est non majoré et en particulier non majoré par y. D'où la conclusion. □

Notons que cette propriété d'Archimède s'exprime utilement de façon exponentielle :

COROLLAIRE 2
Étant donnés deux réels x et y avec $x > 1$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \geqslant y$.

Preuve — Comme $x > 1$, on peut poser $x = 1 + h$ avec $h > 0$. Si n est un entier naturel, la formule du binôme de Newton permet d'écrire :

$$(1+h)^n \geqslant 1 + n\,h.$$

D'après la propriété d'Archimède on peut trouver n tel que $n\,h \geqslant y - 1$ et on a alors $x^n \geqslant y$. □

2. Partie entière

Une des utilisations essentielle de la propriété d'Archimède vient du fait que celle-ci permet de définir la *partie entière* d'un nombre réel. Partie entière qui, elle-même, nous permettra de définir dans le chapitre suivant sur les suites le *développement décimal* (et le développement en base quelconque) des nombres réels.

THÉORÈME 3
Étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier relatif n tel que $n\,a \leq x < (n+1)\,a$, c'est-à-dire tel que :

$$x = n\,a + y \text{ avec } 0 \leqslant y < a.$$

Preuve — Commençons par démontrer l'unicité puis passons à l'existence.

— Unicité : si n et n' sont deux entiers répondant à la question, alors n et n' appartiennent à l'intervalle $]\frac{x}{a} - 1, \frac{x}{a}]$. Cet intervalle étant ouvert et de longueur 1, on a (cf. la remarque 4 p.21) :

$$|n - n'| < 1.$$

Mais n et n' sont des entiers donc ceci implique que $n = n'$.

— Existence : $\mathbb{R}$ étant archimédien, on peut trouver
  — un entier n_1 tel que $x \leqslant a\,n_1$;
  — un entier n_2 tel que $-x \leqslant a\,n_2$.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{Z}, \quad k\,a \leqslant x\}$ étant une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient par exemple $-n_2$) et majorée (par exemple par n_1), elle contient un plus grand élément n.
Donc n vérifie $n\,a \leqslant x$. Puisque l'entier $n+1$ n'appartient pas à cet ensemble, on a $x < (n+1)\,a$ ce qui prouve bien que n convient.

□

REMARQUES 1

1. ***Division euclidienne.*** *Ce théorème s'appelle souvent « division euclidienne dans $\mathbb{R}$ » car il procède comme la division euclidienne des nombres entiers. L'écriture :*

$$x = n\,a + y \text{ avec } 0 \leqslant y < a$$

est vu comme la division de x par y où n est le quotient et y est le reste.

2. ***Congruence.*** *Si $a > 0$, on définit la relation de* ***congruence modulo*** *a par :*

$$x \equiv y \quad [a] \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \; : \; y = x + n\,a.$$

La proposition précédente signifie alors que pour tout réel x, il existe un unique $y \in [0, a[$ tel que $x \equiv y \quad [a]$. On utilise fréquemment en géométrie les congruences modulo 2π pour les mesures d'angles de vecteurs, pour la trigonométrie, etc.

La partie entière d'un nombre réel s'obtient maintenant comme un simple corollaire du théorème précédent pour le cas $a = 1$:

COROLLAIRE-DÉFINITION 3
Si x est un réel, l'unique entier relatif n vérifiant $n \leqslant x < n+1$ s'appelle la ***partie entière*** *de x et se note $E(x)$, ou $[x]$.*

Remarques 2

1. ***Synthèse.*** *On notera bien que pour tout réel x et pour tout entier n, il y a différentes façons d'exprimer le fait que n soit la partie entière de x :*

$$n = E(x) \iff n \leqslant x < n+1 \iff x-1 < n \leqslant x$$

ou encore

$$n = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x\} = \min\{k \in \mathbb{Z}, x < k+1\}.$$

2. ***La fonction.*** *La fonction « partie entière » possède donc par définition le graphe de la figure 1.4.*

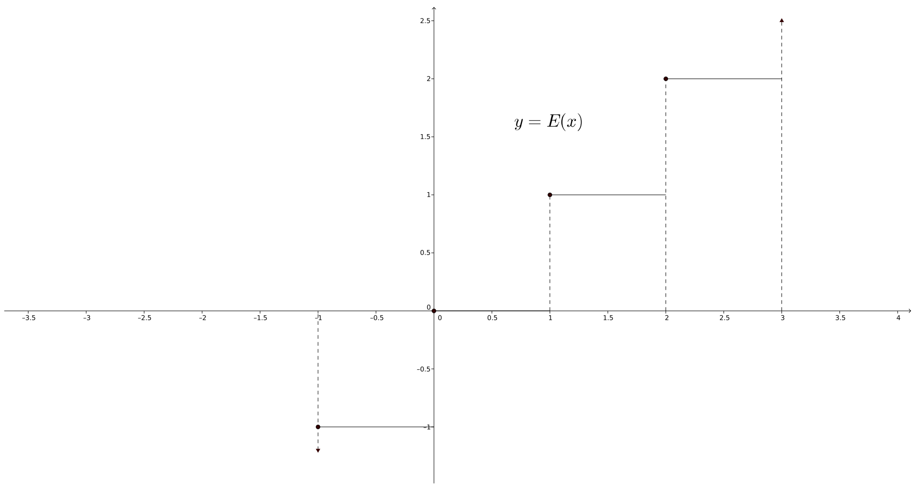


Figure 1.4 – Graphe de la fonction « partie entière »

Nous verrons plus tard (mais cela « se voit » sur le dessin) que cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, continue à droite sur $\mathbb{R}$ et discontinue à gauche en chaque entier. Cette particularité lui conférera un statut d'exemple privilégié lorsque nous chercherons des cas simples de fonctions non continues afin de mettre en lumière les cas limites des propriétés des fonctions continues.

3. ***Autres définitions.*** *On sera bien vigilant à la définition de la partie entière que nous avons choisi de donner ici. En effet, ce même concept d'entier « proche », peut se décliner d'au moins trois façons différentes :*
   — *la partie entière ou plus précisément partie entière inférieure, telle que nous l'avons définie, est souvent appelée floor function (en anglais) et notée $\lfloor x \rfloor$ car il s'agit du plus grand entier inférieur à x.*
   — *la partie entière supérieure est souvent appelée ceiling function (en anglais) et notée $\lceil x \rceil$ car il s'agit du plus petit entier supérieur à x.*
   — *la fonction arrondi est notée $\lfloor x \rceil$. Elle peut se définir de deux manières :*

$$\lfloor x \rceil = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$$

ou bien

$$\lfloor x \rceil = \lceil x - \frac{1}{2} \rceil.$$

Ces deux fonctions coïncident sauf en $n+\frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ où la première vaut n et la deuxième $n+1$.

En d'autres termes, si $n \leqslant x < n+1$, alors :

$$n = \lfloor x \rfloor \quad \text{et} \quad n+1 = \lceil x \rceil,$$

si de plus $n \leqslant x < n+\frac{1}{2}$ alors $\lfloor x \rceil = n$ et si $n+\frac{1}{2} < x < n+1$ alors $\lfloor x \rceil = n+1$. En $n+\frac{1}{2}$, on peut choisir n ou $n+1$ pour valeur en prenant l'une ou l'autre des définitions. Dans tous les cas : $\lfloor x \rceil = n+1$ est l'entier qui réalise la distance minimale entre x et $\mathbb{Z}$:

$$|x - \lfloor x \rceil| = \min\{|x-n|\,, n \in \mathbb{Z}\}.$$

4. ***Lien avec la division des entiers.*** *Nous savons que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, m-1]\!]$ tel que :*

$$n = mq + r.$$

Ce théorème sera démontré dans le cours d'arithmétique. Il est connu sous le nom de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ [8] *et il s'agit du théorème bien connu de division de l'entier n par l'entier m : q étant le quotient et r le reste. Dans ce cas, on a très facilement que :*

$$\boxed{q = E\left(\frac{n}{m}\right) \qquad \text{et donc} \qquad r = n - mE\left(\frac{n}{m}\right).}$$

Exemple 2 — *À l'aide de la partie entière, on peut montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, il existe une infinité de couples (p,q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}.$$

Fixons en effet $x \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$p = E(qx+1) - 1$$

convient.

Plus généralement, on appelle ***mesure d'irrationnalité*** *de x, notée $\mu(x)$, le sup des réels μ tel que la propriété suivante soit vraie :*

> *Il existe une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que*
>
> $$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\mu}.$$

Le résultat démontré juste avant montre que pour tout réel x la mesure d'irrationalité $\mu(x)$ est un réel supérieur ou égal à 1. Il est alors facile d'obtenir le critère suivant pour montrer l'irrationalité d'un réel :

8. Notons bien qu'il ne s'agit pas du même résultat que le théorème 3. En effet, le théorème 3 s'adapte à des nombres réels non nécessairement entiers et perd donc la conséquence très forte que le reste est entier.

Soit x un réel. S'il existe une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu}$$

avec $\mu > 1$, alors x est irrationnel.

Ce fait se démontre aisément par l'absurde. Supposons que x, vérifiant cette propriété, soit rationnel. On a $x = \frac{a}{b}$ pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une infinité d'entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, tels que :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu} \qquad (*)$$

Alors

$$\frac{1}{bq} \leqslant \frac{|aq - bp|}{bq} < \frac{1}{q^\mu}.$$

Donc

$$q^{\mu-1} \leqslant b. \qquad (**)$$

Mais, d'après le corollaire 2, il n'existe qu'un nombre fini de q vérifiant cette propriété $(**)$. Et pour chaque tels q, il n'existe qu'un nombre fini de p vérifiant la propriété $(*)$. Cela contredit le fait que les couples (p,q) soient en nombre infini. Nécessairement x est irrationnel. On pourra noter que la réciproque est vrai aussi, mais sa preuve est un peu plus technique.

Pour conclure, le réel $\mu(x)$ mesure donc le défaut de rationalité du réel x : il est égal à 1 si et seulement si le réel x est rationnel, et plus il est grand, « moins le réel x est rationnel ». Les mathématiciens traduisent souvent cette propriété en disant que les nombres rationnels sont, parmi les nombres réels, ceux qui s'approximent le moins bien par des nombres rationnels. À l'opposé, il existe des nombres réels dont la mesure d'irrationalité est infinie. Par exemple : les ***nombres de Liouville.***

IV Densité

Nous allons maintenant nous intéresser à une idée très féconde et que nous retrouverons souvent dans la suite en analyse : la *notion d'ensemble dense.*

DÉFINITION 7
Nous dirons qu'une partie X de $\mathbb{R}$ est ***dense*** *si pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $l(I) > 0$, il existe un élément x de X qui est dans I.*

Autrement dit : X est dense si et seulement si

$$\boxed{\text{Pour tout } I \text{ intervalle de } \mathbb{R} \text{ tel que } l(I) > 0, \quad I \cap X \neq \emptyset.}$$

Remarques 3

1. ***Évidences.*** *Cela signifie donc qu'un ensemble dense est non vide (en effet, $X \cap \mathbb{R} = X$ est non vide). Et bien plus qu'être non vide, cela signifie donc qu'un ensemble dense est infini. En effet, si X est dense, alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in X, \quad n < x_n < n+1.$$

Autrement dit, X contient une suite strictement croissante. Pire que cela : si X est dense, alors X contient des suites qui convergent vers n'importe quel nombre réel. En effet, si X est dense, et si y est un réel quelconque, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in X, \quad y - \frac{1}{n+1} < x_n < y + \frac{1}{n+1}.$$

Autrement dit, X contient une suite qui converge vers y. La question est donc plutôt quel ensemble peut être dense hormis $\mathbb{R}$?

2. ***Exemples simples.*** *Considérons un ensemble fini de nombres réels $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ pour un entier $N \in \mathbb{N}$ fixé. L'ensemble $X = \mathbb{R} \setminus \{x_0, \ldots, x_N\}$ est dense. En effet : si il existait un intervalle I tel que $l(I) > 0$ et tel que*

$$I \cap (\mathbb{R} \setminus \{x_0, \ldots, x_N\}) = \emptyset,$$

alors I serait inclus dans l'ensemble fini $\{x_0, \ldots, x_N\}$. Mais alors si $N \geqslant 1$, I contiendrait tous les réels entre x_0 et x_1, ce qui est impossible et si $N = 0$, cela entraînerait que la longueur de I est nulle. Nécessairement, X est dense dans $\mathbb{R}$. Mais un ensemble dense peut aussi être le complémentaire d'un ensemble infini. Ainsi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est dense. En effet : si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur strictement positive, alors prenons $a \in I$. Si $a \notin \mathbb{Z}$, alors $a \in X \cap I$. Si $a \in \mathbb{Z}$, I étant de longueur strictement positive, I contient un élément b différent de a. Si par exemple $a < b$ avec $b \in \mathbb{Z}$, alors $x = a + \frac{1}{2}$ est compris entre a et b donc $x \in I$ et $x \notin \mathbb{Z}$ donc $x \in X$. Ainsi $X \cap I \neq \emptyset$ et donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est dense.

3. ***Densité relative.*** *Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $l(J) > 0$, nous dirons qu'une partie X de J est **dense dans** J (ou **relativement à** J) si pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $l(I \cap J) > 0$, on a :*

$$X \cap I \neq \emptyset.$$

Ainsi par exemple $X = [0,1] \setminus \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{N}\}$ est dense dans $[0,1]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Ainsi que nous pouvons le pressentir sur les exemples précédents, la densité d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ se caractérise plus simplement de la manière suivante :

Proposition 6 (Caractérisation de la densité)
Une partie non vide X de $\mathbb{R}$ est dense si et seulement si pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$, il existe $x \in X$ tel que :

$$a < x < b.$$

Preuve — Si une partie X de $\mathbb{R}$ est dense, alors en particulier pour I de la forme $I =]a,b[$, on a :

$$X \cap]a,b[\neq \emptyset.$$

Réciproquement, si une partie X de $\mathbb{R}$ vérifie la condition, prenons I un intervalle de longueur strictement positive. Alors il existe $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$. Mais dans ce cas, il existe $x \in X$, avec :

$$a < x < b.$$

Mais cela implique que $x \in I$ d'où le résultat. □

Les deux exemples les plus importants à ce stade en matière de sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$ sont donnés par les deux résultats suivants :

PROPOSITION 7
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve — Utilisons la caractérisation précédente et donnons-nous deux réels $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Si $b - a > 1$, alors il existe un entier (et donc a fortiori un rationnel) compris entre a et b : $x = E(a) + 1$. Si $b - a \leqslant 1$, alors utilisons la propriété d'Archimède : il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$n(b-a) > 1.$$

Mais alors le raisonnement précédent montre qu'il existe un entier compris entre na et nb. Notons m cet entier. On a alors que :

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

C'est le résultat recherché. □

COROLLAIRE 4
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve — Ici nous utilisons le fait bien connu [9] que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Considérons $a < b$ deux réels. D'après le résultat précédent, il existe un rationnel r_1 tel que $a < r_1 < b$. Et, appliquant à nouveau ce résultat, il existe un autre rationnel r_2 tel que

$$a < r_1 < r_2 < b.$$

Posons

$$x = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}}.$$

Alors x n'est pas rationnel (en effet, s'il l'était, il existerait deux entiers positifs non nuls a et b tels que $r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$, mais cela impliquerait que $\sqrt{2}$ vaut $\frac{r_2 - r_1}{\frac{a}{b} - r_1}$ et donc $\sqrt{2}$ serait rationnel). De plus, x est compris entre r_1 et r_2 car $\sqrt{2} > 1$. D'où le résultat. □

Nous terminons notre étude des sous-ensembles denses de $\mathbb{R}$ sur un résultat beaucoup plus fort que le résultat précédent concernant la densité de $\mathbb{Q}$. Mais nous avons besoin pour cela d'un peu de vocabulaire.

DÉFINITION 8
Nous dirons qu'un sous-ensemble G de $\mathbb{R}$ est un ***sous-groupe*** *de $\mathbb{R}$ si :*

1. $0 \in G$
2. $\forall (g_1, g_2) \in G^2,\ g_1 - g_2 \in G$.

EXEMPLES 3

1. *Ainsi par exemple $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\{0\}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{R}$.*
2. *Si $x \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble que nous noterons $x\mathbb{Z}$ défini par :*

$$x\mathbb{Z} = \{nx, \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Nous dirons qu'un tel sous-groupe est ***monogène*** *et qu'il est* ***engendré*** *par x.*

9. Rappelons que ceci se démontre par l'absurde : si il existait deux entiers strictement positifs et premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, alors $a^2 = 2b^2$ et donc a est pair et donc 4 divise $2b^2$, ce qui entraîne que b est pair aussi. Ces deux nombres entiers ne sont donc plus premiers entre eux ce qui apporte la contradiction recherchée.

THÉORÈME 4
Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est monogène ou dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve — Nous procédons par étapes. Considérons tout d'abord un sous-groupe G de $\mathbb{R}$. Si $G = \{0\}$, alors $G = 0\mathbb{Z}$ et donc G est monogène. Supposons donc G différent de $\{0\}$.

- Montrons tout d'abord que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide : prenons $x \in G$. Si $x < 0$, alors par définition $0 - x = -x \in G$, donc G contient un élément strictement positif.
- Posons $X = G \cap \mathbb{R}_+^*$. Cet ensemble étant non vide et minoré, il possède une borne inf dans $\mathbb{R}$. Posons $x = \inf(X)$. Donc $x \geqslant 0$ et il y a donc deux cas : $x = 0$ et $x > 0$.
- Montrons que si $x = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$: d'après la caractérisation de la borne inf (proposition 3), nous savons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$. Prenons maintenant $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et posons $\varepsilon = b - a$. Il existe donc $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$. D'après le théorème 3, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que
$$gq \leqslant a < (q+1)g.$$
Mais alors $(q+1)g = qg + g \leqslant a + g < b$. Donc $a < (q+1)g < b$. Comme $(q+1)g$ appartient à G, cela démontre que G est dense dans $\mathbb{R}$.
- Montrons que si $x = x_0 > 0$ alors G est monogène engendré par x_0 : si x_0 n'appartient pas à G, alors d'après la caractérisation de l'inf, pour $\varepsilon = x_0$, il existe $g \in G$ tel que $x_0 < g < 2x_0$. Mais pour $\varepsilon = g - x_0$, il existe aussi $h \in G$ tel que $x_0 < h < x_0 + \varepsilon = g$. Dans ce cas, $0 < g - h < x_0$ mais $g - h$ étant un élément de G, cela contredit la définition de l'inf pour x_0. Nécessairement $x_0 \in G$. Supposons maintenant qu'il existe $g \in G$ tel que $g \notin x_0\mathbb{Z}$ alors d'après le théorème 3, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que
$$qx_0 < g < (q+1)x_0.$$
Mais dans ce cas, $g - qx_0 \in G$ et appartient à $]0, x_0[$ ce qui contredit là aussi la définition de l'inf pour x_0. Nécessairement $G = x_0\mathbb{Z}$. Ce qui conclut notre démonstration.

□

EXEMPLE 3 — *Ce théorème permet d'obtenir directement des résultats très puissants comme le fait que :*
$$\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{n + \sqrt{2}m, \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$$
ou
$$\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{n + 2\pi m, \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$$
ou plus généralement
$$\mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z} = \{n + \rho m, \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$ pour tout ρ irrationnel. Autrement dit pour tout réels $a < b$ il existe deux entiers $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :
$$a < n + \rho m < b.$$
En effet : pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Ce sous-groupe est donc ou bien monogène ou bien dense dans $\mathbb{R}$. Si ce groupe était monogène, alors il existerait $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z} = x_0\mathbb{Z}.$$
Mais alors :
$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \rho = nx_0 \quad \text{et} \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad 1 = mx_0.$$
Donc $\rho = \frac{n}{m}$. Ce qui n'est pas.

Ce théorème sera le point ultime de notre avancement dans ce chapitre sur les nombres réels. Beaucoup d'applications de ce résultats seront vues dans la suite des cours d'analyse. Il est maintenant nécessaire, pour poursuivre notre compréhension des réels d'étudier précisément les suites de nombres réels, sujet qui constitue le chapitre suivant.

Chapitre 2

Suites réelles

Nous allons maintenant mettre à contribution notre travail de rigueur sur les réels du chapitre précédent. Travail qui nous a notamment permis de dégager les propriétés clé dans l'utilisation des nombres réels.

L'objectif théorique est de prolonger l'étude des nombres réels du paragraphe précédent. Mais ici, nous changeons de point de vue et nous voulons étudier les familles dénombrables de nombres réels. Passer, pour étudier un problème portant sur un ensemble continu, à l'étude de familles dénombrables dans cet ensemble continu s'appelle *discrétiser* le problème. Nous retrouverons souvent cette démarche en analyse et en physique dans les années suivantes.

Table des matières du chapitre

I Plusieurs définitions

Nous verrons la notion de *suite* de quatre façons entièrement équivalentes.

1. Point de vue des listes

Il s'agit du point de vue que nous privilégierons dans l'immense majorité des cas. On appelle *suite* à termes réels, ou *suite réelle* toute famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$. En d'autres termes, si u est une suite, on la notera :

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)\,.$$

Ainsi, si l'on adopte ce point de vue, une suite réelle n'est autre qu'une liste infinie de nombre réels indexés par les entiers naturels. Par exemple $u = (0, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ ou $u = (1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$ sont des suites réelles.

Remarque 5 — *Il arrivera souvent que, par abus de langage, nous notions*

$$u = (u_n) \quad \text{au lieu de} \quad u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

quand le contexte sera suffisamment clair pour qu'il n'y ait pas ambiguïté.

2. Point de vue fonctionnel

Il s'agit d'un point de vue souvent très pratique. On appelle *suite réelle* la donnée d'une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour passer du point de vue « liste » au point de vue « fonctionnel » on procède comme suit :

— si u est la suite définie par la famille

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

alors u est aussi la suite définie par la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

— si u est la suite définie par la fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ alors u est aussi la suite déinie par la famille

$$u = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

3. Point de vue itératif

Il s'agit d'un point de vue très riche que nous rencontrerons parfois mais qui donne lieu à des phénomènes complexe[1]. Une *suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être définie par la donnée d'un réel $x_0 \in \mathscr{D}$ et d'une fonction $T : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ définie sur $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = T(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Dans ce cas, nous dirons que T est la *fonction de transition* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $u_{n+1} = T(u_n)$ est une *formule ou relation de récurrence* pour cette suite. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre u_n est l'image du n-ième itéré de f en x_0 :

$$u_n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}(x_0).$$

Dans cette définition, la relation de récurrence exprime le terme u_{n+1} à l'aide du terme u_n. Nous parlerons dans ce cas de *récurrente d'ordre* 1. Et nous pouvons aussi définir des récurrentes d'ordre supérieur : une *suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être définie par la donnée de p nombres réels $(x_0, \ldots, x_{p-1}) \in \mathscr{D}^p$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et d'une fonction $T : \mathscr{D}^p \longrightarrow \mathscr{D}$ où $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = x_0 \\ \quad\vdots \\ u_{p-1} = x_{p-1} \\ u_{n+p} = T(u_n, \ldots, u_{n+p-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Dans ce cas, nous dirons que $(u_n)_{n\in}$ est définie par une *formule ou relation de récurrence d'ordre* p.

EXEMPLES 4 1. ***Cas des suites arithmétiques :*** *nous dirons qu'une suite u est arithmétique de raison a si elle est définie de la façon suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = u_n + a \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Dans ce cas la fonction de transition est la translation

$$T : x \in \mathbb{R} \longmapsto x + a \in \mathbb{R}.$$

1. Ce point de vue se développe au sein d'une immense théorie : celle des « *systèmes dynamiques discret* ».

On montre par une récurrence très simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$u_n = x_0 + na.$$

Donc la suite u *peut être définie de manière fonctionnelle par la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & x_0 + na \end{array}$$

2. ***Cas des suites géométriques :*** *nous dirons qu'une suite* u *est géométrique de raison* a *si elle est définie de la façon suivante :*

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = au_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans ce cas la fonction de transition est l'homothétie

$$T : x \in \mathbb{R} \longmapsto ax \in \mathbb{R}.$$

On montre par une récurrence très simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$u_n = a^n x_0.$$

Donc la suite u *peut être définie de manière fonctionnelle par la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & a^n x_0 \end{array}$$

3. ***Exemple de récurrence d'ordre 2 :*** *considérons la suite* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par la relation de récurrence d'ordre* 2 *suivante :*

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Il s'agit de la suite de Fibonacci[2]*. On peut montrer que cette suite peut se définir aussi de manière fonctionnelle car elle vérifie la relation :*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. ***Situation générale :*** *il ne faut pas croire que la situation générale est aussi simple. Dans la plupart des cas, il est difficile, connaissant la fonction de transition* T *d'établir une formule « simple » pour la fonction* f *et vice-versa.*

2. Leonardo Fibonacci est un mathématicien italien né à la fin du moyen-âge en 1175 et mort en 1250. Il est resté extrêmement célèbre pour son livre « *Liber Abaci* » (ou littéralement livre des calculs) écrit en 1202 dans lequel Fibonacci introduit notamment rien de moins que le système de numération indo-arabe pour l'écriture des nombres !

4. Point de vue implicite

Il s'agit là du point de vue en général le plus délicat. Nous le rencontrerons rarement. Une *suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être définie par une condition du type : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution d'une équation $P(n, x) = 0$ où P est une fonction de $\mathbb{N} \times \mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ avec $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$.
Dans ce cas, chaque terme u_n de la suite est défini par une condition qui assure l'existence et l'unicité du terme en question, la valeur de u_n n'étant a priori pas connu. C'est pourquoi nous parlons dans ce cas de définition *implicite* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 4 — *Considérons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'équation $f_n(x) = x^n + x - 1 = 0$ pour $x \in [0, 1]$. Comme $0^n+0-1 < 0$ et $1^n+1-1 > 0$, et comme la fonction $f_n : x \in [0, 1] \longmapsto x^n+x-1$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires 15 nous assure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$. Comme la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$, ce u_n est unique. Nous venons de définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une condition implicite. Dans le graphe 2.1 nous représentons les 7 premières valeurs de cette suite.*

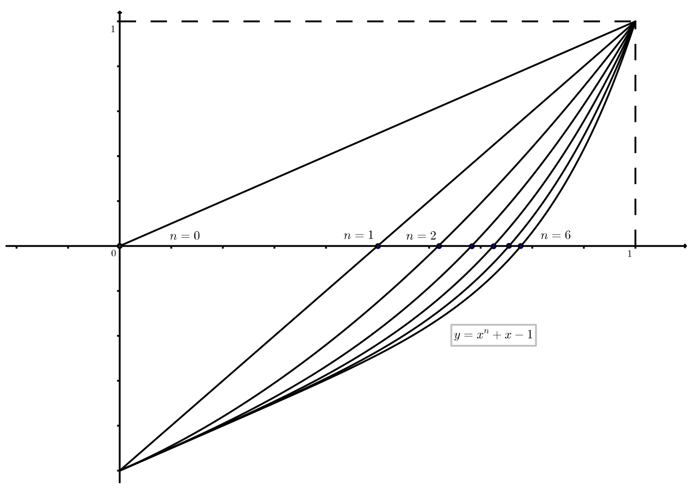


Figure 2.1 – Suite implicite définie par l'équation $x^n + x - 1 = 0$

5. synthèse

On admettra que les quatre points de vue précédent sont équivalents et que toute suite réelle est défini de l'une de ces quatre façons. Rappelons, comme nous l'avons déjà mentionné, que le passage d'une définition à une autre peut se révéler être un problème très difficile. Ainsi, on ne cherchera pas par exemple à trouver une relation de récurrence qui définirait la suite (u_n) de l'exemple 4 ni même une écriture fonctionnelle de cette suite.

On notera l'ensemble de toutes les suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Notons enfin que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n.$$

Enfin, par extension, nous appellerons aussi suite réelle toute famille de réels indexée par $\mathbb{N}^*$, voire plus généralement par un intervalle entier du type $[n_0, +\infty[$ où $n_0 \in \mathbb{N}$. On peut en ramener l'étude au cas des suites définies sur $\mathbb{N}$ par le changement d'indice $p = n - n_0$. Nous dirons dans ce cas qu'une suite u est *définie à partir du rang* n_0 et elle sera notée :

$$u = (u_n)_{n \geqslant n_0}.$$

II Vocabulaire descriptif

Commençons notre étude des suites réelles par la terminologie servant à décrire le comportement global des suites.

DÉFINITION 9
*Soit $u = (u_n)$ une suite réelle. Nous appellerons **support** de la suite u, noté $\mathrm{Supp}(u)$ l'ensemble des valeurs de la suite :*

$$\mathrm{Supp}(u) = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Le support d'une suite ne porte pas toute l'information permettant de caractériser une suite. Ainsi deux suites peuvent avoir le même support sans être égales. On pensera par exemple aux deux suites suivantes

$$u_n = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ v = (-1, 1, 1, \dots, 1, \dots).$$

Dans ces deux cas, le support est l'ensemble $\{-1, 1\}$.

DÉFINITION 10
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
- ***majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$,*
- ***minorée** si $\exists m \in \mathbb{R} \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$,*
- ***bornée** si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire si :*

$$\exists M \in \mathbb{R} \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

DÉFINITION 11
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
- ***croissante** si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,*
- ***décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$,*
- ***monotone** si elle est croissante ou décroissante.*

*On dit qu'elle est **strictement croissante**, **strictement décroissante**, ou **strictement monotone** si l'inégalité correspondante est stricte.*

Ces notions sont d'ores et déjà bien connues. Rappelons cependant la méthode générale suivante.

MÉTHODE 3 — ***Monotonie d'une suite.*** *De manière générale, pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, on démontrera ou bien*

— ***point de vue additif,*** *que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\; u_{n+1} - u_n$$

est de signe constant.

— ***point de vue multiplicatif,*** *que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\; u_n \neq 0 \quad et \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$$

est de signe constant.

DÉFINITION 12

*Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** s'il existe un réel k tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_n = k.$$

Les suites constantes sont donc les seules suites qui soient simultanément croissantes et décroissantes.

DÉFINITION 13

*Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **périodique** s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+N} = u_n.$$

Dans ce cas, nous dirons aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *périodique de période* N ou que N est une *période* de la suite. On notera bien qu'il n'y a pas unicité de la période de la suite, ainsi si (u_n) est périodique de période N alors (u_n) est aussi périodique de période kN pour tout $k \in \mathbb{N}$.

III A PARTIR D'UN CERTAIN RANG

Nous en venons maintenant à la notion la plus profonde de ce chapitre sur les suites : la façon d'établir mathématiquement qu'une propriété pour une suite n'est plus nécessairement vraie globalement mais « *à l'infini* » ou aussi « *à partir d'un certain rang* ». La bonne compréhension de ce concept par l'étudiant constituera l'objectif majeur de ce chapitre puisque de ce chapitre découlera la *définition de la limite* des suites dans la section suivante puis, plus généralement, la notion de *phénomène asymptotique* que nous étudierons à la fin de ce chapitre.

L'idée est la suivante : étant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une propriété $\mathscr{P}(n)$ portant[3] sur les termes de la suite, nous dirons que cette propriété est vraie *à partir d'un certain rang* s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel la propriété est vraie. Autrement s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Formellement, nous écrirons cela par l'assertion :

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N},\; \forall n \geqslant N,\; \mathscr{P}(n)}$$

3. Le lecteur remarquera que nous choisissons de ne pas préciser le sens de la phrase « une propriété $\mathscr{P}(n)$ portant sur les termes de la suite » et ce afin de ne pas alourdir le propos par trop de formalisme. Sur ce point nous nous contenterons de l'idée générale et préférons des insister sur des définitions précises sur les exemples de suite croissante, positive, constante, périodique... à partir d'un certain rang.

Posons tout de suite le problème auquel le lecteur va être confronté dans le maniement d'une telle définition : dans l'immense majorité des cas que nous envisagerons ultérieurement, le rang N ne sera pas connu explicitement et pire il n'est jamais unique. La seule information que nous aurons sur cet entier est qu'il existe !

Précisons cette définition dans différents cas particuliers :

1. **Monotonie à partir d'un certain rang.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Nous dirons que (u_n) est **croissante** [resp. . **décroissante**] **à partir d'un certain rang** s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$u_{n+1} \geqslant u_n \quad [\text{resp. } u_{n+1} \leqslant u_n\ ]$$

Exemples 5

(a) La suite $u = (2, 1, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$ est croissante à partir du rang $N = 3$.

(b) La suite $u_n = E(\frac{1}{9}2^n)$ est strictement croissante à partir d'un certain rang. En effet pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$u_n < 2^{n-3} \leqslant u_{n+1}.$$

2. **Comparaison à partir d'un certain rang.** Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Nous dirons que $u_n \leqslant v_n$ **à partir d'un certain rang** s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant v_n.$$

Exemple 5 — *La suite définie par $u_n = \frac{5(-1)^n}{n+1} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ est positive à partir d'un certain rang. En effet, pour tout $n \geqslant 4$, on a :*

$$u_n \geqslant \frac{5(-1)^n}{5} + 1 = 0 \ \text{ si } n \text{ est impair et } \ u_n \geqslant 0 \ \text{ si } n \text{ est pair.}$$

3. **Constante à partir d'un certain rang.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Nous dirons que (u_n) est **constante à partir d'un certain rang** s'il existe un réel k et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u_n = k \quad \forall n \geqslant N.$$

Exemple 6 — *La suite définie par $u_n = E(\frac{100}{n+1})$ est constante à partir du rang* 100.

Cette liste de définitions n'est évidemment pas exhaustive, on pourrait par exemple y adjoindre la définition d'une suite **périodique à partir d'un certain rang**, d'une suite **à valeur entière à partir d'un certain rang,** etc. L'essentiel est ici de comprendre le « mécanisme » de cette définition afin de l'adapter suivant les cas à la modalité nécessaire.

Dans la liste de définitions précédentes, nous n'avons pas mentionné la notion de « majoré, [resp. minoré, resp. borné] à partir d'un certain ». C'est à cause du fait suivant très simple et qui va nous amener à réaliser notre première démonstration théorique utilisant la notion de « à partir d'un certain rang ».

Fait 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite (u_n) est majorée [resp. minorée, resp. bornée] à partir d'un certain rang si et seulement si elle est majorée [resp. minorée, resp. bornée].

Preuve — Les démonstrations étant similaires dans les trois cas : majoré, minoré et borné, nous ne démontrons ici que le cas majoré. Nous procédons par double implication.

— Si la suite (u_n) est majorée, alors elle est évidemment majorée à partir d'un certain rang.
— Supposons que (u_n) est majorée à partir d'un certain rang. Il existe donc un réel M et un entier N tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant M.$$

Nous savons que tout ensemble fini non vide admet un plus grand élément dans $\mathbb{R}$ (cf. proposition 1 p. 15). L'ensemble $\{u_0, \dots u_N\}$ admet donc un plus grand élément que l'on note M'. Prenons $\mathscr{M} = \max(M, M')$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \leqslant \mathscr{M}.$$

Nous venons de montrer que la suite est (u_n) est majorée.

□

Avant de passer à la définition de la limite d'une suite, il reste une difficulté à bien identifier : il n'est pas seulement utile de montrer qu'une suite vérifie une propriété à partir d'un certain rang, comme souvent en mathématiques il est tout aussi utile de savoir nier qu'une suite vérifie telle ou telle propriété à partir d'un certain rang.

MÉTHODE 4 — ***Nier une propriété à partir d'un certain rang.*** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\mathcal{P}(n)$ une propriété portant sur les termes de la suite. Pour nier que la suite (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}(n)$ à partir d'un certain rang, il faut et il suffit de montrer que pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$, tel que $\mathcal{P}(n)$ est faux. Il s'agit donc de démontrer que :*

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant N,\ \mathcal{P}(n) \quad \textit{est faux.}}$$

EXEMPLES 6

1. *Montrons par exemple que la suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'est pas constante à partir d'un certain rang : pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers : par exemples $n_1 = 2N$ et $n_2 = 2N+1$, tels que $n_1 \geqslant N$, $n_2 \geqslant N$ et $u_{n_1}\ (=1) \neq u_{n_2}\ (=-1)$. Donc la suite n'est pas constante à partir d'un certain rang.*
2. *Montrons par exemple que la suite définie par $u_n = E(\sin(n))$ n'est pas positive à partir d'un certain rang : pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k\pi \leqslant N < (k+1)\pi$ (d'après 3, p. 23). Si k est pair, alors $n = N+1, N+2, N+3$ ou $N+4$ appartient à l'intervalle $[(k+1)\pi, (k+2)\pi[$ et dans ce cas $u_n = -1$. Si k est impair, alors $u_N = -1$ Nous venons de montrer qu'il existe toujours $n \geqslant N$ tel que $u_n = -1$. Donc la suite n'est pas positive à partir d'un certain rang.*

IV NOTION DE LIMITE

La notion de « *à partir d'un certain rang* » introduit dans la section précédente va se trouver être l'outil clé pour formaliser correctement l'idée, très subtile, de « *limite* » d'une suite.

1. Position du problème & définition

Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous savons tous ce que signifie intuitivement l'idée

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}.$$

Nous voulons ici *formaliser* mathématiquement cette idée afin que cette formalisation devienne totalement rigoureuse.

D'un point de vue naïf, la suite (u_n) *tend vers* l quand n *tend vers* l'infini quand u_n *se rapproche de* l *aussi proche que l'on veut quand* n *tend vers l'infini.* Mathématiquement, nous traduirons cette phrase par :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad |u_n - l| < \varepsilon \quad \text{à partir d'un certain rang.}}$$

Le morceaux de phrase « u_n *se rapproche de* l *aussi proche que l'on veut* » se traduit donc par : *pour* ε *aussi petit que l'on veut, i.e. quelconque* (ε jouant le rôle d'un infiniment petit ici), *la distance* (ou l'écart) *entre* u_n *et* l *est inférieur à* ε. Le morceaux de phrase « *quand* n *tend vers l'infini* » se traduit quant à lui par *à partir d'un certain rang.*
De même, de manière naïve, la suite (u_n) *tend vers* $+\infty$ quand n *tend vers* l'infini quand u_n *est aussi grand que l'on veut quand* n *tend vers l'infini.* Mathématiquement, nous traduirons cette phrase par :

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \quad u_n \geqslant M \quad \text{à partir d'un certain rang.}}$$

Le morceaux de phrase « u_n *est aussi grand que l'on veut* » se traduit donc par : *pour* $M \in \mathbb{R}$ *aussi grand que l'on veut, i.e. quelconque* (M jouant le rôle d'un infiniment grand ici), u_n *dépasse* M. Le morceaux de phrase « *quand* n *tend vers l'infini* » se traduit quant à lui comme précédemment par *à partir d'un certain rang.*
Le cas d'une limite vers $-\infty$ est similaire. Nous obtenons ainsi la définition suivante :

Définition 14
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle et* $l \in \mathbb{R}$*. Nous dirons que :*
- ***la limite de*** (u_n) ***existe et vaut*** l, *noté :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l,$$

si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - l| < \varepsilon.}$$

- ***la limite de*** (u_n) ***existe et vaut*** $+\infty$, *noté :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty,$$

si :

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant M.}$$

- ***la limite de*** (u_n) ***existe et vaut*** $-\infty$, *noté :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty,$$

si :

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant M.}$$

Remarques 4

1. ***Converger/diverger.*** *Dans le cas où*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

nous dirons aussi que (u_n) ***converge*** *vers l. Dans le cas où (u_n) ne converge vers aucun nombre réel, nous dirons que la suite* ***diverge.*** *Une suite divergente peut donc avoir pour limite $\pm\infty$, on dit dans ce cas qu'elle* ***diverge vers*** *$\pm\infty$; elle peut aussi ne pas avoir de limite.*

2. ***Notation.*** *Pour simplifier les différents cas de limites finies ou infinies, nous serons amené dans la suite à introduire l'ensemble suivant :*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cap \{-\infty, +\infty\}.$$

Nous prendrons ceci comme une simple notation[4].

3. ***Notation abusives pour les limites.*** *Enfin, mentionnons qu'il arrivera que nous notions par abus de langage une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ de la manière suivante :*

$$\lim u_n = l \quad ou \quad u_n \longrightarrow l.$$

2. Méthodologie

Le bon usage de cette définition de limite de suite nécessite de correctement distinguer deux choses :

Méthode 1

1. *comment* ***démontrer*** *une limite à l'aide de la définition ?*
2. *comment* ***utiliser*** *le fait que la limite d'une fonction quelque part soit connue ?*

Dans le premier cas :

1. *Nous devons commencer par nous donner un $\epsilon > 0$ ou $M \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Cela se traduira dans le corps de la démonstration par*

$$\boxed{\text{« Soit } \varepsilon > 0 \text{ » ou « Soit } M \in \mathbb{R} \text{ ».}}$$

2. *Une fois ce ϵ ou ce M fixé, nous devons exhiber un rang entier $N \in \mathbb{N}$ vérifiant la propriété voulue. Ce N, qui dépend de ϵ ou M et de la suite étudiée, n'aura pas besoin d'être explicité, seule l'existence de ce nombre importe et doit être rigoureusement justifiée.*

4. Comme toujours en mathématiques, « nouvelle notation » signifie peu ou prou « nouveau concept ». Le cas présent ne déroge pas à cette règle. La notation $\overline{\mathbb{R}}$ fait référence à une *compactification de* $\mathbb{R}$. Mais ce point dépasse pour l'instant largement le niveau de ce cours.

Dans le deuxième cas, nous choisirons une valeur adéquate de ϵ ou de M (par exemple : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{n}$...). Le fait que la limite existe nous garantira alors qu'il existe un rang entier N à partir duquel une certaine propriété. Et il s'agira d'utiliser l'inégalité fournie de manière intelligente...

EXEMPLE 7 — *Donnons un exemple de la première méthode :*

1. *Considérons la suite $u_n = \frac{1}{n}$ définie pour tout $n \geqslant 1$. Montrons que $u_n \longrightarrow 0$. Pour ce faire, nous nous donnons $\varepsilon > 0$ quelconque. D'après la propriété d'Archimède (22), il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N\varepsilon > 1$. Alors pour tout $n \geqslant N$, on a $u_n < \varepsilon$. Nous venons de montrer que $|u_n| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang pour ε quelconque. Donc la suite u_n tend vers 0.*
2. *Considérons la suite $u_n = n^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $u_n \longrightarrow +\infty$. Pour ce faire, nous nous donnons $M \in \mathbb{R}$ quelconque. Nous pourrions utiliser à nouveau la propriété d'Archimède, mais nous préférons (pour varier un peu) utiliser la partie entière. Posons donc $N = E(M) + 1$. Alors pour tout $n \geqslant N$, on a $u_n = n^2 \geqslant n \geqslant N \geqslant M$. Et nous venons donc de montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.*

Donnons maintenant un exemple de la deuxième méthode : supposons que la suite (u_n) tend vers 1. Montrons par exemple que $u_n \geqslant \frac{9}{10}$ à partir d'un certain rang. Choisissons de prendre $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Alors il existe un rang entier N à partir duquel $|u_n - 1| \leqslant \frac{1}{10}$. Mais alors :

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{9}{10} \leqslant u_n.$$

C'est le résultat cherché. Pour d'autres exemples, nous renvoyons à toute les propriétés sur les limites des sections suivantes qui vont constituer une constellation d'illustrations de cette méthode.

3. Variations sur la définitions

§ *1. Restrictions sur ε et M* — Il faut noter que l'écriture de la définition de la limite admet plusieurs versions équivalents. On a par exemple les différentes écritures suivantes.

PROPOSITION 8
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.
- *La suite (u_n) tend vers l si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - l| \leqslant \varepsilon.}$$

- *Soit $\varepsilon_0 > 0$. La suite (u_n) tend vers l si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - l| < \varepsilon.}$$

De même, dans le cas d'une limite infinie, si par exemple $l = +\infty$.
- *La suite (u_n) tend vers l si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n > M.}$$

— *Soit $M_0 \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) tend vers l si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall M \geqslant M_0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant M.}$$

Le cas d'une limite $l = -\infty$ est similaire. Nous laissons le lecteur écrire les cas correspondants.

Preuve — Les preuves étant très proches dans les cas d'une limite finie et d'une limite infinie, nous ne démontrons ici que le cas d'une limite finie. Prenons donc $l \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite réelle.

— Si (u_n) tend vers l alors par définition

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - l| < \varepsilon$$

D'où

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

— Réciproquement, prenons $\varepsilon > 0$ et appliquons la caractérisation à $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe alors un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais alors, à partir du rang N, on a :

$$|u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

La définition de la limite est donc vérifiée et (u_n) tend donc vers l.

— Fixons $\varepsilon_0 > 0$ et supposons que (u_n) tende vers l. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel

$$|u_n - l| < \varepsilon.$$

Ceci est vrai, en particulier, $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. D'où la caractérisation proposée est vraie.

— Réciproquement, fixons $\varepsilon > 0$. Appliquons notre caractérisation à $\varepsilon' = \min\left(\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon\right)$. Ainsi il existe un rang N à partir duquel on a :

$$|u_n - l| < \varepsilon'.$$

Mais comme $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$, nous retrouvons la définition de la limite et donc (u_n) tend vers l.

□

EXEMPLE 8 — *On utilisera souvent cette propriété sous la forme très simple suivante :*

> *(u_n) tend vers $+\infty$ si, et seulement si, $\forall M > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que :*
>
> $$\forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant M.$$

§ *2. La limite est une information de nature asymptotique* — À la différence du point précédent qui n'apporte pas réellement d'information nouvelle, ce paragraphe porte une idée importante : la notion de limite est une *information de nature asymptotique*, cela n'a donc aucun sens de dire que la suite (u_n) « converge vers un nombre réel à partir d'un certain rang », ou que « (u_n) tend vers $\pm\infty$ à partir d'un certain rang ».

Vérifions ce fait pour le cas d'une convergence vers un nombre réel l. Dire que la suite (u_n) converge vers l à partir du rang $N_0 \in \mathbb{N}$, signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant N_0,\ |u_n - l| < \varepsilon.$$

Cela signifie donc, en posant $N' = \max(N, N_0)$, que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N',\ |u_n - l| < \varepsilon.$$

Une autre façon de traduire le caractère asympototique de la notion de limite consiste à écrire la proposition suivante.

Proposition 9
Soient u et v deux suites égales à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telles que :

$$\exists N_0 \ : \ n \geqslant N_0 \ u_n = v_n.$$

Alors :

$$\boxed{\lim u = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \ \textit{ si, et seulement si, } \ \lim v = \ell.}$$

Ce résultat est évident d'après les définitions. On peut ainsi changer un nombre fini de termes d'une suite, sans changer sa limite éventuelle.

C'est pourquoi dans la suite de ce chapitre, la plupart des résultats énoncés concerneront des propriétés vraies à partir d'un certain rang.

4. Observations premières

Proposition 10 (Unicité de la limite)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors l est unique.

Preuve — Supposons que notre suite (u_n) converge vers deux limites différentes [5] l_1 et l_2 dans $\mathbb{R}$. Comme l_1 est différent de l_2, on peut supposer par exemple que $l_1 < l_2$. Prenons [6] alors $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$. Alors il existe un rang entier N_1 tel que

$$\forall n \geqslant N_1 \quad l_1 - \varepsilon < u_n < l_1 + \varepsilon.$$

et un rang entier N_2 tel que :

$$\forall n \geqslant N_2 \quad l_2 - \varepsilon < u_n < l_2 + \varepsilon.$$

Mais alors si $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a :

$$u_n < l_1 + \varepsilon = l_2 - \varepsilon < u_n.$$

D'où la contradiction. Nécessairement $l_1 = l_2$ et nous venons de prouver l'unicité de la limite de la suite. □

Proposition 11
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. *Si (u_n) converge, alors (u_n) est bornée.*
2. *Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) est minorée.*
3. *Si (u_n) tend vers $-\infty$, alors (u_n) est majorée.*

Preuve —Démontrons successivement les différents cas :

1. Supposons que (u_n) converge. Prenons par exemple $\varepsilon = 1$. Il existe alors un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel

   $$u_n \in]l-1, l+1[.$$

   Donc (u_n) est bornée à partir d'un certain rang. Mais le fait 1 p. 37 nous montre qu'alors (u_n) est bornée.

---

5. Ici, la démarche est totalement classique : de manière générale, pour démontrer l'unicité d'un objet, on suppose qu'il en existe deux vérifiant la même propriété et on montre qu'ils sont égaux.
6. On remarque ici l'utilisation explicite de la deuxième méthode mentionnée dans le paragraphe précédent.

2. Supposons que (u_n) tend vers $+\infty$. Prenons par exemple $M = 0$. Il existe alors un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel
$$u_n \geqslant 0.$$
Donc (u_n) est minorée à partir d'un certain rang. Mais à nouveau le fait 1 p. 37 nous montre qu'alors (u_n) est minorée.
3. La preuve est similaire au cas précédent. ◀

□

PROPOSITION 12
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
1. *Si (u_n) converge vers un réel l et si $l > l'$, alors*
$$u_n > l' \qquad \text{à partir d'un certain rang.}$$
2. *Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors pour tout réel $M \in \mathbb{R}$, on a :*
$$u_n > M \qquad \text{à partir d'un certain rang.}$$
3. *Si (u_n) tend vers $-\infty$, alors pour tout réel $M \in \mathbb{R}$, on a :*
$$u_n < M \qquad \text{à partir d'un certain rang.}$$

Preuve

1. Prenons par exemple $\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$. Alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel
$$l' < \frac{l+l'}{2} = l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon.$$
D'où le résultat.
2. les deux autres points sont de simples traductions de la définition.

□

REMARQUE 6 — *Le premier point va se révéler particulièrement utile dans des situations où il est par exemple nécessaire d'utiliser le fait que si une suite u tend vers un nombre strictement positif, alors cette suite est à valeurs strictements positive à partir d'un certain rang.*

Citons aussi deux résultats très utiles pour la suite de notre étude.

LEMME 1
Soient u une suite réelle et ℓ un réel. S'il existe une suite v convergeant vers 0 telle que, à partir d'un certain rang :
$$|u_n - \ell| \leqslant v_n,$$
alors la suite u converge vers ℓ.

Preuve — Puisque la suite v tend vers 0, on a :
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |v_n| \leq \varepsilon,$$
puis il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel :
$$|u_n - \ell| \leqslant v_n,$$
et donc :
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_2 = \max(n_0, n_1)\ :\ n \geqslant n_2 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

□

Exemple 9 — *Soit f une fonction majorée définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. Si $M = \sup_{\mathcal{D}} f$, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M.$$

En effet, d'après la caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément $x_n \in \mathcal{D}$ tel que :

$$M - \frac{1}{2^n} \leqslant f(x_n) \leqslant M.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $|f(x_n) - M| \leqslant 2^{-n}$, ce qui montre $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M$.

Méthode 5 — *Pour démontrer qu'une suite u converge vers un réel ℓ, on peut donc commencer par évaluer $|u_n - \ell|$ et essayer de le majorer pour :*

- *soit trouver une suite v tendant vers 0 telle que $|u - \ell| \leq v$,*
- *soit montrer :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Par exemple, la majoration très importante et déjà vue dans le paragraphe sur l'étude de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ p.12 :

$$||u_n| - |l|| \leqslant |u_n - l|$$

montre :

Lemme 2
Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $|u| = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.

Exemple 10 — *On notera que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger sans que la suite converge, comme le montre l'exemple de la suite $(-1)^n$ que nous retrouverons par la suite.*

5. Cas simples de non existence de limite

Ici, nous nous demandons comment montrer simplement qu'une suite ne possède pas de limite. Nous reviendrons sur cette question de manière plus approfondie à l'aide de l'outil des suites extraites dans la section correspondante.

La première méthode consiste à montrer la négation de la définition de la limite.

Méthode 6 — ***Négation de la définition de la limite*** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On a :*

1. *la suite (u_n) ne converge pas vers l si et seulement si*

$$\boxed{\exists\varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\quad \textit{tel que}\ |u_n - l| \geqslant \varepsilon.}$$

2. *la suite (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$ si et seulement si*

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\quad \textit{tel que}\ u_n \leqslant M.}$$

3. la suite (u_n) *ne diverge pas vers* $-\infty$ *si et seulement si*

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N, \quad \textit{tel que } u_n \geqslant M.}$$

EXEMPLE 11 — *Montrons que la suite* $u = \left(n\sin(n\frac{\pi}{3})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne diverge pas vers* $\pm\infty$ *: pour tout réel* M *et pour tout rang* $N \in \mathbb{N}$*, posons :*

$$n = 6E(M) + 1, \quad u_n = \frac{\sqrt{3}}{2}(6E(M)+1) > M,$$

et posons :

$$n = 6E(M) + 5, \quad u_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}(6E(M)+1) < -M.$$

Donc u *ne diverge pas vers* $\pm\infty$*.*

La deuxième méthode consiste à montrer qu'une suite n'a pas de limite en montrant qu'elle contredit un conséquence de la définition de la limite. À ce stade du cours les conséquences de la définition que nous chercherons à nier sont en général les suivant :

1. Pour montrer qu'une suite ne converge pas vers un réel, on pourra montrer qu'elle n'est pas bornée. C'est ainsi que l'on montre par exemple que la suite $(n(-1)^n)$ ne converge pas vers un réel.
2. Pour montrer qu'une suite ne converge pas vers $+\infty$, on pourra montrer qu'elle n'est pas minorée à partir d'un certain rang (comme dans l'exemple précédent).
3. Pour montrer qu'une suite ne converge pas vers un réel, on pourra montrer qu'elle se rapproche infiniement de deux réels distincts. Nous utiliserons ce critère en lien avec la notion de sous-suite que nous étudierons p. 54.
4. Etc...

EXEMPLE 12 — *Montrons que la suite* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite. Étant bornée, elle ne diverge pas vers* $\pm\infty$*. Si cette suite convergeait vers une limite* l*, alors il existerait un rang* N *à partir duquel*

$$|l - (-1)^n| < 1.$$

Mais alors $|l-1| < 1$*, soit* $l > 0$ *et* $|l+1| < 1$*, soit* $l < 0$*. D'où la contradiction.*

Nous verrons au fil des paragraphes suivants bien d'autres critères très utiles permettant de montrer qu'une suite n'est pas convergente.

V Opérations sur les limites

Cette section regroupe les résultats, que l'on appelle *théorèmes généraux sur les limites*, qui permettent de déterminer la limite d'une suite qui est somme, produit ou quotient de suites possédant des limites.

Nous allons travailler en deux temps : nous commencerons par étudier les résultats sur les limites finies, puis nous passerons aux résultats sur les limites infinies.

1. Limites finies

Proposition 13 (Combinaisons linéaires de limites finies)
Étant données deux suites u et v convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2, ainsi que deux réels λ et μ, la suite $\lambda\, u + \mu\, v$ converge vers $\lambda\,\ell_1 + \mu\,\ell_2$.

Preuve — Pour tout n, l'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$\left|(\lambda\, u_n + \mu\, v_n) - (\lambda\,\ell_1 + \mu\,\ell_2)\right| \leq |\lambda|\,|u_n - \ell_1| + |\mu|\,|v_n - \ell_2|.$$

Les suites $\big(|u_n - \ell_1|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(|v_n - \ell_2|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0, donc leurs combinaisons linéaires aussi, ce qui prouve que la suite $\Big(\left|(\lambda\, u_n + \mu\, v_n) - (\lambda\,\ell_1 + \mu\,\ell_2)\right|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une suite tendant vers 0, et donc

$$\lim(\lambda\, u + \mu\, v) = \lambda\,\ell_1 + \mu\,\ell_2,$$

d'après le lemme 1. □

Proposition 14 (Produit de limites finies)
Étant données deux suites u et v convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2, la suite uv converge vers $\ell_1\ell_2$.

Preuve — Pour tout n, on peut écrire [7] :

$$\left|u_n\, v_n - \ell_1\,\ell_2\right| = \left|u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1)\right| \leq |u_n|\,|v_n - \ell_2| + |\ell_2|\,|u_n - \ell_1|\,.$$

- La suite $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, puisqu'elle converge, et la suite $\big(|v_n - \ell_2|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc la suite $\big(|u_n|\,|v_n - \ell_2|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- De même la suite $\big(|\ell_2|\,|u_n - \ell_1|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

D'où l'on déduit que la somme de ces deux suites tend vers 0 d'après la propriété précédente. Puis l'on obtient que la suite $(|u_n\, v_n - \ell_1\,\ell_2|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après le lemme 1 et donc

$$\lim(u\, v) = \ell_1\,\ell_2.$$

□

Proposition 15 (Inverse d'une limite finie)
Si u est une suite convergeant vers une limite $\ell \neq 0$. Alors à partir d'un certain rang n_0 tous les u_n sont non nuls, et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/\ell$.

Preuve — D'après la proposition 12 de la p. 44, on peut trouver un entier n_0 tels que :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ |u_n| \geq \frac{|\ell|}{2}.$$

Pour $n \geqslant n_0$ on peut alors écrire :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{u_n - \ell}{\ell\, u_n}\right| \leq \frac{1}{|\ell| m}|u_n - \ell|,$$

et comme la suite $\left(\frac{1}{|\ell| m}|u_n - \ell|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on en déduit que $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $1/\ell$. □

Corollaire 5 (Quotient de limites finies)
Étant données deux suites u et v convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_2 \neq 0$. Alors la suite $\frac{u}{v}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

7. On notera cette idée très simple et remarquablement efficace dite du « *jeux à somme nulle* » : $a - b = (a - c) + (c - b)$.

Preuve — En écrivant

$$\frac{u_n}{v_n} = u_n \frac{1}{v_n},$$

on obtient le résultat à l'aide des propositions sur le produit et le quotient des limites. ☐

2. Limites infinies

Nous n'énonçons ici que des résultats portant sur $+\infty$. Nous laissons le lecteur transposer ces résultats au cas de $-\infty$ à l'aide de la correspondance :

$$\lim u_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim(-u_n) = -\infty.$$

PROPOSITION 16 (Combinaisons linéaires de limites infinies)
Étant données deux suites u et v divergeant vers $+\infty$, ainsi que deux réels strictement positifs λ et μ, la suite $\lambda u + \mu v$ diverge vers $+\infty$.

Preuve — Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme v est minorée on peut trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant \frac{1}{\mu} m$. La suite u tendant vers $+\infty$, on peut trouver n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant \frac{1}{\lambda} M - \frac{1}{\lambda\mu} m$.

On en déduit de façon évidente $\forall n \geqslant n_0$, $\lambda u_n + \mu v_n \geqslant M$. D'où le résultat. ☐

PROPOSITION 17 (Produit de limites infinies)
Étant données deux suites u et v telles que u diverge vers $+\infty$ et v est minorée à partir d'un certain rang par un nombre strictement positif, la suite uv diverge vers $+\infty$.

Preuve — Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Comme v est minorée à partir d'un certain rang par un nombre strictement positif, on peut trouver $m > 0$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant n_1$, $v_n \geqslant m$.

La suite u tendant vers $+\infty$, on peut trouver $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_2$, $u_n \geqslant \frac{M}{m}$. Pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a alors :

$$v_n \geqslant m > 0 \quad \text{et} \quad u_n \geqslant \frac{M}{m} > 0$$

et donc $u_n v_n \geqslant M$. ☐

PROPOSITION 18 (Inverse d'une limite infinie)
Si u est une suite divergeant vers $+\infty$. Alors, à partir d'un certain rang n_0, tous les u_n sont non nuls, et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0^+.

Preuve — La définition de la divergence de u vers $+\infty$ nous permet de trouver un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 1$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. On peut trouver un rang n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant 1/\varepsilon$. Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a alors

$$0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon.$$

La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0^+. ☐

PROPOSITION 19 (Inverse d'une limite nulle)
Si u est une suite convergeant vers 0 dont tous les termes sont strictement positif à partir d'un certain rang n_0. Alors, à partir de ce rang n_0, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et diverge vers $+\infty$.

Preuve — Il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n > 0$. Soit $M > 0$. Le réel $1/M$ est un nombre strictement positif, donc l'hypothèse $\lim u = 0$ permet de trouver un entier $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0', \ |u_n| \leqslant \frac{1}{M}.$$

En posant $n_1 = \max(n_0, n_0')$, on a alors, pour $n \geqslant n_1$: $\frac{1}{u_n} \geqslant M$.

D'où la divergence de $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $+\infty$. □

3. Formes indéterminées

Les deux paragraphes précédents ne permettent pas de conclure dans tous les cas. Certains cas donnent lieu à des situations dans lesquelles toutes les conclusions sont possibles (la limite peut exister dans $\mathbb{R}$, la limite peut être $\pm\infty$, la limite peut ne pas exister). Nous appelons ces cas, des **formes indéterminées.**

Nous dressons, ci-dessous la liste des formes indéterminées les plus classiques qu'il faudra savoir repérer dans les exercices. On se donne u et v deux suites réelles.

Somme : si $\lim u = +\infty$ et $\lim v = -\infty$, alors la limite de la somme $u+v$ est indéterminée.

Exemple : pour $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n + (-1)^n$ la somme n'a pas de limite, pour $u_n = n$ et $v_n = \lambda n$ ($\lambda \in \mathbb{R}_-^*$) la somme tend vers $-\infty$ si $\lambda < -1$, 0 si $\lambda = -1$ et $+\infty$ si $\lambda \in]-1, 0[$.

Produit : si $\lim u = \pm\infty$ et $\lim v = 0$, alors la limite du produit uv est indéterminée.

Exemple : pour $u_n = n$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ le produit n'a pas de limite, pour $u_n = n$ et $v_n = n^\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}_-^*$) le produit tend vers 0 si $\lambda < -1$, 1 si $\lambda = -1$ et $+\infty$ si $\lambda \in]-1, 0[$.

Exponentiation : si $\lim u = 1$ et $\lim v = +\infty$, alors la limite de la suite $(u_n)^{v_n}$ est indéterminée.

Exemple : prenons $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = n^\lambda$ pour $\lambda > 0$. Alors :

$$u_n^{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^\lambda} = e^{n^\lambda \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Admettons temporairement (cela sera démontré à l'aide de la définition de la dérivé des fonctions) que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Alors :

$$\lim n^\lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } \lambda = 1 \\ +\infty \text{ si } \lambda > 1 \\ 0^+ \text{ si } 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

D'où $(u_n)^{v_n}$ tend donc ou bien vers $+\infty$ si $\lambda > 1$, ou bien un réel sinon. En s'inspirant de cette méthode, on peut aussi montrer que la suite

$$\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$$

n'a pas de limite.

VI Limite et relation d'ordre

Dans cette section, nous souhaitons explorer deux types de résultats :

— Comment, à l'aide d'inégalités sur la suite, obtenir une information sur la limite ?
— Comment, à l'aide d'inégalités sur la suite, obtenir la limite d'une suite ?
Puis nous déduirons un théorème d'existence de limites, dont l'importance sera, pour nous, primordiale.

1. Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 20
Soient u et v deux suites convergentes.

1. *Si la suite u est positive à partir d'un certain rang, alors* $\lim u \geqslant 0$.
2. *Si $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors* $\lim u \geqslant \lim v$.

Le fait d'écrire une inégalité portant sur les termes d'une suite et d'en déduire une inégalité portant sur la limite éventuelle de cette suite, s'appelle un *passage à la limite*. Ainsi par exemple, nous savons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + \frac{1}{n} > 1, \qquad (*)$$

d'où « *l'on déduit par passage à la limite dans l'inégalité* $(*)$ le fait que

$$\lim u_n \geqslant 1.$$

Il apparaît immédiatement, avec cette exemple très simple que la conclusion est en réalité, ici, une égalité. On tire de cette remarque l'observation importante que :

> On ne peut pas passer à la limite des inégalités strictes, mais uniquement des inégalités large.

Preuve

1. Notons l la limite de u. Si $l < 0$, alors d'après la proposition 12 p. 44, la suite u serait inférieure strictement à 0 à partir d'un certain rang, or nous avons supposé le contraire. Nécessairement $l \geqslant 0$.
2. On applique le résultat précédent à la suite $u - v$.

□

2. Obtention de limites par inégalité

Nous distinguerons ici deux cas.

§ 1. *Cas d'une limite finie*

Proposition 21
Soient u et w deux suites convergeant vers la même limite. Si v est une suite vérifiant qu'à partir d'un certain rang :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n,$$

alors la suite v converge et $\lim u = \lim v = \lim w$.

Preuve — D'après les hypothèses, on peut écrire :

$$\exists n_0 \,:\, \forall n \geqslant n_0 \,,\, 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n \,.$$

Puisque $\lim(w-u) = 0$, le lemme 1 p. 44 permet de conclure que la suite $v-u$ converge vers 0. Enfin, comme $v = u + (v-u)$, on a $\lim v = \lim u$ d'après les théorèmes généraux. □

Remarques 5

1. *Attention, si l'on omet l'hypothèse $\lim u = \lim w$, on ne peut absolument rien conclure comme le prouve l'exemple des suites $u_n = -1$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1$.*
2. *Il faut bien remarquer la différence entre ce résultat et le résultat du paragraphe précédent.*
   — *Ici, on suppose la convergence de toutes les suites intervenant dans la proposition, puis l'on en déduit l'existence et la valeur d'une limite.*
   — *Dans la proposition 21, le fait que v converge fait parti des hypothèses. La conclusion conduit à une précision sur la valeur de la limite.*

   Ainsi ce résultat d'encadrement constitue une proposition très forte pour démontrer l'existence et calculer la valeur d'une limite.

§ 2. *Cas d'une limite infinie*

Proposition 22

Soient u et v deux suites vérifiant

$$u_n \leqslant v_n$$

à partir d'un certain rang.

1. *Si $\lim u = +\infty$, alors $\lim v = +\infty$.*
2. *Si $\lim v = -\infty$, alors $\lim u = -\infty$.*

Preuve — On revient à la définition. Montrons par exemple le premier point. Prenons $M \in \mathbb{R}$, il existe donc un rang n_0 à partir duquel

$$M \leqslant u_n \,.$$

Puis il existe un rang n_1 à partir duquel

$$u_n \leqslant v_n \,.$$

Donc à partir du rang $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a :

$$M \leqslant u_n \leqslant v_n \,.$$

D'où le résultat. □

3. Conséquence de la propriété de la borne supérieure

Théorème 5

Soit u une suite croissante.

1. *Elle est majorée si, et seulement si, elle converge. Dans ce cas la limite vaut :*

$$\ell = \sup \mathrm{Supp}(u).$$

2. *Elle n'est pas majorée si, et seulement si, elle tend vers $+\infty$.*

Preuve

1. Nous avons déjà montré de manière générale que si la suite u converge alors elle est bornée donc majorée. Supposons réciproquement que la suite u est majorée. Le support de la suite u, à savoir l'ensemble :

$$\mathrm{Supp}(u) = \{u_n \,,\; n \in \mathbb{N}\} \,,$$

est non vide et majoré. Donc il possède une borne supérieure ℓ. Il reste alors à montrer que u converge vers ℓ en établissant que :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\ :\ \forall n \geqslant n_0\,,\ \ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \ell$. Comme u est croissante, on a :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ \ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \ell$$

ce qui termine la démonstration.

2. Si u tend vers $+\infty$, elle est évidemment non majorée. Réciproquement, supposons u non majorée et montrons qu'elle tend vers $+\infty$.
Soit M un réel quelconque. Il ne majore pas la suite, donc on peut trouver un entier n_0 tel que $M < u_{n_0}$. Comme la suite u est croissante, on a :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ M < u_{n_0} \leqslant u_n,$$

ce qui prouve que $\lim u = +\infty$.

$\square$

REMARQUES 6 *1. De même que pour le cas d'une suite crossante, nous avons le résultat suivant dans le cas décroissant. Soit u une suite décroissante.*

(a) elle est minorée si, et seulement si, elle converge. Dans ce cas la limite vaut :

$$\ell = \inf \mathrm{Supp}(u).$$

(b) elle n'est pas minorée si, et seulement si, elle tend vers $-\infty$.

2. Nous obtenons donc que toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

3. On notera qu'en plus de donner un critère théorique de convergence, ce théorème donne la valeur théorique de la limite ainsi qu'une information sur celle-ci : tout majorant de la suite est un majorant de sa limite.

EXEMPLE 13 — *La suite $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ est évidemment croissante. On peut vérifier par récurrence $\forall n \geqslant 1\,,\ \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, ce qui donne :*

$$\forall n \geqslant 1\,,\ u_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 3.$$

La suite u est donc croissante et majorée par 3, donc elle converge et sa limite est inférieure ou égale à 3.

VII LE THÉORÈME DE CÉSARO

Le théorème de Césaro constitue un résultat remarquablement simple et utile qu'il est essentiel de connaître et que nous retrouverons avec les fonctions.

THÉORÈME 6 (Césaro)
Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel l. Alors la suite dont le terme général est la moyenne des n premiers termes de la suite u_n converge vers l. Autrement dit :

$$\frac{u_0 + \ldots + u_n}{n+1} \longrightarrow l.$$

Le sens de ce résultat est particulièrement intuitif : il s'agit de dire que si une suite converge vers un réel l alors sa **moyenne arithmétique** converge vers le réel l.

REMARQUE 7 — *On notera que la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite de la suite* $((-1)^n)$.

Preuve — Écrivons la convergence de la suite (u_n) vers l. Pour $\varepsilon > 0$, il existe un entier N à partir duquel :

$$|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi pour tout $n \geqslant N$, on a

$$\left|\frac{u_0 + \ldots + u_n}{n+1} - l\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k - l| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}|u_k - l| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais la suite

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}|u_k - l|\right)$$

converge vers 0, donc il existe un rang N' à partir duquel

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}|u_k - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En conclusion, pour $n \geqslant \max(N, N')$, on a :

$$\left|\frac{u_0 + \ldots + u_n}{n+1} - l\right| \leqslant \varepsilon.$$

□

En fait, la preuve qui précède se généralise facilement à l'énoncé suivant.

PROPOSITION 23 (Césaro — version pondérée)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur positive telle que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel l. Alors la suite dont le terme général est la moyenne des n premiers termes de la suite u_n pondérés par les n premiers termes de la suite (a_n) converge vers l. Autrement dit :

$$\frac{a_0u_0 + \ldots + a_nu_n}{a_0 + \ldots + a_n} \longrightarrow l.$$

Le sens de ce résultat se comprend de manière similaire au théorème de Césaro : il s'agit de dire que si une suite converge vers un réel l alors sa *moyenne arithmétique pondérée des coefficients* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel l. On notera que l'énoncé original du théorème de Césaro correspond au cas de la pondération constante $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE 14 — *Considérons une suite u_n qui tend vers l. Alors on a la convergence suivante :*

$$\frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2} \longrightarrow \frac{l}{2}.$$

On choisit ici en effet la pondération

$$a_n = n.$$

Ainsi :

$$\frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}\frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{\frac{n(n+1)}{2}} \longrightarrow \frac{1}{2}l.$$

REMARQUE 8 — *On notera en fin deux formes très utiles du théorème de Césaro :*

1. ***la version logarithme :** si une suite (u_n) à terme strictement positif converge vers un réel $l > 0$, alors sa **moyenne géométrique** converge vers l, i.e. :*

$$\sqrt[n]{u_1 \cdot \ldots \cdot u_n} \longrightarrow l.$$

2. ***la version télescopique :** si une suite (u_n) est telle que :*

$$u_{n+1} - u_n \longrightarrow l,$$

alors

$$\frac{u_n}{n} \longrightarrow l.$$

Et on n'oubliera pas la version télescopique logarithmique : si une suite (u_n) à terme strictement positif est telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l > 0,$$

alors $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow l$.

VIII SUITES EXTRAITES

Dans cette section, nous définissons un outil fondamental, celui de *sous-suite* et de *valeur d'adhérence.*

1. Notion de sous-suite

DÉFINITION 15
*Une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite extraite**, ou **sous-suite** d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application ϕ, strictement croissante, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\phi(n)}.$$

Dans ce cas, l'application ϕ s'appelle une **extraction** et nous dirons que *la suite v est la suite extraite de u pour l'extraction ϕ.* Cela se notera :

$$v = u_\phi.$$

EXEMPLES 7

1. *La suite obtenue par décalage de p termes ($p \in \mathbb{N}$) :*

$$(u_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$$

est une suite extraite de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. *Les suites des termes pairs et des termes impairs :*

$$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'étude des sous-suites va donc nécessiter le maniement des applications strictement croissantes

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \phi(n). \end{array}$$

Pour ce faire, le lemme suivant va se révéler très utile.

Lemme 3
Soit ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi(n) \geqslant n.$$

Preuve — Il s'agit d'une simple récurrence sur l'entier n. □

2. Notion de valeur d'adhérence

Définition 16
Soit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous dirons que $l \in \overline{\mathbb{R}}$ est une ***valeur d'adhérence*** *de la suite u s'il existe une extraction ϕ telle que*

$$l = \lim u_\phi.$$

Exemple 15 — *Ainsi, 1 et -1 sont deux valeurs d'adhérences de la suite $(-1)^n$. De même ± 1 et $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont quatre valeurs d'adhérences de la suite $\left(\cos(\frac{n\pi}{4})\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Autrement dit, l est une valeur d'adhérence de la suite u si, et seulement si, u se « rapproche aussi souvent que l'on veut et aussi proche que l'on veut » de la valeur l. Et il est parfois plus simple de caractériser une valeur d'adhérence à l'aide de cette idée que l'on traduit de la manière suivante.

Proposition 24
Soit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

- *$l \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de la suite u si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N, \quad |u_n - l| < \varepsilon.}$$

- *$+\infty$ est valeur d'adhérence de la suite u si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N, \quad u_n \geqslant M.}$$

- *$-\infty$ est valeur d'adhérence de la suite u si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N, \quad u_n \leqslant M.}$$

Preuve —Ces trois démonstrations sont similaires et nous ne démontrons que le premier point. Nous raisonnons par double implication :

— Supposons que l soit valeur d'adhérence de la suite (u_n). Alors il existe une extraction $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que
$$u_{\phi(n)} \longrightarrow l.$$
Prenons $\varepsilon > 0$, il existe alors un rang N_ε à partir duquel
$$\left|u_{\phi(n)} - l\right| < \varepsilon.$$
Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons
$$n = \begin{cases} \phi(N_\varepsilon) \text{ si } N_\varepsilon > N \\ \phi(N) \text{ sinon.} \end{cases}$$
Dans les deux cas, le lemme 3 montre que $n \geqslant N$ et que $|u_n - l| < \varepsilon$.

— Réciproquement, supposons que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$
Nous allons construire l'extraction ϕ par récurrence :
  — nous savons qu'il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que
$$|u_{n_0} - l| < 1.$$
  Nous posons alors :
$$\phi(0) = n_0.$$
  — nous savons qu'il existe $n_1 \geqslant \phi(0) + 1$ tel que
$$|u_{n_1} - l| < \frac{1}{2}.$$
  Nous posons alors :
$$\phi(1) = n_1.$$
  — supposons construits $0 \leqslant n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ tels que
$$|u_{n_i} - l| < \frac{1}{i+1}\ \forall i = 0, \ldots, k.$$
  Nous savons qu'il existe $n_{k+1} \geqslant n_k + 1$ tel que
$$\left|u_{n_{k+1}} - l\right| < \frac{1}{k+2}.$$
  Nous posons alors :
$$\phi(k+1) = n_{k+1}.$$
Nous venons construire par récurrence une fonction $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{\phi(n)} - l\right| < \frac{1}{n+1}$$
La sous-suite u_ϕ tend donc par définition vers l.

□

REMARQUE 9 — *Cette démonstration est très importante car elle illustre une nouvelle méthode qui consiste à construire une extraction ϕ, pour une suite, par un procédé récurrent. Nous retrouvons plusieurs fois cette méthode dans la suite de notre étude.*

EXEMPLE 16 — *Considérons la suite $u_n = \cos(n)\quad \forall n \in \mathbb{N}$. Les valeurs d'adhérences de cette suite forment exactement l'ensemble $[-1,1]$. En effet, considérons $l \in [-1,1]$. Posons $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :*
$$\cos(\theta) = l$$
et $\varepsilon \in]0,\pi[$. Le sous-groupe $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc l'ensemble
$$X = (\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}) \cap]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$$
est infini. Pour tout $p + 2q\pi \in X$,
$$|\cos|p| - l| = |\cos(p + 2q\pi) - \cos(\theta)| \leqslant |p + 2q\pi - \theta| \leqslant \varepsilon.$$
Donc $\cos|p| \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. De plus, comme $\varepsilon < \pi$, il y a au plus deux éléments de l'ensemble X qui ont le même cosinus. La suite $(\cos(n))$ prend donc une infinité de valeurs dans $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. Donc l est valeur d'adhérence de la suite. En conséquence, nous venons de montrer que le support de la suite (u_n) est dense dans l'intervalle $[-1,1]$. ◄

3. Lien entre convergence de la suite & convergence de ses sous-suites

Dans ce paragraphe, la question que nous nous posons est : quel est le lien entre valeur d'adhérence et limite d'une suite ? Nous allons répondre à cette question dans ce qui suit.

PROPOSITION 25
Soit (u_n) une suite. Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors pour toute extraction ϕ, la sous-suite u_ϕ converge vers l.

Preuve — Considérons une suite extraite u_ϕ d'une suite convergente (u_n). Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Il existe donc un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel

$$|u_n - l| < \varepsilon.$$

Mais alors pour tout $n \geqslant N$, le lemme 3 nous assure que $\phi(n) \geqslant N$ et donc

$$\left|u_{\phi(n)} - l\right| < \varepsilon,$$

ce qui montre que u_ϕ converge vers l. □

REMARQUES 7

1. *Lu en contraposée, cette proposition nous donne donc un critère très utile pour montrer qu'une suite n'a pas de limite.*
2. *La réciproque de ce théorème est évidemment fausse comme le montre l'exemple déjà considéré de la suite $u_n = (-1)^n$.*
3. *Cette proposition est aussi vraie avec $l = \pm\infty$. La preuve est laissée au lecteur.*
4. *En terme de valeur d'adhérence, ce résultat signifie qu'une suite convergente n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.*

Si la réciproque de ce théorème est fausse, on peut cependant se demander ce qu'il en est si on suppose qu'une suite possède :

1. aucune valeur d'adhérence ;
2. une seule valeur d'adhérence ;
3. deux, trois ou N valeurs d'adhérences ;
4. une infinité de valeurs d'adhérence.

Des réponses à ces différents points vont apparaître avec les résultats qui suivent.

PROPOSITION 26
Soit (u_n) une suite. (u_n) converge vers l si, et seulement si, pour toute extraction ϕ, la sous-suite u_ϕ converge vers l.

Preuve — La première implication est donnée par la propriété qui précède. Il s'agit de démontrer la réciproque. Nous procédons par contraposition : supposons que (u_n) ne converge pas vers l. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ avec

$$|u_n - l| \geqslant \varepsilon_0.$$

Nous allons donc construire une extraction ϕ par récurrence qui vérifie :

$$\left|u_{\phi(n)} - l\right| > \varepsilon_0.$$

Pour cela nous raisonnons comme dans la preuve de la proposition 24 :

— nous savons qu'il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que

$$|u_{n_0} - l| \geqslant \varepsilon_0.$$

Nous posons alors :

$$\phi(0) = n_0.$$

— nous savons qu'il existe $n_1 \geqslant \phi(0)+1$ tel que
$$|u_{n_1} - l| \geqslant \varepsilon_0.$$
Nous posons alors :
$$\phi(1) = n_1.$$
— supposons construits $0 \leqslant n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ tels que
$$|u_{n_i} - l| \geqslant \varepsilon_0 \ \forall i = 0, \ldots, k.$$
Nous savons qu'il existe $n_{k+1} \geqslant n_k + 1$ tel que
$$\left|u_{n_{k+1}} - l\right| \geqslant \varepsilon_0.$$
Nous posons alors :
$$\phi(k+1) = n_{k+1}.$$

Nous venons donc de construire une extraction ϕ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left|u_{\phi(n)} - l\right| \geqslant \varepsilon_0.$$
Mais alors la sous-suite u_ϕ ne peut pas converger vers l, ce qui constitue une contradiction. Nécessairement, (u_n) converge vers l. □

Remarques 8

1. *On notera que, comme précédemment, cette proposition reste vraie avec $l = \pm\infty$.*
2. *Encore de même que précédemment, cette proposition fournit un critère de non convergence pour une suite : il suffit de montrer qu'elle possède deux sous-suites qui tendent vers deux limites différentes.*

Proposition 27

Soit (u_n) une suite. Si (u_n) possède deux suites extraites u_{ϕ_1} et u_{ϕ_2} qui convergent vers la même limite l et si
$$\phi_1(\mathbb{N}) \cup \phi_2(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus X$$
où X est un ensemble fini, alors (u_n) converge vers l.

Preuve — Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Nous savons qu'il existe deux rangs N_1 et N_2 tels que :
$$\forall n \geqslant N_1 \ \left|u_{\phi_1(n)} - l\right| < \varepsilon$$
et
$$\forall n \geqslant N_2 \ \left|u_{\phi_2(n)} - l\right| < \varepsilon.$$
Posons
$$N = \max\left(\phi_1(N_1), \phi_2(N_2), \max(X)\right).$$
On note que le maximum de X puisque X est fini. Alors pour tout $n \geqslant N$, $n \notin X$ et donc par hypothèse, il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que
$$n = \phi_i(n')$$
pour $i = 1$ ou 2. Si $n' < N_i$, alors $n \leqslant N$, nécessairement $n' \geqslant N_i$ et donc
$$|u_n - l| < \varepsilon.$$
Nous venons de montrer que la suite (u_n) converge vers l. □

Remarque 10 — *L'hypothèse de convergence vers la même limite pour les deux sous-suites u_{ϕ_1} et u_{ϕ_2} est évidemment essentielle comme le montre à nouveau le contre-exemple de la suite $u_n = (-1)^n$.*

Une application particulièrement importante de ce résultat est le corollaire suivant dont la preuve est une conséquence immédiate de ce qui précède :

COROLLAIRE 6
Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l. Alors (u_n) converge vers l.

EXEMPLE 17 — *Considérons une suite (u_n) telle que les sous-suites*

$$u^{(1)} = (u_{2n}),\ u^{(2)} = (u_{2n+1}) \quad et \quad u^{(3)} = (u_{3n})$$

convergent respectivement vers trois réels l_1, l_2 et l_3. Alors la sous-suite (u_{6n}) est une extraction de $u^{(1)}$ et $u^{(3)}$. Ainsi cette sous-suite converge et converge donc vers $l_1 = l_3$. La sous-suite (u_{6n+3}) est une extraction de $u^{(2)}$ et $u^{(3)}$. Ainsi cette sous-suite converge et converge donc vers $l_2 = l_3$. Donc les sous-suites $u^{(1)}$ et $u^{(3)}$ convergent vers la même limite $l_1 = l_2$. Ainsi la suite (u_n) converge.

4. Le théorème de Bolzano-Weiertrass

Nous arrivons maintenant à un théorème absolument fondamental : le théorème de Bolzano-Weiertrass. Il s'agit d'un résultat dont les utilisations seront extrêment fécondent dans tout le cours d'analyse et qui sera généralisé au travers d'un concept fondateur : la **compacité**.

THÉORÈME 7 (Bolzano-Weierstrass)
Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.

Autrement dit : toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.

Preuve — Notons X l'ensemble des réels x tels qu'il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \geqslant x$.

Comme la suite (u_n) est bornée, l'ensemble X est majoré et non vide donc admet une borne supérieure l. Pour tout $\varepsilon > 0$, $l + \varepsilon =\notin X$ donc il y a au plus un nombre fini d'indices n tels que $u_n > l + \varepsilon$. Par conséquent, il y a une infinité d'indices n tels que ◄

$$l + \varepsilon \geqslant u_n \geqslant l - \varepsilon.$$

Construisons alors une suite extraite $\left(u_{\phi(n)}\right)$ qui converge vers l par récurrence :
- soit $\phi(0)$ un indice n tel que $l + 1 \geqslant u_n \geqslant l - 1$;
- si $\phi(n)$ est défini, on prend pour $\phi(n+1)$ un des indices $k > \phi(n)$ tel que

$$l + 2^{-n-1} \geqslant u_k \geqslant l - 2^{-n-1}$$

(ce qui est possible car il y a une infinité de tels indices).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|u_{\phi(n)} - l\right| \leqslant 2^{-n}$$

et donc $\lim u_{\phi(n)} = l$. □

Nous verrons dans la section suivante sur les suites adjacentes une autre démonstration de ce théorème fondée sur le **principe de dichotomie**.

REMARQUE 11 — *Ce théorème est donne un résultat purement existentiel de sous-suite convergente mais ne donne aucun moyen pour « calculer » une telle sous-suite convergente. En ce sens nous parlerons de résultat **non-explicite**.*

En guise d'application directe de ce théorème, nous avons une réponse à l'une des questions posée au paragraphe précédent :

COROLLAIRE 7
Une suite réelle bornée qui admet une unique valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Preuve — Soit (u_n) une suite réelle bornée qui admet l pour valeur d'adhérence. Si (u_n) ne converge pas vers l, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un indice $n \geqslant N$, $|u_n - l| > \varepsilon$. On peut donc (quitte à ne considérer que les indices n tels que $|u_n - l| > \varepsilon$) extraire une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ qui ne prend pas ses valeurs dans $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. Cette suite est bornée (car (u_n) est bornée) donc admet une valeur d'adhérence d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass qui est différente de l par construction. Ainsi, (un) admet une deuxième valeur d'adhérence et il s'agit d'une contradiction. ◀ □

IX Suites adjacentes

Définition 17
*Soient u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont **adjacentes** si :*
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$,
- *u est croissante et v est décroissante,*
- *$(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*

Proposition 28
Deux suites adjacentes u et v convergent vers une limite commune ℓ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Preuve — D'après les hypothèses, la suite u est croissante et majorée par v_0. Elle converge donc et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \lim u$.

De même, la suite v étant décroissante et minorée par u_0, elle converge et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim v \leqslant v_n$.

De plus l'égalité $v = u + (v - u)$ avec $\lim(v - u) = 0$ prouve que $\lim u = \lim v$.

Les suites u et v convergent donc vers la même limite ℓ vérifiant l'inégalité annoncée. □

Remarque 12 — *Dans la définition des suites adjacentes, la première hypothèse est en fait une conséquence des deux autres : en effet si u est croissante et v décroissante, alors $u - v$ est croissante et, comme elle tend vers 0, elle est négative. Toutefois, on a l'habitude de laisser cette hypothèse superflue dans la définition car c'est souvent la première que l'on « voit ».*

Corollaire 8 (Théorème des segments emboîtés)
Si $\Big([a_n, b_n]\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de segments non vides dont les longueurs tendent vers 0, alors l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est réduit à un point.

Preuve — La suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

Avec les hypothèses on peut donc écrire :
- la suite a est croissante et la suite b est décroissante,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n$,
- $\lim b - a = 0$.

Les suites a et b sont donc adjacentes. Si ℓ désigne leur limite commune, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \ell \leqslant b_n.$$

La valeur ℓ appartient à chacun des intervalles $[a_n, b_n]$, et donc à leur intersection qui est par conséquent non vide.

Réciproquement, si x appartient à $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n \leqslant x \leqslant b_n$$

et par passage à la limite, on déduit :

$$\ell = \lim a \leqslant x \leqslant \lim b = \ell$$

et donc $x = \ell$.

Donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$. □

REMARQUE 13 — *Dans la proposition précédente, le réel ℓ limite des deux suites adjacentes u et v est donc l'unique élément de $\mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

EXEMPLES 8

1. *Montrons que les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes.*
   — *La suite u est évidemment croissante.*
   — *Un calcul élémentaire prouve que $v_{n+1} - v_n = \frac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0$; la suite v est donc décroissante.*
   — *On a $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.*

   Les suites u et v sont donc adjacentes. On peut prouver que leur limite commune est irrationnelle et même que c'est e, base des logarithmes népériens.

   Notons que la stricte monotonie à partir du rang 2 des suites u et v montre que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant e \leqslant v_n$$

   puisque l'une des égalités en n_0 entraînerait l'égalité pour tout $\geqslant n_0$.

2. *Étude de la suite $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p+1}$.*

   On a :

$$u_n - u_{n-2} = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

   ce qui prouve que la suite (u_{2n+1}) est croissante et la suite (u_{2n}) décroissante.
   Comme $u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{-1}{2n+2}$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$.

   Les suites (u_{2n+1}) et (u_{2n}) sont donc adjacentes et d'après le corollaire 6, on en déduit que la suite u est convergente.

   Notons que quand on démontre la convergence d'une suite à l'aide des deux sous-suites adjacentes (u_{2n+1}) et (u_{2n}) on a, de façon naturelle, un encadrement de la limite en calculant deux termes consécutifs de la suite.

   Ici on peut donc encadrer la limite ℓ entre u_{201} et u_{200} ; le calcul de ces deux termes donne $0.690 \leqslant \ell \leqslant 0.696$. On peut prouver que cette limite ℓ vaut $\ln 2$.

REMARQUE 14 — ***Une autre démonstration de Bolzano-Weierstrass.*** *Soit u une suite bornée. Désignons par m (resp. M) un minorant (resp. un majorant) de la suite u.*

— *Nous allons construire une suite de segments emboîtés $I_n = [a_n, b_n]$ tels que, pour tout n, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ soit infini.*
  Pour cela, on prend $I_0 = [m, M]$ (qui contient tous les termes de la suite) et, supposant construit $I_n = [a_n, b_n]$ tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_n\}$ soit infini, au moins l'un des deux

intervalles $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ *et* $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ *possède la même propriété, intervalle que l'on choisit alors pour* I_{n+1}.
On a ainsi une suite décroissante de segments dont les longueurs $(M-m)/2^n$ *tendent vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$.
Leur intersection contient donc un unique point ℓ *qui est la limite des suites* a *et* b. *Nous allons maintenant extraire une sous-suite de* u *convergeant vers* ℓ.

— *Construisons par récurrence une application* ϕ *strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telle que* $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\phi(n)}$.
On pose $\phi(0) = 0$; *on a alors* $a_0 \leqslant u_{\phi(0)} \leqslant b_0$. *Supposons avoir défini* $\phi(0), \phi(1), \dots, \phi(n-1)$ *vérifiant :*

$$\phi(0) < \phi(1) < \cdots < \phi(n-1)$$

et :

$$\forall p < n\,,\ a_p \leqslant u_{\phi(p)} \leqslant b_p.$$

Comme l'ensemble $\{p \mid u_p \in [a_n, b_n]\}$ *est infini, il n'est pas majoré et il contient donc des éléments strictement supérieurs à* $\phi(n-1)$. *Si l'on choisit l'un de ces éléments comme valeur de* $\phi(n)$, *on a bien :*

$$\phi(0) < \phi(1) < \cdots < \phi(n-1) < \phi(n)$$

et :

$$\forall p \leqslant n\,,\ a_p \leqslant u_{\phi(p)} \leqslant b_p.$$

On a ainsi défini une application ϕ *strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_{\phi(n)} \leqslant b_n.$$

On en déduit par le théorème d'encadrement que la suite $\left(u_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ.

X Suites de Cauchy

Dans cette section, nous allons introduire une notion extrêmement riche : la *convergence au sens de Cauchy*. Nous allons voir que cette notion permet de caractériser la convergence d'une suite vers un réel l sans faire intervenir le réel l dans la caractérisation ; ce qui semble de prime abord étonnant.

Commençons par la définition.

DÉFINITION 18
Une suite (u_n) *est dite* ***de Cauchy*** *ou* ***convergente au sens de Cauchy*** *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geqslant N,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

Nous voulons déterminer le lien subtil entre convergence et convergence au sens de Cauchy.

PROPOSITION 29
Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve — Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire ; en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N à partir duquel :

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $p, q \geqslant N$, on a :

$$|u_p - u_q| \leqslant |u_p - l| + |u_q - l| \leqslant \varepsilon.$$

□

PROPOSITION 30
Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve — Il suffit d'appliquer la définition pour $\varepsilon = 1$; il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - u_N| \leqslant 1.$$

D'où (u_n) est bornée par $\max\{|u_0|, \ldots, |u_N|, |u_N| + 1\}$. □

REMARQUE 15 — *Ce résultat permet de mettre en évidence une confusion fréquente : une suite qui vérifie, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim u_{n+p} - u_n = 0$ n'est pas nécessairement de Cauchy. Par exemple, la suite définit par $u_n = \ln(n)$ n'est pas bornée donc pas de Cauchy et pourtant*

$$\lim u_{n+p} - u_n = \lim \ln\left(1 + \frac{p}{n}\right) = 0.$$

THÉORÈME 8
Toute de suite Cauchy converge dans $\mathbb{R}$.

Preuve — Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \inf\{u_k, k \geqslant n\}, \quad b_n = \sup\{u_k, k \geqslant n\}.$$

Montrons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Les monotonies sont évidentes par définition. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p, q \geqslant N$, ◀

$$|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

En passant à la borne supérieure en p puis à la borne inférieure en q, on obtient $b_N - a_N \leqslant \varepsilon$ et donc ◀

$$\forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion, les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite et par encadrement (u_n) converge aussi vers cette limite. □ ◀

REMARQUE 16 — *Ceci est très spécifique à $\mathbb{R}$ où tout couple de suite adjacente converge. Mais dans $\mathbb{Q}$, ceci est faux, et donc il existe des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne convergent pas. C'est en fait un cas très fréquent : considérer par exemple la suite obtenue par le développement décimal d'un nombre irrationnel. Il s'agit d'une suite de rationnels qui converge. Elle est donc de Cauchy, mais sa limite est dans $\mathbb{R}$ et non dans $\mathbb{Q}$.*

Une conséquence importante de l'équivalence entre convergence et convergence au sens de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est *la convergence absolue* des série de réels. Nous reverrons ce point plus tard dans le cours sur les séries.

PROPOSITION 31
Soit (u_n) une suite réelle. Si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|\right)$ converge alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge.

Preuve — La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|\right)$ converge donc elle est de Cauchy. Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > q \geqslant N,\ \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| \leqslant \varepsilon.$$

Or, par inégalité triangulaire, pour tout $n \geqslant N$,

$$\left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ est de Cauchy et donc converge. □

XI Suites de référence

Le but de cette section est de préciser le comportement de suites très classiques qui vont jouer, dans notre travail en analyse, le rôle de suite de référence.

1. Suites arithmétiques

Nous avons déjà défini les suites arithmétiques de raison $\rho \in \mathbb{R}$. Il s'agit de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = u_n + \rho, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

elles s'écrivent aussi :

$$u_n = u_0 + n\rho, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $\lim u_n = \pm\infty$ suivant le signe de la raison ρ dans le cas où ρ est non nul.

2. Suites géométriques

Là aussi, nous avons déjà défini les suites arithmétiques de raison $\rho \in \mathbb{R}$. Il s'agit de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \rho u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

elles s'écrivent aussi :

$$u_n = u_0 \rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $\lim u_n = \pm\infty$ suivant le signe de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ quand la raison $\rho > 1$ et 0 quand $\rho \in]-1, 1[$.

3. Suites arithmético-géométrique

On appelle **suite arithmético-géométrique** tout suite réelle définie par une relation de récurrence du type suivant :

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}* \setminus \{1\} \times \mathbb{R}2$. La fonction de transition d'une telle suite est donc une fonction affine :

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax + b. \end{array}$$

Afin d'étudier la limite d'une telle suite :

1. Nous commençons par rechercher le(s) *point(s) fixe(s)* éventuel(s) de T :

$$T(x) = x \iff x = \frac{b}{1-a}.$$

   Nous noterons l ce point fixe.

2. Étudions l'écart entre la suite (u_n) et ce point fixe :

$$u_{n+1} - l = a\,(u_n - l) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Donc la suite $\varepsilon_n = u_n - l$ est une suite géométrique.

En conclusion, notre suite (u_n) converge si, et seulement si, $a \in]-1,1[$. Dans ce cas, la limite est $l = \frac{b}{1-a}$.

4. Suites homographiques

On appelle **suite homographique** toute suite (u_n) vérifiant une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

avec $ad - bc \neq 0$.

Nous nous intéressons à la suite (u_n) dans le cas où celle-ci converge vers un réel l. Dans un tel cas, le nombre réel l vérifie l'équation :

$$l = \frac{al+b}{cl+d} \iff cl^2 + (d-a)l - b = 0 \qquad (*).$$

Un telle équation a au plus deux solutions. Nous avons donc les deux cas suivants.

1. Si l'équation $(*)$ admet une unique solution, alors celle-ci vaut :

$$l = \frac{a-d}{2c}.$$

   Dans ce cas, la suite $\left(\frac{1}{u_n - l}\right)$ est arithmétique. En effet :

$$\frac{1}{u_{n+1}-l} - \frac{1}{u_n - l} = \frac{2c}{a+d}.$$

   Ainsi la suite (u_n) converge vers l si $\frac{2c}{a+d} \neq 0$ et est constante sinon.

2. Si l'équation $(*)$ admet deux solutions distinctes l_1 et l_2, alors la suite $\left(\frac{u_n - l_1}{u_n - l_2}\right)$ est géométrique ; en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

5. Récurrences doubles

XII COMPARAISONS ASYMPTOTIQUES

Dans cette section, nous introduisons trois outils pour *mesurer le comportement* des suites à l'infini. Il s'agit des *notations de Landau*.

1. Relations de comparaison

Définition 19
Considérons (u_n) et (v_n) deux suites.

1. *Nous dirons que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant \varepsilon\, |v_n|\,.$$

   On notera dans ce cas $u_n = o(v_n)$.

2. *Nous dirons que (u_n) est **dominée** par (v_n) si*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant M\, |v_n|\,.$$

   On notera dans ce cas $u_n = O(v_n)$.

3. *Nous dirons que (u_n) est **équivalente** à (v_n) si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon\, |v_n|\,.$$

   On notera dans ce cas $u_n = o(v_n)$.

2. Échelles de comparaisons classiques

Nous souhaitons comparer ici le comportement à l'infini, ou *comportement asymptotique,* de plusieurs familles de suites :

1. *Les suites polynomiales* — Il s'agit des suites de la forme :

$$u_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   où k est un entier fixé, $(a_0, \ldots, a_k)$ sont $k+1$ réels fixés tels que $a_k \neq 0$. Les suites arithmétiques sont un cas particulier de suites polynomiales (pour $k = 1$).

2. *Les suites exponentielles* — Il s'agit des suites géométriques. Nous étudierons ici le cas des raisons strictement positives.
3. la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la suite $(n^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les résultats sont les suivants :

Lemme 4
Toute suite polynomiale est négligeable devant une suite exponentielle

Chapitre 3

Fonctions de la variable réelle

Le but de ce chapitre d'introduction est de rappeler le vocabulaire général concernant l'usage des fonctions de la variable réelle. L'objectif est donc de rappeler le vocabulaire de base concernant le maniement des fonctions et sa traduction mathématique rigoureuse. Aucun théorème important ne sera obtenu dans ce chapitre de nature méthodologique.

Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées seront toutes définies sur une partie non vide X de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le cas des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ s'obtient lorsque X est égal à $\mathbb{N}$ ou plus généralement à une partie de $\mathbb{N}$, mais ce point de vue ne fera pas l'objet de révisions particulières ici.

Table des matières du chapitre

I Notion de fonction numérique de la variable réelle

Nous nous intéresserons dans cette section à l'ensemble $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ constitué des fonctions de la forme :

$$f : \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

D'un point de vue algébrique, on notera que si f et g sont deux éléments de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ et si λ et μ sont deux réels, alors on peut définir les fonctions $\lambda.f+\mu.g$ et $f\times g$ en posant pour tout $x\in X$:

$$(\lambda.f+\mu.g)(x)=\lambda\, f(x)+\mu\, g(x) \text{ et } (f\times g)(x)=f(x)\, g(x).$$

Nous parlerons dans ce cas (cf. le cours “géométrie 1”) de $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou (cf. le cours “algèbre 1”) d'anneau.

En plus de posséder une structure algébrique, l'ensemble $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ est ordonné (cf. cours “algèbre 1”) : la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ s'étend naturellement à $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ en posant, pour $(f,g) \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})^2$:

$$f \leqslant g \iff \forall x \in X\ ,\ f(x) \leqslant g(x).$$

Remarques 9

— *Si X possède au moins deux éléments, il existe des fonctions f et g non comparables i.e. ne vérifiant ni $f \leqslant g$ ni $g \leqslant f$.*
En effet, si f prend au moins les valeurs 0 et 1 (une telle fonction existe puisque X possède au moins deux éléments), alors f et $g = 1 - f$ ne sont pas comparables. On dit dans ce cas que la relation d'ordre ainsi définie sur $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ n'est pas totale (cf. le cours “algèbre 1”).

— *On évitera d'utiliser la relation $f < g$ sur $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$. En effet, cette dernière est ambiguë puisqu'elle peut signifier :*

$$\big(f \leqslant g \text{ et } f \neq g\big) \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in X\ ,\ f(x) < g(x)$$

ce qui n'est pas équivalent lorsque X contient au moins deux éléments.

Enfin, au sujet de cette relation d'ordre, il peut être pratique de définir les fonctions suivantes :

Définition-Notation 1

Soient f et g deux applications définies sur X.

— *On désigne par $|f|$ l'application définie sur X par :*

$$\forall x \in X\ ,\ |f|(x) = \big|f(x)\big|.$$

— *On désigne par $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ les applications définies sur X par :*

$$\forall x \in X\ ,\ \sup(f,g)(x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$$

$$\forall x \in X\ ,\ \inf(f,g)(x) = \min\big(f(x), g(x)\big).$$

L'application $\sup(f,g)$ est la plus petite fonction supérieure à f et à g pour la relation d'ordre de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$. De même, l'application $\inf(f,g)$ est la plus grande fonction inférieure à f et à g.

Observation 1

On voit immédiatement[1] que :

— $|f| = \sup(f, -f)$.

— $\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ *et* $\inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$.

Exemple 18 — *On désigne par f^+ et f^- les applications dites respectivement partie positive et partie négative de f :*

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \text{ et } f^- = \frac{|f| - f}{2}.$$

Et on a les résultats[2] suivants que l'on vérifiera sans difficulté :

1. N'oubliez pas ces relations qui peuvent se révéler extrêmement utiles dans vos exercices !
2. cf. l'interprétation en terme de projecteur de cet exemple dans le cours “géométrie 1”.

— $f^+ = \sup(f, 0)$ *et* $f^- = \sup(-f, 0)$ *;*
— f^+ *et* f^- *sont positives ;*
— $f = f^+ - f^-$ *et* $|f| = f^+ + f^-$.

II Contrôle : majoration, extremum & borne

Nous rappelons ici les outils fondamentaux permettant le « *contrôle* » d'une fonction f de X dans $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 20
On dit que f *est :*
— ***majorée*** *sur* X *si* $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X\,,\ f(x) \leqslant M$. *Dans ce cas, on dira que* M *est un* ***majorant*** *de* f *sur* X *;*
— ***minorée*** *sur* X *si* $-f$ *est majorée sur* X*, et de même on définira la notion de* ***minorant*** *de* f *sur* X *;*
— ***bornée*** *sur* X *si elle est majorée et minorée sur* X*, i.e. si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X\,,\ \big|f(x)\big| \leqslant M.$$

REMARQUE 17 — *Notons que l'ensemble des fonctions bornées sur* X *est stable par combinaison linéaire et par produit. C'est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ *et aussi un sous-anneau (cf. les cours "algèbre 1").*

DÉFINITION 21
Donnons-nous une fonction f *majorée sur* X*. Nous appellerons* ***borne supérieure*** *de* f *sur* X*, notée* $\sup\limits_X f$ *ou* $\sup\limits_{x\in X} f(x)$*, le réel* M *vérifiant :*

1. M *est un majorant de* f *sur* X *;*
2. M *est le « meilleur » majorant de* f *sur* X *au sens où :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists x \in X, \quad M - \epsilon < f(x) \leqslant M.$$

On définit de même la ***borne inférieure*** *de* f *sur* X *en inversant le signe des inégalités.*

On observe donc que la borne supérieure n'est autre que le sup de l'ensemble $\big\{f(x)\ \big|\ x \in X\big\}$. Comme tout ensemble majoré admet un sup d'après les propriétés de $\mathbb{R}$, toute fonction majorée sur X admet un sup sur X et de même pour les inf .

EXEMPLES 9

1. *Si f et g sont majorées sur X, alors $f+g$ est majorée sur X et on a :*

$$\sup_X (f+g) \leqslant \sup_X f + \sup_X g.$$

2. *L'inégalité ci-dessus n'est pas toujours une égalité, comme le prouve l'exemple des fonctions sinus et cosinus qui vérifient :*

$$\sup_{\mathbb{R}} \sin = \sup_{\mathbb{R}} \cos = 1 \text{ et } \sup_{\mathbb{R}} (\sin + \cos) = \sqrt{2}$$

la dernière égalité pouvant se justifier à l'aide de la relation :

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

DÉFINITION 22

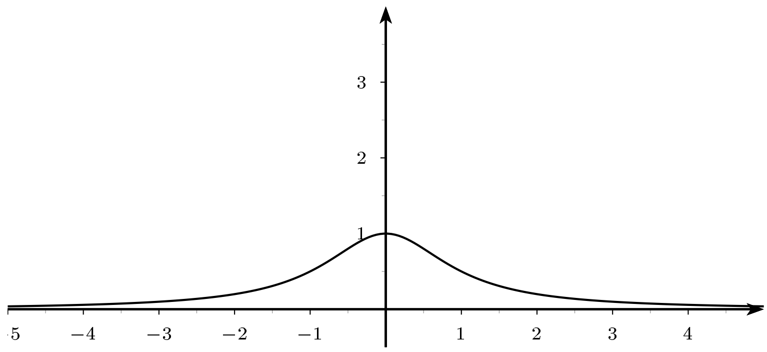
On dit que f admet un ***maximum*** *en $a \in X$ si $\forall x \in X$, $f(x) \leqslant f(a)$.*
On dit que f admet un ***maximum local*** *en $a \in X$ si :*

$$\exists h > 0 \,:\, \forall x \in X\,,\; |x-a| \leqslant h \Longrightarrow f(x) \leqslant f(a).$$

On définit de manière analogue les notions de ***minimum*** *et de* ***minimum local****.*
On dit que f admet un ***extremum*** *[resp. un* ***extremum local****) si f admet un maximum (resp. un maximum local] ou un minimum [resp. un minimum local].*

EXEMPLES 10

1. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$:*
   — *est majorée et possède un maximum en 0 qui vaut 1.*
   — *est minorée et l'on a $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$, mais ne possède pas de minimum.*

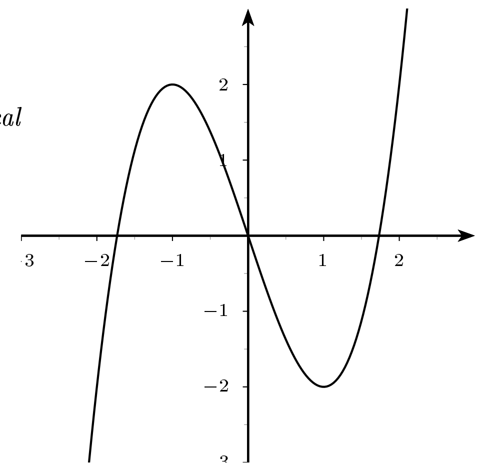


2. *La fonction $\cos$ admet un maximum 1 qui est atteint en tous les multiples de 2π. De même, elle possède un minimum -1 atteint en tous les points de la forme $\pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.*

3. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x^3 - 3x$$

admet un maximum local en -1 et un minimum local en 1 mais n'a ni maximum ni minimum sur $\mathbb{R}$.



REMARQUES 10 — *Lorsque f possède un maximum sur X, celui-ci se note $\max_X f$ ou $\max_{x \in X} f(x)$. La fonction f est alors évidemment majorée et l'on a $\sup_X f = \max_X f$. De même, si f admet un minimum sur X, celui-ci se note $\min_X f$ ou $\min_{x\in X} f(x)$, et l'on a $\inf_X f = \min_X f$.*

- *Une fonction peut évidemment être majorée [resp. minorée] sur X sans admettre de maximum [resp. de minimum] sur X (cf. exemple 1 précédent).*
- *On dit que la fonction f admet un maximum, minimum ou extremum strict en a si l'inégalité de la définition précédente est stricte pour $x \neq a$.*

III Monotonie

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires.

DÉFINITION 23
On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est :

- ***croissante** si $\forall (x,y) \in X^2$, $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$;*
- ***strictement croissante** si $\forall (x,y) \in X^2$, $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$;*
- ***(strictement) décroissante** si $-f$ est (strictement) croissante,*
- ***(strictement) monotone** si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.*

La monotonie se comporte bien par composition et par opérations algébriques (combinaisons linéaires, produit, quotient) sous certaines conditions évidentes de signe. On se contentera juste de rappeler ici la propriété suivante.

PROPOSITION 32
Soit f une application d'une partie X de $\mathbb{R}$ dans une partie Y de $\mathbb{R}$ et g une application de Y dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont monotones [resp. strictement monotones], alors $g \circ f$ est monotone [resp. strictement monotone].

Preuve — En notant $\nearrow$ pour "croissante" et $\searrow$ pour "décroissante", si $x \leqslant y$, le tableau suivant récapitule les 4 cas possibles :

	$f \nearrow$	$f \searrow$
	$f(x) \leqslant f(y)$	$f(x) \geqslant f(y)$
$g \nearrow$	$g(f(x)) \leqslant g(f(y))$	$g(f(x)) \geqslant g(f(y))$
$g \searrow$	$g(f(x)) \geqslant g(f(y))$	$g(f(x)) \leqslant g(f(y))$

De même pour la stricte monotonie avec des inégalités strictes, lorsque les fonctions f et g sont strictement monotones. $\square$

EXEMPLES 11

1. *Une fonction monotone est strictement monotone si et seulement si elle est injective.* ◀
2. *La somme de deux fonctions monotones n'est pas nécessairement monotone, comme le prouve l'exemple de $x \mapsto e^x + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.*
3. *Étant donnés des réels a, b, c, d vérifiant $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$, l'homographie (ou fonction homographique) f définie par :*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{ax+b}{cx+d} \end{array}$$

est strictement monotone sur $]-\infty, -\frac{d}{c}[$ et sur $]-\frac{d}{c}, +\infty[$ car on a :

$$\forall (x,y) \in D_f \,,\ x \neq y \Longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{ad-bc}{(cx+d)\,(cy+d)}.$$

4. *La fonction $f \ :\ x \mapsto \ln\left(\frac{2e^x+1}{e^x+2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ est monotone comme composée de trois fonctions monotones (*exp, ln *et une fonction homographique définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$) donc monotone sur cet intervalle. Comme $f(0) = 0$ et $f(\ln 2) = \ln(5/4) > 0$, on en déduit que f est croissante.*
5. *La fonction $f \ :\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout x on a $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, et comme dans l'exemple précédent, f est la composée d'une fonction homographique croissante sur $\mathbb{R}_+$ et d'une fonction croissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.*

IV PARITÉ & PÉRIODICITÉ

Ici aussi, nous nous contentons de rappeler quelques propriétés élémentaires.

DÉFINITION 24
Considérons toujours une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.
- *On dit que f est* ***paire*** *si X est symétrique par rapport à 0 et si :*

$$\forall x \in X \,,\ f(-x) = f(x).$$

- *On dit que f est* ***impaire*** *si X est symétrique par rapport à 0 et si :*

$$\forall x \in X \,,\ f(-x) = -f(x).$$

EXEMPLES 12

1. *La fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{2e^x+1}{e^x+2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est impaire.*
2. *La fonction définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ est paire.*

Observation 2

- *Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy.*
- *Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport au point O.*
- *L'ensemble des fonctions paires [resp. impaires] définies sur $\mathbb{R}$ est stable par combinaison linéaire, donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (cf. le cours "géométrie 1").*
- *L'ensemble des fonctions paires est stable par produit, mais pas celui des fonctions impaires.*

Définition 25

Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$.

- *Un réel T est une **période** de f si :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \in X \iff x + T \in X \text{ et si } \quad \forall x \in X\,,\ f(x+T) = f(x).$$

- *La fonction f est **périodique** si elle admet au moins une période T non nulle. On dit alors que f est T**-périodique** ou **périodique de période** T.*

Remarque 18 — *Une fonction périodique n'est pas périodique que pour un seul T possible (par exemple, si T est une période, alors tout multiple entier de T est aussi une période). On peut s'interroger sur la nature de l'ensemble des périodes d'une fonction périodique. Ainsi si f est une fonction périodique, il est évident que :*

- *si T est une période de f, alors $-T$ est aussi une période de f,*
- *si T_1 et T_2 sont deux périodes de f, alors $T_1 + T_2$ est aussi une période de f.*

L'ensemble des périodes de f est donc un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ (cf. le cours "algèbre 1"). D'après l'étude de la structure des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ (cf. le cours "algèbre 1"), on a :

- *si f possède une plus petite période T strictement positive, alors ses périodes sont les multiples non nuls de T,*
- *sinon, l'ensemble de ses périodes est dense dans $\mathbb{R}$.*

Ce dernier cas peut se produire sans que f soit constante (prendre la fonction qui vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels, dont l'ensemble des périodes est $\mathbb{Q}$), sauf si on suppose f continue . ◀

Observation 3

Notons enfin que si T est un réel non nul et X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ adéquat, l'ensemble des fonctions T-périodiques sur X est stable par combinaison linéaire et par produit. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ et un sous-anneau.

V Fonction réciproque

Nous en venons maintenant au seul point délicat de ce chapitre : la notion de fonction réciproque. Les théorèmes et méthodes permettant de démontrer l'existence d'une fonction réciproque seront vus dans le chapitre sur la continuité. On s'intéressera donc ici exclusivement à la description des phénomènes. On rappelle que si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est injective alors elle induit une bijection de X sur son image $Y = f(X)$. Dans ce cas, la restriction de f à son image Y possède une bijection réciproque notée f^{-1}. Celle-ci est définie par :

$$\begin{array}{rcll} f^{-1} : Y & \longrightarrow & X & \\ y & \longmapsto & x & / \quad f(x) = y. \end{array}$$

On pensera aux exemples bien connus des fonctions usuelles :

1. la fonction exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et sa fonction réciproque est ln ;
2. pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^n \in \mathbb{R}_+$ est bijective et sa fonction réciproque est $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$;
3. pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha^x \in \mathbb{R}_+$ est bijective et sa fonction réciproque est $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \log_\alpha x = \dfrac{\ln(x)}{\ln(\alpha)} \in \mathbb{R}$;
4. la partie paire de la fonction exp, à savoir la fonction cosinus hyperbolique ch définie par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$ mais est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$ et sa fonction réciproque est argch ;
5. la fonction tangente hyperbolique th définie par :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ et sa fonction réciproque est argth ;
6. la partie impaire de la fonction exp, à savoir la fonction sinus hyperbolique sh définie par :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est argsh ;
7. la fonction cos n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais sa restriction au départ sur $[0, \pi]$ et à l'arrivée sur $[-1, 1]$ est bijective et sa fonction réciproque est arccos . De même pour sin sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ avec arcsin et tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec arctan .

À ce stade, les seules propriétés qui doivent être connues sont :

1. le passage à la fonction réciproque de propriétés globales de la fonction, comme par exemple :
   (a) Si f est bijective et croissante, la fonction réciproque de f est une fonction croissante. (Rappelons qu'une fonction bijective croissante est strictement croissante.)

En effet :

$$f^{-1}(x) \geqslant f^{-1}(y) \Longrightarrow x = f\left(f^{-1}(x)\right) \geqslant f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

et donc par contraposition :

$$x < y \Longrightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$$

ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante.

(b) De même, la réciproque d'une fonction bijective (strictement) décroissante est (strictement) décroissante.

(c) Si f est une fonction impaire bijective de X dans Y, alors sa réciproque est aussi impaire. En effet, Y est symétrique par rapport à O et pour tout élément $y \in Y$, on a :

$$f\big(f^{-1}(-y)\big) = -y = -f\big(f^{-1}(y)\big) = f\big(-f^{-1}(y)\big),$$

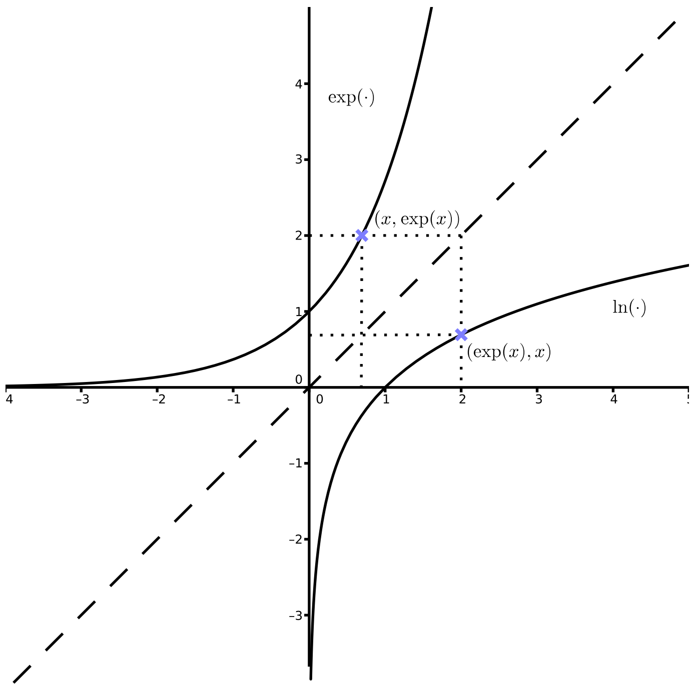
et l'injectivité de f permet de conclure que $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

2. le dessin du graphe d'une fonction réciproque : si f est une bijection d'une partie X de $\mathbb{R}$ sur une partie Y de $\mathbb{R}$, alors les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

   En effet, notons Γ_f [resp. $\Gamma_{f^{-1}}$] le graphe de f [resp. de f^{-1}].

$$\begin{aligned}(x,y) \in \Gamma_f &\Longleftrightarrow x \in X \text{ et } y = f(x)\\ &\Longleftrightarrow y \in Y \text{ et } x = f^{-1}(y)\\ &\Longleftrightarrow (y,x) \in \Gamma_{f^{-1}}.\end{aligned}$$

   Visualisons cela sur l'exemple des graphes des fonctions exponentielle et logarithme :



Chapitre 4

Rappels sur le concept de limite de fonction

Le but de ce chapitre est de rappeler la définition fondamentale de limite et la façon dont elle s'applique afin d'obtenir toutes les propriétés habituelles concernant l'usage des limites de fonction numériques de la variable réelle. Dans tout le chapitre, on considèrera donc des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Pour de telles fonctions f, on notera $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition correspondant.

Table des matières du chapitre

I Notion de limite

Commençons par préciser la terminologie des voisinages.

1. Au voisinage de...

DÉFINITION 26
Étant donné un réel a, on dit qu'une fonction f est ***définie au voisinage de*** *a s'il existe un réel $h > 0$ tel que l'on soit dans l'un des trois cas suivants :*
- *$]a-h, a[\subset \mathcal{D}_f$, dans ce cas on parlera de* ***voisinage à gauche****;*
- *$]a, a+h[\subset \mathcal{D}_f$, dans ce cas on parlera de* ***voisinage à droite****;*
- *$]a-h, a+h[\setminus \{a\} \subset \mathcal{D}_f$, dans ce cas on parlera de* ***voisinage épointé****;*
- *$]a-h, a+h[\subset \mathcal{D}_f$, dans ce cas on parlera de* ***voisinage****;*

EXEMPLES 13
1. *la fonction suivante*
$$f_1 :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$$
est définie au voisinage de 0*;*
2. *la fonction suivante*
$$f_2 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$$
est définie au voisinage épointé de 0*;*
3. *la fonction suivante*
$$f_3 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{x}$$
est définie au voisinage à droite de 0.

En revanche, les fonctions suivantes ne sont pas définies au voisinage de 0 *:*
1. $x \mapsto \sqrt{x-1}$*;*
2. $x \mapsto \ln\left(\sin \frac{1}{x}\right)$.

REMARQUES 11
- *Attention, une fonction définie au voisinage de a n'est pas forcément définie en a, comme par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-a}$. Dans la définition 26, il y a donc en réalité six cas, suivant que a appartient ou non à $\mathcal{D}_f$.*
- *On pourrait donner la condition suivante, moins restrictive, pour la notion de fonction définie au voisinage de a :*
$$\forall \epsilon > 0\,,\ ]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset,$$
définition qui serait suffisante pour démontrer l'unicité de la limite (voir page 80).

DÉFINITION 27
On dira qu'une fonction f est :
- ***définie au voisinage de*** *$+\infty$, s'il existe un réel A tel que $]A, +\infty] \subset \mathcal{D}_f$,*

— ***définie au voisinage de*** $-\infty$*, s'il existe un réel* A *tel que* $[-\infty, A[\subset \mathcal{D}_f$.

Exemples 14

1. *La fonction*
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$
est clairement définie au voisinage de $+\infty$.

2. *En désignant par* $\mathcal{D}$ *le complémentaire de l'ensemble (fini) des racines de* $x^3 - x - 1$*, la fonction :*
$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^3-x-1} \end{array}$$
est définie au voisinage de $+\infty$ *et de* $-\infty$.

Dans la suite de ce cours, nous utiliserons la notation $\overline{\mathbb{R}}$ pour désigner $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Nous ne nous préoccuperons pas du sens mathématique de cet objet (sens qui existe mais qui est au delà de notre programme pour l'instant) et nous le prendrons comme une pure notation.

Définition 28

On dit qu'une propriété portant sur une fonction f *est vraie* ***au voisinage de*** $a \in \overline{\mathbb{R}}$*, si* f *est définie au voisinage de* a *et si cette propriété est vraie sur l'intersection de* $\mathcal{D}_f$ *avec un intervalle du type :*

— $]a-h, a+h[$ *avec* $h > 0$ *si* $a \in \mathbb{R}$,

— $]A, +\infty]$ *avec* $A \in \mathbb{R}$ *si* $a = +\infty$,

— $[-\infty, A[$ *avec* $A \in \mathbb{R}$ *si* $a = -\infty$.

Évidemment, cette définition est similaire pour un voisinage à droite, à gauche ou épointé. On notera la similitude profonde entre cette notion et celle de "*à partir d'un certain rang*" pour les suites réelles. Il s'agit en réalité du même concept.

Exemple 19 — *Parmi tous les exemples que nous pourrions citer, il y a :*

1. *Une fonction* f *est bornée au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ *si et seulement si elle est définie au voisinage de* a *et que l'on a :*
$$\exists \eta > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant M.$$

2. *Une fonction* f *est positive au voisinage de* $+\infty$ *si et seulement si elle est définie au voisinage de* $+\infty$ *et :*
$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant 0 \qquad (*)$$
la propriété $(*)$ *étant d'ailleurs équivalente à :*
$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geqslant A \quad f(x) \geqslant 0$$
lorsque f *est définie au voisinage de* $+\infty$.

Ainsi par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2(1-x^2)$ *est positive au voisinage de* 0 *et négative au voisinage de* $+\infty$ *ou de* $-\infty$.

La définition précédente s'étend facilement au cas de deux fonctions reliées par une propriété. Parmi ces propriétés l'une est remarquablement utile : celle de *coïncidence*.

Définition 29
Considérons f et g deux fonctions numériques de la variable réelle. On dira que la fonction f ***coïncide*** *avec la fonction g au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si f et g sont définies* ***au voisinage de*** *a, et que :*

- *lorsque $a \in \mathbb{R}$, il existe un réel $h > 0$ tel que l'on ait, pour tout réel x :*
$$\big(x \in \mathcal{D}_f \text{ et } |x-a| \leqslant h\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \text{ et } f(x) = g(x)\big),$$
- *lorsque $a = +\infty$, il existe un réel A tel que l'on ait, pour tout réel x :*
$$\big(x \in \mathcal{D}_f \text{ et } x \geqslant A\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \text{ et } f(x) = g(x)\big),$$
- *lorsque $a = -\infty$, il existe un réel A tel que l'on ait, pour tout réel x :*
$$\big(x \in \mathcal{D}_f \text{ et } x \leqslant A\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \text{ et } f(x) = g(x)\big).$$

Et nous avons à nouveau des définitions similaires avec des voisinages à droite, à gauche ou épointé.

Exemples 15

1. *Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :*
$$f(x) = |x-1| \text{ et } g(x) = x-1.$$
   - *Au voisinage de tout point de $[1, +\infty]$, la fonction f coïncide avec la fonction g.*
   - *Au voisinage de tout point de $[-\infty, 1]$, la fonction f coïncide avec la fonction $-g$.*
   - *Mais au voisinage de 1, la fonction f ne coïncide ni avec g, ni avec $-g$.*
2. *La fonction $x \mapsto \frac{x^3-a^3}{x-a}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ coïncide au voisinage de a avec la fonction $x \mapsto x^2 + a\,x + a^2$ définie sur $\mathbb{R}$.*

Dans le même ordre d'idée, nous pouvons citer aussi un autre exemple de définition :

Définition 30
La fonction f est ***majorée*** *par la fonction g* ***au voisinage de*** *$a \in \overline{\mathbb{R}}$ si f et g sont définies au voisinage de a, et que :*

- *lorsque $a \in \mathbb{R}$, il existe un réel $h > 0$ tel que l'on ait, pour tout réel x :*
$$\big(x \in \mathcal{D}_f \text{ et } |x-a| \leqslant h\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \text{ et } f(x) \leqslant g(x)\big),$$
- *lorsque $a = +\infty$, il existe un réel A tel que l'on ait, pour tout réel x :*
$$\big(x \in \mathcal{D}_f \text{ et } x \geqslant A\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \text{ et } f(x) \leqslant g(x)\big),$$
- *lorsque $a = -\infty$, il existe un réel A tel que l'on ait, pour tout réel x :*
$$\big(x \in \mathcal{D}_f \text{ et } x \leqslant A\big) \Longrightarrow \big(x \in D_g \text{ et } f(x) \leqslant g(x)\big).$$

On définit de même la notion de ***minoration au voisinage de*** *a.*

Et nous pourrions continuer ainsi à définir différents types de propriétés reliant des fonctions au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$...

2. Limite finie

Nous arrivons ici au point clé du chapitre : la définition d'une limite finie d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

THÉORÈME-DÉFINITION 9

*On dira qu'une fonction f admet un réel l pour **limite** :*

- *en un réel $a \in \mathbb{R}$ si*
  1. *f est définie au voisinage de a ;*
  2. *on a :*
  $$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - l\right| \leqslant \epsilon.$$
- *en $+\infty$ si*
  1. *f est définie au voisinage de $+\infty$;*
  2. *on a :*
  $$\forall \epsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x \geqslant A \Longrightarrow \left|f(x) - l\right| \leqslant \epsilon.$$
- *en $-\infty$ si*
  1. *f est définie au voisinage de $-\infty$;*
  2. *on a :*
  $$\forall \epsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x \leqslant A \Longrightarrow \left|f(x) - l\right| \leqslant \epsilon.$$

*Ce réel l est alors unique et on l'appelle **limite** de la fonction f en a. On le note :*

$$l = \lim_{x \to a} f(x).$$

Preuve —[par exemple dans le cas où $a \in \mathbb{R}$] Supposons que f tende vers deux réels l_1 et l_2, et montrons $l_1 = l_2$. Pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver deux réels η_1 et η_2 strictement positifs tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on ait :

$$|x-a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow \left|f(x) - l_1\right| \leqslant \epsilon \text{ et } |x-a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow \left|f(x) - l_2\right| \leqslant \epsilon.$$

Prenons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Comme f est définie au voisinage de a, on peut trouver un élément $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$. Pour un tel x on a alors :

$$|l_1 - l_2| \leqslant \left|l_1 - f(x)\right| + \left|f(x) - l_2\right| \leqslant 2\epsilon.$$

On a ainsi :

$$\forall \epsilon > 0\,, \ |l_1 - l_2| \leqslant 2\epsilon$$

ce qui prouve $l_1 = l_2$. □

REMARQUES 12

- *Dans le cas où f a pour limite un réel l en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dira aussi que f tend ou converge vers l en a, ou que $f(x)$ tend ou converge vers l quand x tend vers a.*
- *Dans tous les cas de la définition précédente, on parlera de limite finie car f converge vers un nombre réel à la différence de la section suivante.*
- *Si $a \in \mathbb{R}$ et que f tend vers l au voisinage de a alors f est définie au voisinage de a mais non nécessairement en a. Notons que si f est définie en a, alors sa limite en a est nécessairement $f(a)$.*
- *Dans toute la suite, les résultats sur les limites se traduiront donc mathématiquement par trois énoncés suivant qu'il s'agit d'une limite en une valeur réelle, en $+\infty$ ou en $-\infty$. Les démonstrations correspondantes étant très similaires, nous n'en ferons qu'une à chaque fois. C'est l'occasion de se tester en refaisant la démonstration dans les cas similaires.*

— *Enfin, il faut savoir écrire la négation du fait d'avoir une limite, ou autrement dit, le fait de ne pas avoir une certaine limite. Traitons par exemple le cas d'un point réel : f n'a pas pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists x \in \mathcal{D}_f \cap]a-\eta, a+\eta[, \quad |f(x) - l| \geqslant \epsilon.$$

Méthode 7 — *Le bon usage de cette définition nécessite de correctement distinguer deux choses :*

1. *comment **démontrer** une limite à l'aide de la définition ?*
2. *comment **utiliser** le fait que la limite d'une fonction quelque part soit connue ?*

Dans le premier cas, nous devons nous donner un $\epsilon > 0$ fixé quelconque. Une fois ce ϵ fixé, nous devons exhiber un nombre $\eta > 0$ ou $A \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété voulue. Ce η ou ce A n'ont pas besoin d'être explicités, seule l'existence de ce nombre importe et doit être rigoureusement justifiée.

Dans le deuxième cas, nous choisirons une valeur adéquate de ϵ (par exemple : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{n}$...). Le fait que la limite existe nous garantira alors qu'il existe un η ou A vérifiant une certaine propriété. Et il s'agira d'utiliser l'inégalité fournie de manière intelligente...

Exemple 20 — *Traitons un exemple de chacune de ces deux méthodes :*

1. *Démontrons entièrement "à la main" un calcul de limite, i.e. à l'aide de la définition exclusivement. Considérons la fonction suivante pour un certain $a \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x^3 - a^3}{x - a}. \end{array}$$

Montrons que la limite de cette fonction en a vaut $3a^2$. La fonction est bien définie au voisinage épointé de a. Il s'agit donc de montrer que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - 3a^2| \leqslant \epsilon$$

ou encore[1] *:*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^*, \quad |h| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(a+h) - 3a^2| \leqslant \epsilon.$$

Pour $h \neq 0$, on a :

$$f(a+h) = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \frac{3a^2 h + 3ah^2 + h^3}{h} = 3a^2 + 3\,a\,h + h^2$$

et donc $\left|f(a+h) - 3a^2\right| = |h|\,|3a + h|$.
Si l'on impose $|h| \leqslant 1$, on en déduit :

$$\left|f(a+h) - 3a^2\right| \leqslant \big(3|a| + 1\big)|h|.$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque fixé. Pour réaliser :

$$|f(a+h) - 3a^2| \leqslant \epsilon,$$

1. Il faut bien remarquer cette technique : elle permet, par le simple changement de variable $x = a + h$ de transformer l'étude d'une limite en un point a quelconque en une limite en 0. On n'hésitera donc pas à en faire un grand usage dans les exercices.

il suffit de réaliser :

$$|h| \leqslant 1 \text{ et } \big(3|a|+1\big)|h| \leqslant \epsilon.$$

En posant $\eta = \min\big(1, \epsilon/(3|a|+1)\big)$, *on a :*

$$\forall h \neq 0\,,\ |h| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(a+h) - 3a^2| \leqslant \epsilon,$$

ce qui prouve le résultat.

2. *Cherchons maintenant un exemple où l'on utilise un résultat de limite d'une fonction pour démontrer un autre résultat. Considérons par exemple la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1000} \end{array}$$

On observe sur son graphe dessiné figure 4.1 que la fonction est sur-oscillante au voisinage de 0 *et qu'elle ne semble pas toujours positive au voisinage de* 0. *Pourtant, il n'en est rien et nous pouvons montrer que cette fonction est positive au voisinage épointé de* 0.

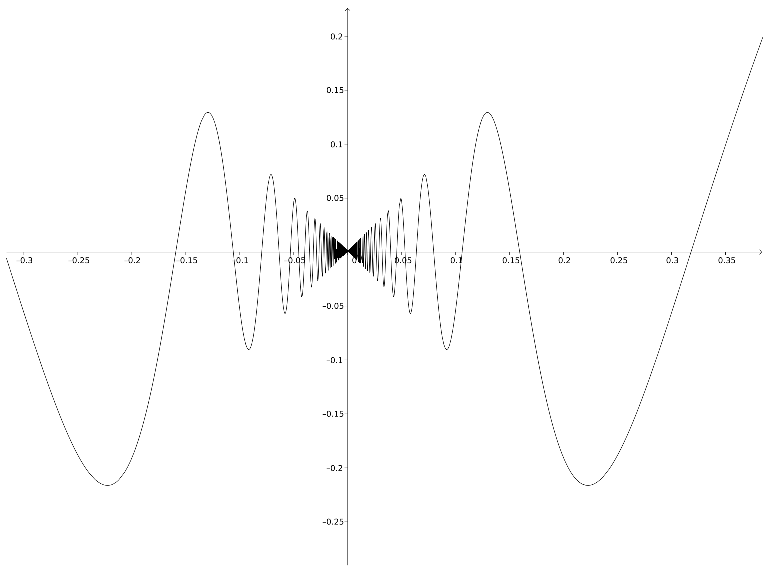


FIGURE 4.1 – Graphe de la fonction f sur-oscillante au voisinage de 0

Admettons ici que la fonction f *a pour limite* $\frac{1}{1000}$ *en* 0 *(ce qui peut se démontrer facilement). Posons alors* $\epsilon = \frac{1}{2000}$. *D'après la convergence de* f *vers* 0 *il existe alors* $\eta > 0$ *tel que :*

$$\forall x \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}, \quad \left| f(x) - \frac{1}{1000} \right| < \epsilon.$$

Mais alors pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, $\frac{1}{2000} < f(x)$ *et donc* f *est strictement positive au voisinage de* 0.

Il faut aussi noter que, dans la définition d'une limite, le fait d'utiliser des inégalités large ou des inégalités strictes est équivalent. Plus précisément, les deux assertions suivantes sont équivalents :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x) - l\big| \leqslant \epsilon \tag{4.1}$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow \big|f(x) - l\big| < \epsilon. \tag{4.2}$$

En effet, supposons par exemple la première assertion (4.1) vraie. Donnons-nous $\epsilon > 0$. Si l'on applique la première assertion à $\frac{\epsilon}{2}$, on déduit l'existence de $\eta > 0$ pour lequel :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x)-l\big| \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Cette assertion implique l'assertion (4.2). Réciproquement, supposons la deuxième assertion (4.2) vraie. Donnons-nous $\epsilon > 0$. Si on lui applique la deuxième assertion, on déduit l'existence de $\eta > 0$ pour lequel :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow \big|f(x)-l\big| < \epsilon \leqslant \epsilon.$$

Dans ce cas $\frac{\eta}{2}$ convient bien pour la première assertion (4.2).

3. Limites infinies

Passons maintenant aux limites d'une fonction vers $\pm\infty$.

Définition 31

Nous dirons qu'une fonction f ***tend vers*** *$+\infty$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si elle est définie au voisinage de a et si l'on a :*

— *pour $a \in \mathbb{R}$:*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A;$$

— *pour $a = +\infty$:*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A;$$

— *pour $a = -\infty$:*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

On dit aussi que f admet $+\infty$ pour limite en a et on écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Remarques 13

— *Dans le cas $a \in \mathbb{R}$, les assertions :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$$

et :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$$

étant équivalentes, il arrive parfois, dans la caractérisation précédente, que l'on remplace $\forall A \in \mathbb{R}$ par $\forall A \in \mathbb{R}_+$, voire par $\forall A > 0$, pour éviter des problèmes de signes (cf. par exemple les démonstrations des propositions 41 ou 44). ◀
De même si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

— *Une fonction qui tend vers $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$ ne peut pas être définie en a, puisque sinon on aurait :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ f(a) \geqslant A$$

ce qui est impossible.

— *On dira de façon similaire qu'une fonction f* ***tend vers*** *$-\infty$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si $-f$ tend vers $+\infty$ en a. On dit aussi que f admet $-\infty$ pour limite en a et on écrit :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

4. Limites à droite, limite à gauche & limite épointée

Nous allons apporter maintenant quelques raffinements à notre définition initiale de limite. Il s'agit toujours du même concept mais que nous déclinerons de manière légèrement différente afin de gagner en flexibilité. Dans toute cette section le nombre a est un réel.

Définition 32

Considérons une fonction numérique f de la variable réelle. Nous dirons que :

— *la fonction f admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour **limite à droite** en a si la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]a, +\infty[$ admet l pour limite en a. Autrement dit si f est définie sur un voisinage à droite de a et si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x \in]a, a+\eta[\Longrightarrow \left|f(x) - l\right| \leqslant \epsilon.$$

On note alors :

$$l = \lim_{x \longrightarrow a,\ x > a} f(x) \text{ ou } l = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

— *la fonction f admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour **limite à gauche** en a si la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[$ admet l pour limite en a. Autrement dit si f est définie sur un voisinage à gauche de a et si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x \in]a-\eta, a[\Longrightarrow \left|f(x) - l\right| \leqslant \epsilon.$$

On note alors :

$$l = \lim_{x \longrightarrow a,\ x < a} f(x) \text{ ou } l = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

— *la fonction f admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour **limite épointée** en a si la restriction de f à $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ admet l pour limite en a. Autrement dit si f est définie sur un voisinage épointé de a et si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x \in]a-\eta, a+\eta[\setminus\{a\} \Longrightarrow \left|f(x) - l\right| \leqslant \epsilon.$$

On note alors :

$$l = \lim_{x \to a,\ x \neq a} f(x).$$

Ces définitions ont leurs analogues dans le cas des limites infinies. Ainsi :

Définition 33

Considérons une fonction numérique f de la variable réelle. Nous dirons que :

— *la fonction f **tend vers** $+\infty$ [resp. $-\infty$] en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ **à droite** si la restriction de f à $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ tend vers $+\infty$ [resp. $-\infty$] en a. On note alors :*

$$+\infty \text{ [resp. } -\infty \text{]} = \lim_{x \to a,\ x > a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

— *la fonction f **tend vers** $+\infty$ [resp. $-\infty$] en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ **à gauche** si la restriction de f à $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ tend vers $+\infty$ [resp. $-\infty$] en a. On note alors :*

$$+\infty \text{ [resp. } -\infty \text{]} = \lim_{x \to a,\ x < a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Notons qu'il ne peut être évidemment question de limite épointée en $\pm\infty$.

Remarques 14

— *Par définition, si f admet une limite à droite [resp. à gauche] en a, alors f est défini au voisinage à droite [resp. à gauche] de a et il existe un réel $h > 0$ tel que $]a, a+h[\subset \mathcal{D}_f$ [resp. $]a-h, a[\subset \mathcal{D}_f$].*

— *On utilise aussi parfois les notations $f(a^+)$ et $f(a^-)$ pour désigner les limites à droite et à gauche de f en a.*

Il faut faire attention au lien entre les notions de limites à droite et à gauche et la notion de limite tout court. En effet, considérons f une application définie sur $\mathcal{D}_f$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $a \notin \mathcal{D}_f$ et f est défini au voisinage de a, alors les trois notions coïncident dans le sens suivant :

f admet une limite en a
si et seulement si f admet une limite épointée en a
si et seulement si :
— *f admet une limite à droite et à gauche en a ;*
— *ces deux limites sont égales.*

Auquel cas :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a,\, x \neq a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Si $a \in \mathcal{D}_f$ et f est défini au voisinage de a, alors les trois notions ne coïncident pas. On a :

f admet une limite épointée en a
si et seulement si :
— *f admet une limite à droite et à gauche en a ;*
— *ces deux limites sont égales.*

Auquel cas :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a,\, x \neq a} f(x).$$

Mais attention, toujours dans ce cas, et en supposant que :

$$\lim_{x \to a, x \neq a} = l$$

existe, alors : *f a pour limite l en a si et seulement si $l = f(a)$.*

Remarques 15 *1. On note donc que si f admet une limite en a alors elle admet toujours une limite à droite et une limite à gauche en a. Et on observe aussi que parmi ces trois déclinaisons du concept de limite, la limite épointée est la plus flexible à manipuler.*

2. On fera bien attention au cas où $a \in \mathcal{D}_f$. En effet, il est tout à fait possible dans ce cas que la fonction ait une limite à droite et une limite à gauche égales (voire une limite épointée) sans pour autant avoir de limite. Ainsi par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

n'a pas de limite en 0 (si tel était le cas, cette limite devrait être nulle et donc $f(0)$ devrait être nul). Mais f possède une limite à droite et une limite à gauche en 0 égales et donc une limite épointé en 0.

Exemples 16

1. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction partie entière :*
   — *admet une limite à droite en n, puisque sa restriction à $]n, +\infty]$ coïncide au voisinage de n avec une fonction constante,*

— *admet une limite à gauche en* n*, puisque sa restriction à* $[-\infty, n]$ *coïncide avec une fonction constante au voisinage de* n*,*
— *mais n'a pas de limite en* n *car ces deux limites diffèrent.*

2. *La fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = \frac{1}{x}$ *n'admet pas de limite en* 0 *puisque l'on a :*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

REMARQUE 19 — *On observe donc ainsi que l'usage des limites à droite et à gauche s'avère très utile pour contredire l'existence éventuelle d'une limite. Nous reverrons ce point au paragraphe suivant.*

5. Limite finie par valeur positive & négative

Les raffinements de la notion de limite, vus dans le paragraphe précédent, qui consistent à considérer un voisinage à droite ou à gauche du point a considéré, peuvent s'appliquer aussi à la limite l finie de la fonction. Ainsi précisément :

DÉFINITION 34
Soit f *une fonction numérique définie sur un ensemble* $\mathcal{D}_f$*. Soit* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*. Nous dirons que* f *tend vers* $l \in \mathbb{R}$ ***par valeur positive [resp. négative]*** *en* a *si :*

1. f *est définie au voisinage de* a *;*
2. f *vérifie que*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad x \in \mathcal{D}_f, \quad |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) \in [l, l + \epsilon[\text{ respectivement }]l - \epsilon, l].$$

Dans ce cas, on notera :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l^+, \text{ respectivement } l^-.$$

Cette définition se décline de manière similaire pour une limite à droite, à gauche ou épointée en a.

6. Critère séquentiel

Il faut comprendre ici le mot "*séquentiel*" comme un anglicisme, i.e. au sens de "suite". Dans cette section nous établissons un critère permettant de caractériser la limite d'une fonction en terme de suite de nombres réels. Il s'agit d'une technique de *discrétisation* qui va s'avérer extrêmement puissante dans des situations théoriques.

PROPOSITION 33
Soit f *une application admettant une limite* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *en* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*. Si* (u_n) *est une suite d'éléments de* $\mathcal{D}_f$ *admettant* a *pour limite, la suite* $\big(f(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ *tend vers* l*.*

Preuve —[cas par exemple pour $l \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$.] Soit $\epsilon > 0$; on peut trouver $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ x \geqslant A \Longrightarrow \big|f(x) - l\big| \leqslant \epsilon.$$

Puisque $\lim u_n = +\infty$, on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ u_n \geqslant A.$$

On en déduit alors :

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ \big|f(u_n) - l\big| \leqslant \epsilon.$$

Donc $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. □

EXEMPLE 21 — *Sachant que* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, *on en déduit que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$ *puisque*

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

MÉTHODE 8 — *Ce résultat est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction f n'admet **pas** de limite en a : il suffit d'exhiber une suite convergeant vers a dont l'image par f ne converge pas, ou deux suites convergeant vers a dont les images par f ont des limites différentes. De même, pour montrer la discontinuité d'une fonction f en a (dans le chapitre suivant), il suffira de trouver une suite convergeant vers a et dont l'image par f ne converge pas vers $f(a)$.*

EXEMPLE 22 — *La situation de la méthode précédente apparaît souvent dans des cas de fonction "sur-oscillante" comme par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos(1/x)$. Cette fonction, dont le graphe est reproduit figure 4.2, n'a pas de limite en 0. En effet, la suite définie par $x_n = \frac{1}{n\pi}$ tend vers 0 alors que $f(x_n) = (-1)^n$ ne converge pas. Une autre façon de le démontrer consiste par exemple à considérer les deux suites $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{2}{4n\pi+\pi}$ qui tendent vers 0 alors que $f(x_n) = 1$ et $f(y_n) = 0$. En réalité, on pourrait même montrer que pour tout $y \in [-1, 1]$ il existe une suite (u_n) de $\mathbb{R}$ telle que $(f(u_n))$ tend vers y.*

Le résultat suivant est beaucoup plus fort car il donne un critère existentiel de limite et il nous sera donc très utile pour montrer l'existence d'une limite sans recours à la définition de la limite et sans recours aux techniques de calculs des paragraphes suivants.

THÉORÈME 10 (Critère de convergence séquentiel)
Une fonction f définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ en a si et seulement si l'image par f de toute suite de $\mathcal{D}_f$ convergeant vers a est une suite convergeant vers l.

Preuve —[cas où $a \in \mathbb{R}$]

- On sait déjà d'après le théorème précédent que si f admet l pour limite en a, alors l'image par f de toute suite de $\mathcal{D}_f$ convergeant vers a est une suite convergeant vers l.
- Démontrons la réciproque par contraposition : supposons que f ne tende pas vers l en a. Cela signifierait que :
$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists x \in \mathcal{D}_f, \quad |x-a| \leqslant \eta \text{ et } \big|f(x) - l\big| > \epsilon.$$
Prenons un tel $\epsilon > 0$. Pour tout entier n, on peut donc trouver un élément x_n de $\mathcal{D}_f$ tel que $|x_n - a| \leqslant 2^{-n}$ et $\big|f(x_n) - l\big| > \epsilon$.
La suite (x_n) ainsi construite tend vers a, et la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \big|f(x_n) - l\big| > \epsilon > 0$$
prouve que $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers l.

□

REMARQUES 16

1. *Un critère de convergence séquentiel existe de manière similaire pour une limite à droite ou à gauche.*
2. *Nous venons de voir dans la preuve de ce théorème un cas où il est utile de savoir écrire la négation de la convergence de la limite. Ce point est très important : il est tout aussi utile de connaître la propriété définissant un objet que la négation de cette propriété.*

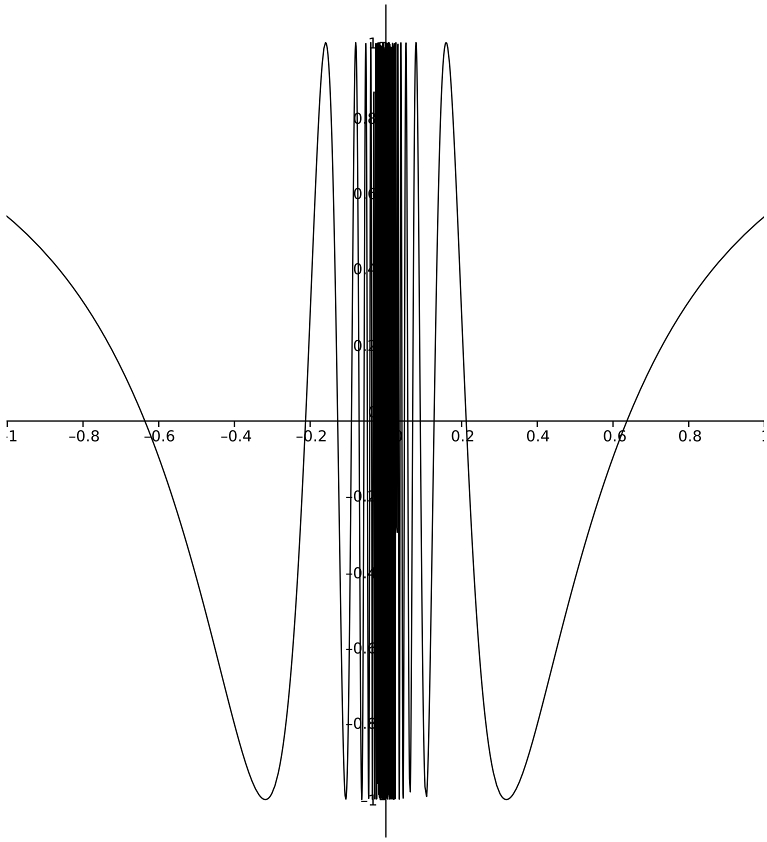


FIGURE 4.2 – Exemple de fonction sur-oscillante en 0

Nous verrons une utilisation de ce théorème pour démontrer le critère de Cauchy pour les fonctions dans le paragraphe suivant et, plus loin, le théorème de composition des limites.

7. Critère de Cauchy

Le critère de Cauchy [2] pour les suites réelles se transporte naturellement aux fonctions grâce au résultat du paragraphe précédent. La force de ce critère tient à ce qu'il permet de montrer qu'une fonction admet une limite finie en un point sans connaître a priori cette limite. Cela tient du miracle, mais pourtant dans le cas des nombres réels c'est vrai !

THÉORÈME 11
Une application f admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si :
— *cas où $a \in \mathbb{R}$:*

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall (x,y) \in (\mathcal{D}_f \cap]a-\eta, a+\eta[)^2\ ,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \epsilon.$$

2. Augustin Louis, baron Cauchy est né à Paris sous la Révolution Française en 1789 et est mort près de Paris en 1857. Son œuvre est tentaculaire. On lui doit notamment un immense travail de refonte de l'analyse avec pour aboutissement l'introduction des fonctions holomorphes. Il travailla aussi en optique ondulatoire...

— *cas où $a = +\infty$:*

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists A \in \mathbb{R}\ :\ \forall (x,y) \in (\mathcal{D}_f \cap]A, +\infty[)^2\ ,\ \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \epsilon.$$

— *cas où $a = -\infty$:*

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists A \in \mathbb{R}\ :\ \forall (x,y) \in (\mathcal{D}_f \cap]-\infty, A[)^2\ ,\ \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \epsilon.$$

Preuve —[cas par exemple où $a \in \mathbb{R}$]

— Supposons tout d'abord que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Alors pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in D_f \cap]a-\eta, a+\eta[, |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et en conséquence :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathcal{D}_f \cap]a-\eta, a+\eta[\right)^2, |f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - l| + |f(y) - l| \leqslant \varepsilon$$

et le critère est démontré.

— Supposons réciproquement que f vérifie le critère de Cauchy. Considérons une suite (u_n) de $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, alors la suite $(f(u_n))$ vérifie le critère de Cauchy et converge dans $\mathbb{R}$ en conséquence (d'après le théorème fondamental "*critère de Cauchy pour les suites*"). Ainsi f vérifie le critère de convergence séquentiel et donc f a une limite en a. ◄

□

REMARQUES 17

1. *Le critère de Cauchy possède une écriture similaire pour les limites à droite, à gauche ou épointées en un point.*
2. *Le critère de Cauchy peut se révéler très pratique pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite finie en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dira dans ce cas-là qu'elle diverge. Ainsi, on dira (par exemple dans le cas $a \in \mathbb{R}$) que f ne diverge au point $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists (x,y) \in (\mathcal{D}_f \cap]a-\eta, a+\eta[)^2\ , \quad |f(x) - f(y)| > \epsilon.$$

Le critère de Cauchy ne nous servira que rarement dans la suite. Cependant, il est bon de connaître ce résultat que nous retrouverons cette année et l'année prochaine.

8. Quelques conséquences directes des définition

Nous listons dans ce qui suit quelques conséquences directes et pratiques des différentes définitions de limites des sections précédentes. Ces propriétés seront mises à contribution dans la section suivante sur les opérations sur les limites.

PROPOSITION 34 (Obtention d'une limite par contrôle)
Une fonction f admet l pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ s'il existe une fonction g définie sur $\mathcal{D}_f$, tendant vers 0 en a et telle que $|f - l| \leqslant g$, i.e. telle que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\ ,\ \big|f(x) - l\big| \leqslant g(x).$$

Preuve —[Démonstration par exemple pour $a \in \mathbb{R}$.] S'il existe une fonction g tendant vers 0 et telle que $|f - l| \leqslant g$, alors on a :

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in D_g\,,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|g(x)\big| \leqslant \epsilon$$

ce qui prouve de façon immédiate :

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f(x) - l\big| \leqslant \epsilon.$$

□

EXEMPLE 23 — *La fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x+1} \end{array}$$

est définie au voisinage de 1*. Montrons qu'elle admet une limite en* 1*. Il faut donc prouver que* $f(x) - f(1)$ *tend vers* 0 *quand* x *tend vers* 1*. Pour* $x \in \mathbb{R}_+$*, on a :*

$$\left|f(x) - f(1)\right| = \left|\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right| \leqslant \frac{|x-1|}{2}$$

ce qui prouve le résultat puisque la fonction affine $x \mapsto (x-1)/2$ *tend vers* 0 *en* 1*.* ◀

PROPOSITION 35
Si une fonction f *tend vers* $l \in \mathbb{R}$ *en* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*, alors la fonction* $|f|$ *tend vers* $|l|$ *en* a*.*

Preuve — On a en effet [3] :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ \left||f|(x) - |l|\right| \leqslant \left|f(x) - l\right|$$

avec $\lim_{x \to a} \left|f(x) - l\right| = 0$. □

Du contrôle sur une fonction que permet le fait d'avoir une limite en un point, on peut souvent tirer des propriétés très utiles valables au voisinage du point en question. Par exemple :

PROPOSITION 36
Une application qui admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *est bornée au voisinage de* a*.*

Preuve —[Démonstration par exemple pour $a \in \mathbb{R}$.] Posons $l = \lim_a f$. Pour $\epsilon = 1$, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - l\right| \leqslant 1.$$

On a alors, avec $M = |l| + 1$:

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x)\right| \leqslant |l| + \left|f(x) - l\right| \leqslant M.$$

□

PROPOSITION 37
Soit m *un réel. Une application qui admet une limite* $l > m$ *en* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *est minorée par* m *au voisinage de* a*.*

Preuve —[Démonstration par exemple pour $a = -\infty$] Pour $\epsilon = l - m > 0$, on peut trouver un réel A tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ x \leqslant A \Longrightarrow \left|f(x) - l\right| \leqslant \epsilon.$$

Alors, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a :

$$x \leqslant A \Longrightarrow m - l \leqslant f(x) - l \leqslant l - m$$

ce qui donne $x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant m$. □

COROLLAIRE 9
Une application admettant une limite $l > 0$ *en* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *est minorée au voisinage de* a *par un réel strictement positif.*

3. On se souviendra notamment de l'inégalité fondamentale $\left||a| - |b|\right| \leqslant |a - b|\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Preuve — Appliquer le résultat précédent avec $m = l/2$. □

Remarque 20 — *On en déduit en particulier que si f admet une limite l non nulle en a, alors au voisinage de a, la fonction f garde un signe constant et ne s'annule pas.*

Corollaire 10
Si f admet une limite l non nulle en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $|f|$ est minorée au voisinage de a par un réel strictement positif.

Preuve — Si la fonction f tend vers $l \neq 0$, alors la fonction $|f|$ tend vers $|l| > 0$ et le corollaire 9 permet de conclure. □

Proposition 38
Si f coïncide avec g au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et si g admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite en a, alors f admet aussi l pour limite en a.

Preuve —[cas par exemple pour $a \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$] Puisque f coïncide avec g au voisinage de a, on peut trouver un réel $h > 0$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\ ,\ |x-a| \leqslant h \Longrightarrow \big(x \in D_g \text{ et } f(x) = g(x)\big).$$

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim_a g = +\infty$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in D_g\ ,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow g(x) \geqslant A.$$

Prenons $\alpha = \min(\eta, h)$. Si $x \in \mathcal{D}_f$ et $|x-a| \leqslant \alpha$ alors on a $x \in D_g$ et $f(x) = g(x)$. Donc :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\ ,\ |x-a| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

On a ainsi prouvé que f tendait vers $+\infty$ en a. □

Exemple 24 — *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + x + 1 - |x^2 - 1|.$$

Pour montrer que f admet $f(2)$ pour limite en 2, il suffit de remarquer qu'elle coïncide au voisinage de 2 avec la fonction $g : x \mapsto x+2$ et que cette fonction est continue en 2 comme le prouve l'égalité $\big|g(x) - g(2)\big| = |x-2|$.

Méthode 9 — *La proposition 34 nous donne un méthode pour démontrer qu'une fonction admet une limite l : il suffit de majorer $|f - l|$ par une fonction qui tend vers 0. Le caractère local de la notion de limite permet de ne faire cette majoration qu'au voisinage de a et donc de ne travailler qu'au voisinage de a.*

Proposition 39
Soient f et g deux applications définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- *Si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ et si $|f - l|$ est majorée par g au voisinage de a, alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$.*
- *Si $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ et si f est minorée par g au voisinage de a, alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.*
- *Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ et si f est majorée par g au voisinage de a, alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

Preuve —[cas par exemple pour $a = +\infty$]

— L'hypothèse de majoration au voisinage de a nous permet de trouver un réel A_1 tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\; x \geqslant A_1 \Longrightarrow \big(x \in D_g \text{ et } \big|f(x) - l\big| \leqslant g(x)\big).$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Comme $\lim\limits_a g = 0$, on peut trouver un réel A_2 tel que :

$$\forall x \in D_g\,,\; x \geqslant A_2 \Longrightarrow \big|g(x)\big| \leqslant \epsilon.$$

Il suffit de prendre $A = \max(A_1, A_2)$ pour avoir :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\; x \geqslant A \Longrightarrow \big|f(x) - l\big| \leqslant \epsilon.$$

— Les deux autres points se démontrent de façon similaire.

□

Exemples 17

1. *La fonction $f \,:\, x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+x-1}$ est définie au voisinage de $+\infty$ puisque le dénominateur ne s'annule qu'en deux points de $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle tend vers 1 en $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}_f$ et $x \geqslant 1$, on a :*

$$\big|f(x) - 1\big| = \frac{|x|}{|x^2 + x - 1|} \leqslant \frac{1}{x}\cdot$$

La fonction $|f - 1|$ est donc majorée au voisinage de $+\infty$ par une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$, donc f tend vers 1 en $+\infty$.

2. *La majoration :*

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

valable pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ prouve :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

en admettant que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. ◂

II Opérations algébriques sur les limites

Cette section regroupe les résultats souvent qualifiés de *théorèmes généraux* sur les limites, qui permettent de déterminer l'existence et la valeur d'une limite sans passer par la définition mais à l'aide d'un jeu algébrique de somme, produit et quotient de fonctions dont les limites sont connues.

Dans toute cette section, nous n'exposeront les propriétés qu'en terme de limite, mais des déclinaisons entièrement similaires existent à chaque fois en terme de limites à droites, à gauche et de limites épointées. Nous laissons au lecteur le soin de les écrire au fur et à mesure de ses besoins.

1. Combinaisons linéaires et produits

Proposition 40

Soient f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, ainsi que λ et μ deux réels. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = m$, alors :

$$\lim_{x\to a} (\lambda\, f(x) + \mu\, g(x)) = \lambda\, l + \mu\, m \;\text{ et }\; \lim_{x\to a} (f(x) \times g(x)) = l\, m.$$

Preuve —Traitons les deux cas indépendemment.

— On peut supposer que λ et μ sont non nuls. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, l'inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$\left|\left(\lambda\, f(x) + \mu\, g(x)\right) - (\lambda\, l + \mu\, m)\right| \leqslant |\lambda|\,\left|f(x) - l\right| + |\mu|\,\left|g(x) - m\right|.$$

Les fonctions $|f - l|$ et $|g - m|$ tendent vers 0 en a, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta_1 > 0$ et η_2 tels que :

$$\forall x \in D\cap]a - \eta_1, a + \eta_1[, \quad |f(x) - l| \leqslant \frac{\epsilon}{2\,|\lambda|}$$

et

$$\forall x \in D\cap]a - \eta_2, a + \eta_2[, \quad |g(x) - m| \leqslant \frac{\epsilon}{2\,|\mu|}.$$

Dans ce cas, en posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a :

$$\forall x \in D\cap]a - \eta, a + \eta[, \quad |\lambda|\,|f(x) - l| + |\mu|\,|g(x) - m| \leqslant \epsilon.$$

Ceci signifie que $|\lambda|\,\left|f - l\right| + |\mu|\,\left|g - m\right|$ tend vers 0 en a. Par suite, $\left|(\lambda\, f + \mu\, g) - (\lambda\, l + \mu\, m)\right|$ est majorée par une fonction qui tend vers 0 et donc :

$$\lim_{x\to a} \lambda\, f(x) + \mu\, g(x) = \lambda\, l + \mu\, m.$$

— Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left|f(x)\, g(x) - l\, m\right| &= \left|f(x)\big(g(x) - m\big) + m\big(f(x) - l\big)\right| \\ &\leqslant \left|f(x)\right|\,\left|g(x) - m\right| + |m|\,\left|f(x) - l\right|.\end{aligned}$$

La fonction f est bornée au voisinage de a, puisqu'elle admet une limite en a et la fonction $g - m$ tend vers 0 en a. Donc la fonction $|f|\,|g - m|$ tend vers 0 en a. De même, la fonction $|m|\,|f - l|$ tend vers 0 en a. La fonction $\left|(f \times g) - (l\, m)\right|$ est alors majorée par une fonction qui tend vers 0 et donc $\lim\limits_{a}(f \times g) = l \times m$.

□

PROPOSITION 41

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ainsi que f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

1. *Si g est minorée au voisinage de a, alors $f + g$ tend vers $+\infty$ en a.*
2. *Si g est minorée au voisinage de a par un réel strictement positif, alors $f \times g$ tend vers $+\infty$ en a.*

Preuve —[cas par exemple pour $a \in \mathbb{R}$]

1. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme g est minorée au voisinage de a, on peut trouver $\eta_1 > 0$ et $m \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow g(x) \geqslant m.$$

   La fonction f tendant vers $+\infty$ en a, on peut trouver $\eta_2 > 0$ tel que :

   $$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow f(x) \geqslant A - m.$$

   On en déduit :

   $$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \min(\eta_1, \eta_2) \Longrightarrow f(x) + g(x) \geqslant A.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Comme g est minorée au voisinage de a par un réel $m > 0$, on peut trouver $\eta_1 > 0$ tel que :

   $$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow g(x) \geqslant m > 0.$$

   La fonction f tendant vers $+\infty$ en a, on peut trouver $\eta_2 > 0$ tel que :

   $$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow f(x) \geqslant \frac{A}{m} \geqslant 0.$$

   On en déduit :

   $$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x - a| \leqslant \min(\eta_1, \eta_2) \Longrightarrow f(x)\, g(x) \geqslant A.$$

□

REMARQUE 21 — *Dans la deuxième partie de la proposition précédente, l'hypothèse "g strictement positive au voisinage de a" ne suffit pas pour avoir le résultat, comme le prouve l'exemple des fonctions définies au voisinage de $+\infty$:*

$$f\ :\ x \mapsto x \text{ et } g\ :\ x \mapsto \frac{1}{x}\cdot$$

PROPOSITION 42
Soient f et g deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et admettant, en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pour limites respectives l et m éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
- *Si $l+m$ n'est pas une forme indéterminée, alors $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = l+m$.*
- *Si $l\,m$ n'est pas une forme indéterminée, alors $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = lm$.*

Preuve —

- Le résultat est déjà connu si l et m sont réels.
- Pour la somme, si $l = +\infty$, on a $m \neq -\infty$ et donc la fonction g est minorée au voisinage de a, ce qui permet d'appliquer le résultat de la proposition précédente. Le cas $l = -\infty$ s'en déduit en considérant $-f$ et $-g$.
- Pour le produit, on se ramène de même au cas où l'une des fonctions tend vers $+\infty$, l'autre ayant une limite strictement positive et donc étant minorée au voisinage de a par un réel strictement positif.

□

EXEMPLES 18
1. *On prouve par récurrence que si n est un entier strictement positif, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.*
2. *On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+x+1\right) = +\infty$ puisque pour $x \neq 0$ on peut écrire :*
$$x^2+x+1 = x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\cdot$$
3. *Plus généralement, une fonction polynomiale a même limite en $\pm\infty$ que son terme de plus haut degré.*

2. Inverse et quotient

PROPOSITION 43
Si f est une fonction ayant une limite l non nulle en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors au voisinage de a, la fonction f ne s'annule pas et $\frac{1}{f}$ (qui est donc définie au voisinage de a) admet $\frac{1}{l}$ pour limite en a.

Preuve — Le corollaire 10 nous donne l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que l'on ait $\left|f(x)\right| \geqslant \alpha$ au voisinage de a, ce qui prouve que f ne s'annule pas au voisinage de a. Alors au voisinage de a, on a :

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{f(x)-l}{f(x)\,l}\right| \leqslant \frac{1}{|l|\,\alpha}\left|f(x)-l\right|.$$

Comme $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{|l|\,\alpha}\left|f(x)-l\right| = 0$, on en déduit $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$. □

COROLLAIRE 11
Si f et g sont deux applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = m \in \mathbb{R}^*,$$

alors $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$.

Preuve — Appliquer la proposition précédente et le résultat sur les produits de limites.

□

EXEMPLES 19

1. *Si p et q sont deux fonctions polynomiales, la fonction rationnelle $f = \frac{p}{q}$ est continue en tout point où elle est définie, i.e. en tout a où $q(a) \neq 0$.*
2. *Soit la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{2x^2-3x+1}{x^2+x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Les résultats précédents ne permettent pas de déterminer directement sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$, mais, pour tout $x \neq 0$, on peut écrire :*
$$f(x) = \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$
Donc f coïncide au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ avec le quotient d'une fonction qui tend vers 2 par une fonction qui tend vers 1. On peut donc en déduire :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2.$$

PROPOSITION 44

Soit f une application définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. *Si f tend vers $+\infty$ en a, alors au voisinage de a, la fonction f ne s'annule pas et $\frac{1}{f}$ tend vers 0 en a.*
2. *Si f tend vers 0^+ en a, alors $\frac{1}{f}$ tend vers $+\infty$ en a.*

Preuve —[cas par exemple pour $a \in \mathbb{R}$.]

1. La fonction f tendant vers $+\infty$ en a, elle est, au voisinage de a, supérieure à 1 (par exemple), ce qui montre que $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant \frac{1}{\epsilon}$$
ce qui donne :
$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{f(x)} \leqslant \epsilon$$
et prouve la convergence de f vers 0 en a.
2. D'après l'hypothèse, on peut trouver un réel $h > 0$ tel que :
$$\forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ 0 < |x-a| \leqslant h \Longrightarrow f(x) > 0.$$
Si l'on pose $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap]a-h, a+h[\setminus \{a\}$, la fonction $\frac{1}{f}$ est définie et strictement positive sur $\mathcal{D}$.
Supposons $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et établissons $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, i.e. :
$$\forall A > 0\,,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} \geqslant A.$$
Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Le réel $\frac{1}{A}$ est un nombre strictement positif, donc l'hypothèse $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ permet de trouver un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in \mathcal{D}\,,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \frac{1}{A}.$$
Pour $x \in \mathcal{D}$, on a alors :
$$|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| \geqslant A$$
ce qui donne le résultat puisque $\frac{1}{f}$ est positive sur $\mathcal{D}$.

$\square$

Remarques 18
- *De manière évidente, la proposition précédente se décline aussi pour* $-\infty$ *et* 0^-.
- *De même que pour les suites, en combinant ces résultats sur les inverses avec ceux relatifs aux produits, on obtient que si deux fonctions admettent des limites* l *et* m*, alors leur quotient admet pour limite* $\frac{l}{m}$ *s'il n'y a pas de forme indéterminée du type* $\frac{0}{0^\pm}$ *ou* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$*, i.e. si* l *et* m *ne sont pas tous les deux nuls, ou tous les deux infinis.*

III Limites et relation d'ordre

1. Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 45
Soient f *et* g *deux applications définies sur une partie* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}$ *et admettant des limites finies en* $a \in \overline{\mathbb{R}}$. *Si* $f \leqslant g$ *au voisinage de* a*, alors*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{\to a} g(x).$$

Preuve — La fonction $g - f$ étant positive au voisinage de a, elle coïncide avec sa valeur absolue au voisinage de a. Si $g - f$ tend vers l en a, alors :

$$l = \lim_{x\to a} g(x) - f(x) = \lim_{x\to a} |g(x) - f(x)| = |l| \geqslant 0.$$

$\square$

Remarques 19
1. *On ne peut pas améliorer les résultats précédents avec des inégalités strictes. Si* f *est strictement positive, on peut simplement conclure que sa limite (en supposant qu'elle existe) est positive ou nulle. Par exemple, on a* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$*, mais* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
2. *Encore une fois, la propriété précédente est vraie pour des limites à droites, à gauches ou épointées.*

2. Existence de limite par encadrement

La proposition suivante est remarquable, car, comme le critère de Cauchy, il s'agit d'un résultat d'existence de limite. Et mieux que le critère de Cauchy, cette proposition nous fournit la valeur de la limite. Ce résultat s'avèrera donc extrêmement utile car il s'agit d'un résultat *constructif* de calcul de limite : il permet de montrer l'existence d'une limite, contrairement au corollaire 45 qui nous donne des relations sur les limites une fois que l'on a montré leur existence.

Proposition 46
Soient f*,* g *et* h *trois applications définies sur une partie* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}$ *et admettant des limites finies en* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *telles que* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l \in \mathbb{R}$. *Si* $f \leqslant g \leqslant h$ *au voisinage de* a*, alors :*
- *la limite de* g *en* a *existe ;*
- *on a :* $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

Preuve — Au voisinage de a, on a $|g(x)-f(x)| \leqslant |h(x)-f(x)|$. La proposition 39 permet donc de conclure que $g-f$ tend vers 0.

Comme $g=(g-f)+f$, la fonction g a une limite et on a :
$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(g(x)-f(x)) + \lim_{x\to a} f(x) = 0+l=l.$$
□

Exemple 25 — *L'encadrement :*
$$\frac{x-1}{x+2} \leqslant \frac{x+\cos x}{x+2} \leqslant \frac{x+1}{x+2}$$
valable pour $x>-2$, prouve que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{x+2}=1$.

IV Théorème de composition des limites

Théorème 12
Soit g une application définie sur $\mathcal{D}_g$ admettant une limite $l\in\overline{\mathbb{R}}$ en $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Si f est une fonction à valeurs dans D_g admettant a pour limite en $b\in\overline{\mathbb{R}}$, alors la fonction $g\circ f$ admet l pour limite en b.

Preuve —[démonstration par exemple pour $b\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ et $l=-\infty$] Soit $A\in\mathbb{R}$. On peut trouver un réel $\epsilon>0$ tel que :
$$\forall x\in D_g\ ,\ |x-a|\leqslant\epsilon \Longrightarrow g(x)\leqslant A.$$
Comme on a $\lim_{x\to b} f(x)=a$, on peut trouver un réel $\eta>0$ tel que :
$$\forall t\in\mathcal{D}_f\setminus\{t_0\}\ ,\ |t-t_0|\leqslant\eta\Longrightarrow |f(t)-a|\leqslant\epsilon.$$
On a alors :
$$\forall t\in\mathcal{D}_f\setminus\{t_0\}\ ,\ |t-t_0|\leqslant\eta\Longrightarrow g(f(t))\leqslant A$$
puisque $\forall t\in\mathcal{D}_f\ ,\ f(t)\in D_g$, ce qui prouve que $g\circ f$ admet $-\infty$ pour limite en t_0. □

Exemple 26 — *Sachant que* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, *on en déduit que* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=1$.

V Cas des fonctions monotones

Théorème 13 (dit de la « limite monotone »)
Soit f une application croissante définie sur un intervalle ouvert $I=]a,b[$ avec $a\in\overline{\mathbb{R}}$, $b\in\overline{\mathbb{R}}$ et $a<b$.
- *Si f est majorée, elle admet pour limite en b le réel $\sup_I f$.*
- *Si f n'est pas majorée, on a $\lim_b f=+\infty$.*
- *Si f est minorée, elle admet pour limite en a le réel $\inf_I f$.*
- *Si f n'est pas minorée, on a $\lim_a f=-\infty$.*

Preuve —

Limites en b. Soit $E=\{f(x)\ |\ x\in I\}$. La fonction f est majorée si et seulement si l'ensemble E est majoré. Puisque I est non vide, E est non vide.

— Si f est majorée, alors $l = \sup E$ existe. Montrons que c'est la limite de f en b.
Soit $\epsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver un élément y_0 de E tel que $l - \epsilon < y_0 \leqslant l$. Si $x_0 \in I$ est un antécédent de y_0, on a :

$$\forall x \in]x_0, b] \; , \; l - \epsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant l$$

puisque f est croissante et majorée par l.
— Si b est réel, comme $b \notin I$ on a $b > x_0$. En prenant $\eta = b - x_0 > 0$ on a :

$$\forall x \in I \; , \; |b - x| \leqslant \eta \Longrightarrow \left| f(x) - l \right| \leqslant \epsilon.$$

— Si $b = +\infty$ on a directement :

$$\forall x \in I \; , \; x \geqslant x_0 \Longrightarrow \left| f(x) - l \right| \leqslant \epsilon.$$

Dans les deux cas, on a montré $\lim_b f = l$.

— Si f n'est pas majorée, alors E n'est pas majoré. Soit $A \in \mathbb{R}$. On peut donc trouver $y_0 \in E$ tel que $y_0 > A$. Prenons un antécédent x_0 de y_0. On a alors :

$$\forall x \in]x_0, b] \; , \; A < f(x_0) \leqslant f(x)$$

ce qui prouve, de la même façon que précédemment, que f tend vers $+\infty$ en b.

Limites en a.
Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction croissante g définie sur $[-b, -a]$ par $g(t) = -f(-t)$.

□

REMARQUES 20
— *Il existe des résultats analogues pour une fonction f décroissante sur un intervalle ouvert. On les obtient en appliquant le théorème précédent à la fonction $-f$.*
— *Pour une fonction monotone, on voit immédiatement sur un dessin la condition de majoration ou de minoration nécessaire pour montrer que f admet une limite finie en une borne de son intervalle (ouvert) de définition.*
— *En revanche, si f est monotone sur un intervalle I, en appliquant le théorème 13 à la restriction de f à I privé de ses bornes, on en déduit que :*
  — *si I admet un plus grand élément b, la fonction f admet une limite à gauche en b, et cette limite est finie puisque f est majorée (ou minorée) par $f(b)$,*
  — *si I admet un plus petit élément a, la fonction f admet une limite finie à droite en a.*

Le résultat réellement important est le suivant, car il permet de s'affranchir de la question de l'existence des limites pour le cas des fonctions monotones.

THÉORÈME 14
Une application f monotone définie sur un intervalle I admet des limites finies à droite et à gauche en tout point qui n'est pas une extrémité de I.

Preuve — Quitte à considérer $-f$, on peut supposer f croissante. Si a est un élément de I qui n'est pas une extrémité de I, alors la restriction de f à $I \cap [-\infty, a]$ est croissante et majorée par $f(a)$. Donc f admet une limite à gauche finie en a et on a

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a).$$

De même pour la limite à droite. □

REMARQUES 21 — *Si f est une fonction croissante sur un intervalle I et si a n'est pas une extrémité de I, on a, d'après la démonstration précédente :*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x).$$

— *Si f est une fonction croissante sur un intervalle I et si a et b sont deux éléments de I tels que $a < b$, alors $\lim_{x\to a^+} f(x) \leqslant \lim_{x\to b^-} f(x)$. En effet, soit c strictement compris entre a et b. La limite de f à droite en a est sa borne inférieure sur $I \cap [a, +\infty]$, donc est plus petite que $f(c)$. De même, on a $f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, ce qui donne le résultat.*

— *On a des résultats similaires pour des fonctions décroissantes.*

Chapitre 5

Rappels sur la notion de continuité des fonctions

L'objectif de ce chapitre est de rappeler la définition de la continuité et les propriétés élémentaires des fonctions continues puis de montrer comment cette définition de nature *locale* permet de démontrer des théorèmes de nature *globale*.

Table des matières du chapitre

I Point de vue local

1. Définition

Définition 35

On dit qu'une fonction f, définie en a est ***continue en*** *a si f a une limite finie en a*

Remarques 22 *1. Dans ce cas (si f est continue en a), alors on déduit directement de la définition que :*

— *f est définie au voisinage de a ;*
— *comme f est définie en a, on a*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

2. *Si la fonction n'est pas continue en a, on dira qu'elle est discontinue en ce point.*

DÉFINITION 36
De même on dit que f, définie en a est
— ***continue à droite en** $a \in \mathbb{R}$ si f a une limite à droite en a qui vaut $f(a)$;*
— ***continue à gauche** en a si f a une limite à gauche en a qui vaut $f(a)$.*

REMARQUE 22 — *Ainsi si $a \in \mathcal{D}_f$, alors f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.*

Le lecteur vérifiera qu'il est bien capable de transcrire ces définitions de continuité en un point en terme de quantificateurs comme dans le chapitre précédent. ◄

EXEMPLE 27 — *Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

— *La fonction f est continue à gauche en 0 puisque sa restriction à $\mathbb{R}_-$ est nulle.*
— *On a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ puisque la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto e^{-1/x}$ et que l'on a :*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \ et \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0.$$

Donc f est continue à droite en 0.

Donc f est continue en 0.

Toutes les règles obtenues dans le chapitre précédent concernant les calculs de limite ont un point peuvent se traduire en terme de continuité (ou de continuité partielle à droite ou à gauche) d'une fonction en un point. Ainsi on peut citer :
— toute combinaison linéaire de deux fonctions continues en un point est continue en ce point ;
— tout produit ou quotient de deux fonctions continues en un point dont le dénominateur ne s'annule pas est continue en ce point ;
— toute composée de fonctions continues en des points compatibles est continue au point en question.
— le critère de limite séquentielle s'adapte de manière immédiate au cas de la continuité ainsi que le critère de Cauchy.

EXEMPLE 28 — *La relation $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}\right)$ définit une fonction continue en 0.*

En effet, la fonction h :

$$x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 avec $h(0) = 2 > 0$.

Donc h est strictement positive au voisinage de 0 et la fonction :

$$f = \ln \circ h$$

est définie au voisinage de 0.

La continuité en 2 de la fonction $\ln$ nous donne alors la continuité de f en 0.

2. Prolongement par continuité

DÉFINITION 37
Si f est une application non définie en $a \in \mathbb{R}$ qui admet une limite finie l en a, alors la fonction g définie sur $\mathcal{D}_f \cup \{a\}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} l & si\ x = a \\ f(x) & si\ x \in \mathcal{D}_f \end{cases}$$

est continue en a.

*Cette fonction g est appelée le **prolongement par continuité** en a de la fonction f.*

REMARQUE 23 — *On dira souvent : « prolongeons f par continuité en posant $f(a) = l$ » ou « quitte à prolonger f par continuité en a, on peut supposer que f est continue en a » et l'on notera de la même façon la fonction et son prolongement, bien qu'en toute rigueur il s'agisse de deux fonctions distinctes, car elles n'ont pas le même ensemble de départ.*

EXEMPLES 20

1. *Nous verrons que l'on peut prolonger par continuité en 0 la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ en posant $f(0) = 1$.* ◀
2. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^{-1/x}$ peut se prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.* ◀

II POINT DE VUE GLOBAL

À la différence des sections précédents, nous allons avoir besoin ici de fonctions qui soient définies au voisinage de tous les points de leur ensemble de définition (ou éventuellement sur un voisinage à gauche ou à droite) afin de parler des limites de la fonction f en tous les points de leur ensemble de définition. C'est pourquoi nous choisissons ici d'imposer que $\mathcal{D}_f$ soit dans tout ce chapitre **une union d'intervalles de $\mathbb{R}$ contenant chacun au moins deux points.**

1. Définition

DÉFINITION 38
*On dit que $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est **continue** sur $\mathcal{D}_f$, si f est continue en tout point de $\mathcal{D}_f$.*

Des règles opératoires rappelées dans la section précédentes, on déduit :

PROPOSITION 47
Les combinaisons linéaires et produits de fonctions continues sont des fonctions continues. Les quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sont continues. Les composées de fonctions continues sont des fonctions continues.

L'identité et la fonction constante 1 étant continues, on peut montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi les fonctions polynomiales sont continues en tout point de $\mathbb{R}$, puisque ce sont des combinaisons linéaires de puissances de l'identité. De même une fonction homographique et, plus généralement, toute fraction rationnelle est continue sur tout intervalle où elle est définie.

De manière générale, toute fonction obtenue par des sommes, des produits, des quotients et des composées de fractions rationnelles et de fonctions usuelles (comme sin, ln, arctan) qui sont continues sur leur domaine de définition, est continue sur tout ensemble où elle est définie.

On note $\mathcal{C}(\mathcal{D}_f)$ ou $\mathcal{C}^0(\mathcal{D}_f)$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathcal{D}_f$. D'un point de vue algébrique (cf. cours "algèbre 1"), il s'agit d'un espace vectoriel et d'une $\mathbb{R}$-algèbre. Il s'agit aussi d'un sous-anneau de $\mathcal{F}(\mathcal{D}_f, \mathbb{R})$. Il faut bien avoir à l'esprit que cette structure est "*grosse*" et que ce n'est surtout pas une structure de dimension finie. Il faut intuitivement imaginer que tout espace de la forme $\mathbb{R}^n$ est mince comme une feuille de papier à côté de cet espace !

EXEMPLE 29 — *La fonction f définie par :*

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \neq 0\,,\ f(x) = x^2 \sin(1/x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$. En effet :

- *Les théorèmes généraux nous donnent la continuité de f sur $\mathbb{R}^*$: au voisinage de tout point $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction f coïncide avec $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ qui est continue en a comme produit d'une fonction polynôme et de la composée de la fonction* sin *avec une fraction rationnelle définie au voisinage de a.*
- *Pour la continuité en 0, on remarque :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f(x)\right| \leqslant x^2,$$

et comme $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

REMARQUES 23 — *Si f est continue sur $\mathcal{D}_f$, alors par composition $|f|$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.*
- *Ainsi si f et g sont continues sur $\mathcal{D}_f$, alors*[1] $\sup(f,g)$ *et* $\inf(f,g)$ *sont continues sur $\mathcal{D}_f$.* ◀
- *Et en conséquence si f est continue sur $\mathcal{D}_f$, alors sa partie positive $f^+ = \sup(f,0)$ et sa partie négative $f^- = \sup(-f,0)$ sont continues sur $\mathcal{D}_f$.*

2. Restrictions & recollements

PROPOSITION 48
Soit f une fonction continue sur $\mathcal{D}_f$. La restriction de f à tout intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$ est continue sur I.

1. On se souviendra des relations $\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$ qui donnent la continuité de $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$.

Preuve — Soit $a \in I$. Au voisinage de a (éventuellement un voisinage à droite ou à gauche) la restriction de f à I coïncide avec f donc est continue en a. □

PROPOSITION 49
Soient f et g deux fonctions continues définies sur les intervalles respectifs $]a,b]$ et $[b,c[$ telles que $f(b) = g(b)$. Le recollement h de ces deux fonctions :

$$\begin{array}{rcl} h\ :]a,c[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} f(x) \ \text{si } x \in]a,b] \\ g(x) \ \text{si } x \in [b,c[\end{array} \right. \end{array}$$

est une fonction continue.

Preuve —Soit $x_0 \in]a,c[$.

- Si $x_0 \neq a$, la continuité de f en x_0 est une conséquence du caractère local de la continuité car f coïncide au voisinage de x_0 avec sa restriction à $]a,b]$ ou à $[b,c[$.
- Si $x_0 = b$, la continuité des restrictions de f à $]a,b]$ et $[b,c[$ est équivalente à la continuité à droite et à gauche de f en b, donc à sa continuité en b.

□

EXEMPLES 21

1. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x \ \text{si } x \geqslant 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ sinon}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ puisque ses restrictions à $[0,+\infty[$ et à $]-\infty,0]$ sont continues.

2. *Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$g(x) = \ln|x| \ \text{si } |x| \geqslant 1 \text{ et } g(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Les restrictions de g à $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$ sont continues puisque la fonction $x \longmapsto \ln|x|$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Comme $\ln(1) = 0$, la restriction de g à $]-1,1[$ est nulle, donc continue. On en déduit que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Exemples

L'étudiant débutant a tendance à ériger les exemples de fonctions qu'il découvre dans son cours ou dans sa feuille de TD en généralité et à croire que toute fonction numérique de la variable réelle est ou bien toujours continue, ou bien discontinue en un nombre fini voire dénombrable de points... La réalité est malheureusement (ou heureusement) inverse. L'hypothèse de continuité est une hypothèse de régularité très forte sur une fonction et il est simple de construire des fonctions qui soit continues nulle part ou discontinues sur un ensemble dense de points. Pour ce faire, considérons les deux exemples célèbres suivants.

1. *La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$:* il s'agit de la fonction

$$\begin{array}{rcl} \chi_{\mathbb{Q}}\ :\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

Supposons que $\chi_{\mathbb{Q}}$ soit continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $\epsilon = \frac{1}{2}$ fixé :

— si $x_0 \in \mathbb{Q}$, la continuité en x_0 nous assure alors qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) \in]\frac{1}{2}, 1];$$

— si $x_0 \notin \mathbb{Q}$, la continuité en x_0 nous assure alors qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) \in [0, \frac{1}{2}[.$$

Mais dans un cas comme dans l'autre, la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ apporte une contradiction.

Cette fonction n'est donc continue nulle part. L'étude de cette fonction sera donc pour nous impossible dans le cadre de ce cours, vu que la continuité des fonctions sera dans l'immense majorité des cas, notre hypothèse de base... ◄

2. *La fonction de Thomae :* il s'agit de la fonction

$$\begin{array}{rccl} \chi_{\mathbb{Q}} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ où } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction que l'on visualisera sur le graphe (5.1)est discontinue en tout rationnel autre que 0. En effet, considérons un rationnel $x_0 = \frac{p}{q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Si f était continue en x_0, alors sa limite en x_0 étant strictement positive, elle serait strictement positive au voisinage de x_0, ce qui n'est pas par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
En revanche cette fonction est continue en tout irrationnel et en 0. En effet, considérons $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0\}$ et prenons $\epsilon > 0$. Posons $Q = E(\frac{1}{\epsilon})$. L'ensemble

$$\mathscr{E} = \bigcup_{q=1}^{Q} \frac{1}{q}\mathbb{Z}$$

n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ et x_0 n'est pas dans cet ensemble, donc il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap \mathscr{E} = \emptyset$. Mais alors tout rationnel r contenu dans $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ possède un dénominateur (sous forme irréductible) supérieur ou égal à $Q + 1$ et donc $\chi_{\mathbb{Q}}(r) < \epsilon$. Nous venons de démontrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ est continue en tout irrationnel.

III Les trois théorèmes globaux sur la continuité

Nous avons conclu la section précédente sur l'idée que l'hypothèse de continuité était une condition forte de régularité. Il est donc naturel que découle de cette propriété forte des théorèmes importants. Ils sont au nombre de trois : le *théorème des valeurs intermédiaires*, le théorème sur l'image continue d'un segment et celui sur la continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue.

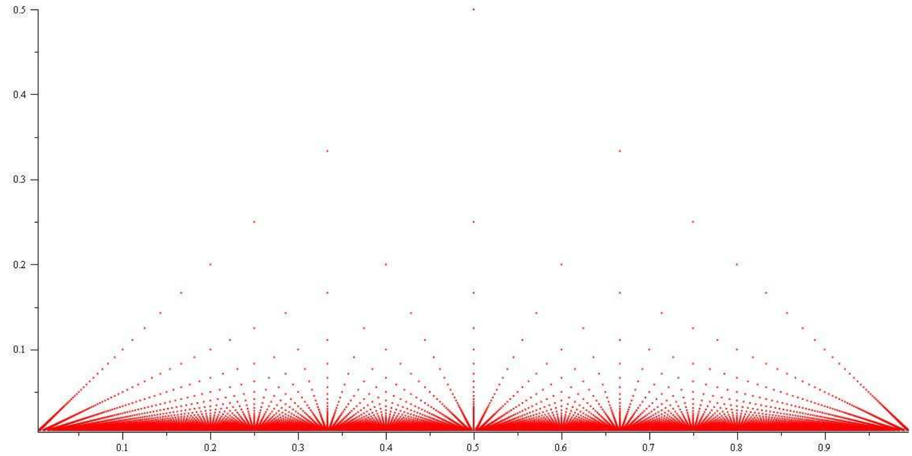


Figure 5.1 – La fonction de Thomae

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 15
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux points de I tels que $f(a)f(b) < 0$, alors :

$$\exists c \in]a,b[: \; f(c) = 0.$$

Il faut bien comprendre que la condition $f(a)f(b) < 0$ signifie que f *change de signe* entre les points a et b. Par ailleurs, il faut comprendre aussi que ce théorème fournit un résultat d'existence (on parlera de *théorème existentiel*) mais qu'il ne fournit absolument pas de moyen de calcul a priori de l'objet (le nombre c) dont il montre l'existence. On parle dans ce cas de *théorème existentiel non explicite*. C'est sous ce point de vue que ce résultat est remarquable car il fournit l'existence d'un objet sans donner de moyen de "calculer" l'objet. Le "*calcul*" naïf du point c en question peut se révéler dans certains cas redoutablement difficile (racine de polynômes) voire dans certains cas "impossible" (au sens par exemple des de la résolubilité des équations polynômiales de degré supérieur ou égal à 5).

Preuve —Méthode par dichotomie Supposons par exemple $a < b$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$.

Construisons deux suites (a_n) et $(b_n)b$ par récurrence :

- En posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$, on a $a_0 \leqslant b_0$ et $f(a_0) \leqslant 0 \leqslant f(b_0)$.
- Supposons a_n et b_n construits tels que $a_n \leqslant b_n$ et $f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$ et prenons $c_n = (a_n + b_n)/2$.
  - Si $f(c_n) \leqslant 0$ on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
  - Si $f(c_n) > 0$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

  Dans les deux cas on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ et $f(a_{n+1}) \leqslant 0 \leqslant f(b_{n+1})$.

La suite (a_n) ainsi construite est croissante, la suite (b_n) ainsi construite est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n \leqslant b_n$.

Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ puisque par construction on a : ◄

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Par conséquent les deux suites sont adjacentes et vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n).$$

En appelant alors c leur limite commune, on a $c \in]a,b[$. En passant à la limite, la continuité de f en c nous donne $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$, d'où le résultat. □

REMARQUES 24 — *On peut aussi énoncer le résultat précédent en disant que, sur un intervalle, une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe constant.*

— *La démonstration précédente nous donne un algorithme simple pour approximer la valeur du point c. On pense notamment au cas d'une racine de l'équation $f(x) = 0$: c'est la méthode de résolution par dichotomie que l'on arrête lorsque $(b-a)/2^n$ est inférieur à la précision demandée.*

Le théorème des valeurs intermédiaires est à proprement parler le théorème suivant :

THÉORÈME 16 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f une application continue sur un intervalle $]a,b[$. Toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par la fonction f sur $]a,b[$.

Preuve — Si d est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il suffit d'appliquer le théorème 15 à la fonction $f-d$. □

REMARQUES 25 — *Il existe une variante du résultat précédent utilisant une limite. Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ ($a \in \overline{\mathbb{R}}$) telle que :*

$$f(b) > 0 \text{ et } \lim_a f = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Si $l < 0$ (en particulier si $l = -\infty$), alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.
En effet, puisque la limite de f en a est strictement négative, f est strictement négative au voisinage de a. Donc on peut trouver $a' \in]a,b[$ tel que $f(a') < 0$.
Par suite il existe donc $c \in]a',b[$ tel que $f(c) = 0$.

— *On a aussi le résultat plus général suivant : si f est continue sur I et admet aux extrémités de I des limites finies ou infinies (ou des valeurs) non nulles et de signes opposés, alors f s'annule en au moins un point de I.*
Il suffit de traiter chacun des cas :

$$I =]a,b]\,,\ I =]a,+\infty]\,,\ I =]a,b[\,,\ \ldots$$

de la même façon que ci–dessus.

La version la plus générale du théorème des accroissements finis qui trouve sa vraie traduction théorique dans la notion de connexité est la version suivante :

COROLLAIRE 12
L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Preuve — Si f est continue sur un intervalle I, il faut montrer que $f(I)$ est aussi un intervalle, i.e. :

$$\forall (y_1,y_2) \in f(I)^2\,,\ ]y_1,y_2[\subset f(I).$$

Soient $(y_1,y_2) \in f(I)^2$ et $y \in]y_1,y_2[$. Prenons $(x_1,x_2) \in I^2$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence d'un élément c de I compris entre x_1 et x_2 tel que $y = f(c)$. Donc $y \in f(I)$. □

PROPOSITION 50
Si f est continue et strictement monotone sur I, le tableau suivant donne l'intervalle $f(I)$ en

fonction de I :

	I	$]a,b[$	$]a,b]$	$[a,b[$	$[a,b]$
$f \nearrow$	$f(I)$	$]f(a),f(b)[$	$]f(a),\lim\limits_b f]$	$[\lim\limits_a f, f(b)[$	$[\lim\limits_a f, \lim\limits_b f]$
$f \searrow$	$f(I)$	$]f(b),f(a)[$	$[\lim\limits_b f, f(a)[$	$]f(b),\lim\limits_a f]$	$[\lim\limits_b f, \lim\limits_a f]$

Preuve — Traitons par exemple le cas où f est croissante et où $I =]a,b]$.

La fonction f étant croissante, on a :

$$\forall x \in I\,,\ f(x) \geqslant f(a)$$

et donc $f(a)$ est le plus petit élément de $f(I)$.

— Si f n'est pas majorée, alors :

$$f(I) =]f(a), +\infty]$$

ce qui donne le résultat puisque $\lim\limits_b f = +\infty$.

— Si f est majorée, sa limite en b est $\sup\limits_I f$ et $f(I)$ est alors un intervalle de bornes $f(a)$ et $M = \lim\limits_b f$ qui est égal à $\sup f(I)$ d'après le théorème sur les limites des fonctions monotones.
Comme l'intervalle I n'a pas de plus grand élément, pour tout $x \in I$, on peut trouver $y \in I$ tel que $y > x$.
Comme f est strictement croissante, on a alors $f(x) < f(y) \leqslant M$, ce qui montre que $M \notin f(I)$.
Donc $f(I) =]f(a), M]$, ce que l'on voulait démontrer.

□

Remarque 24 — *En d'autres termes, si f est une application continue sur l'intervalle I, l'intervalle $f(I)$ se "voit" donc dans le tableau de variations de f.*

2. Image continue d'un segment

Théorème 17
Toute application continue sur un segment possède un maximum et un minimum.

Preuve — Soit f une fonction continue sur un segment $]a,b[$.

— Montrons que f admet une borne supérieure M sur $]a,b[$ et qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que $M = f(x)$.

— En raisonnant par l'absurde, supposons f non majorée sur $]a,b[$ i.e. :

$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists x \in]a,b[:\ f(x) > A.$$

On peut alors construire une suite (x_n) d'éléments de $]a,b[$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ f(x_n) \geqslant n. \qquad (*)$$

Cette suite étant bornée, on peut en extraire une sous–suite convergente $\left(x_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la limite α est dans $]a,b[$.
Comme f est continue en α, on en déduit que $\left(f(x_{\phi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente donc bornée, ce qui est en contradiction avec la relation $(*)$.
Donc f est majorée sur $]a,b[$.

— Faisons à nouveau un raisonnement par l'absurde, en supposant que $M = \sup\limits_I f$ ne soit pas atteint, i.e. :

$$\forall x \in]a,b[\,,\ f(x) \neq M.$$

La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{M-f(x)}$ est alors définie et continue sur $]a,b[$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Or, on a vu dans la première partie de la démonstration que toute application continue sur $]a,b[$ est majorée.
Soit donc A un majorant (strictement positif) de g. On a :

$$\forall x \in]a,b[\,,\ g(x) \leqslant A.$$

On en déduit :

$$\forall x \in]a,b[\,,\ f(x) \leqslant M - \frac{1}{A}\cdot$$

Le réel $M - \frac{1}{A}$ est alors un majorant de f strictement plus petit que M, ce qui contredit le fait que M est la borne supérieure de f sur $]a,b[$.
Donc il existe $x \in]a,b[$ tel que $M = f(x)$.

— En appliquant ce qui précède à $-f$, on en déduit que f possède aussi une borne inférieure et que celle-ci est atteinte.

□

Exemple 30 — *Si f est une fonction continue strictement positive d'un segment I dans $\mathbb{R}$, alors :*

$$\exists \alpha > 0\ :\ \forall x \in I\,,\ f(x) \geqslant \alpha.$$

En effet la borne inférieure α de f existe et est atteinte. Donc d'après l'hypothèse, elle est strictement positive.

Remarque 25 — *Les deux hypothèses continue sur un segment sont indispensables pour disposer du résultat, comme le montre l'exemple des fonctions suivantes dont la borne inférieure 0 n'est pas atteinte :*

— *la fonction définie sur le segment $]0,1]$ par :*

$$f(0) = 1 \ \textit{et}\ \forall x \in]0,1[\,,\ f(x) = x,$$

— *la fonction exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 18
Si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors :

$$f\big([a,b]\big) = [m, M]$$

où $m = \min\limits_{]a,b[} f$ et $M = \max\limits_{]a,b[} f$.

Ce résultat s'énonce encore en disant que toute application continue sur un segment est bornée, atteint ses bornes ainsi que toutes les valeurs comprises entre celles-ci.

Preuve — L'image d'un segment est un intervalle (corollaire 12) qui contient ses bornes (théorème 17). C'est donc un segment. □

3. Réciproque d'une fonction continue

Lemme 5
Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue.

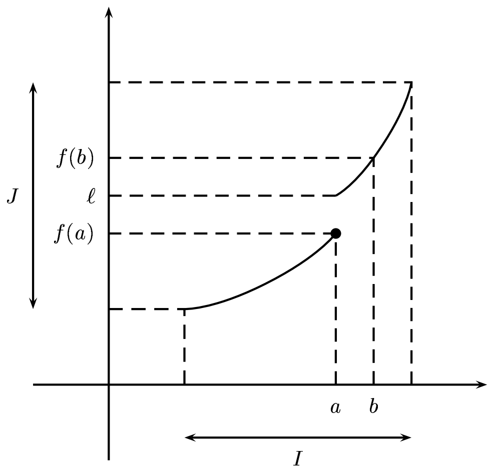
Preuve — Supposons par exemple f croissante.

— Soit a un élément de I qui n'est pas sa borne supérieure. La fonction f étant croissante, elle admet en a une limite à droite $l \geqslant f(a)$.
Supposons $l > f(a)$. On a pour tout x élément de I :

$$\big(x > a \Longrightarrow f(x) \geqslant l\big)$$

et :

$$\big(x \leqslant a \Longrightarrow f(x) \leqslant f(a)\big).$$



La fonction f ne prend donc aucune valeur strictement comprise entre $f(a)$ et l.
Or, puisque a n'est pas le plus grand élément de I, on peut trouver $b \in I$ strictement plus grand que a, ce qui donne $f(a) \leqslant l \leqslant f(b)$.
Comme $J = f(I)$ est un intervalle, on a $]f(a), f(b)[\subset J$ et en particulier toutes les valeurs de $[f(a), l]$ sont atteintes.
C'est contradictoire, donc $l = f(a)$. Par suite, f est continue à droite en a (i.e. continue en a si a est le plus petit élément de I).

— De même, on démontre que f est continue à gauche en tout point de I qui n'est pas sa borne inférieure.

Donc f est continue sur I. □

Théorème 19

Si f est une application continue strictement monotone sur un intervalle I, alors f induit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, et sa réciproque est continue de J dans I.

Preuve — La fonction f est injective puisqu'elle est strictement monotone. Elle est donc bijective de I sur $J = f(I)$ qui est un intervalle d'après le corollaire 12.

Sa réciproque est alors une bijection strictement monotone de l'intervalle J sur l'intervalle I, donc est continue sur J d'après le lemme précédent. □

Exemples 22

1. *Soit n un entier naturel non nul. L'application $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^n \in \mathbb{R}_+$ est continue, strictement croissante prend la valeur 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.*
   C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ dont la réciproque est continue.
   Cette réciproque est la fonction racine n^e : $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sqrt[n]{x}\mathbb{R}_+$.
2. *De même, si n est un entier naturel impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui permet de définir la fonction racine n^e sur $\mathbb{R}$.*
3. *La fonction* $\sin$ *est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Elle induit donc une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $]-1, 1[$. Sa réciproque, la fonction "Arc sinus", est donc continue sur $]-1, 1[$.*

Chapitre 6

Rappels sur la notion de dérivabilité

Dans tout ce chapitre, la lettre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et les fonctions, définies sur I, sont supposées à valeurs réelles.

L'objectif du chapitre est :

1. en terme de contenu mathématique : de poser la définition précise d'une fonction dérivable d'une part et de comprendre l'enchainement & l'utilisation des théorèmes de natures globales sur la dérivabilité ;
2. en terme méthodologique : de comprendre que la dérivation est un premier pas en direction de l'approximation locale des fonctions d'une part, de faire acte de rigueur en travaillant précisément les preuves des propriétés bien connues sur les calculs de dérivés d'autre part, et d'acquérir le réflexe consistant à utiliser les « *accroissements finis* » dans des situations adéquates.

Table des matières du chapitre

I Point de vue local

Dans toute cette section f est une fonction définie sur I, et a est un point de I.

Si f est une fonction continue en a, alors $f(a)$ est une *approximation* de f en a dans le sens où :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Mais nous savons que cette approximation est bien peu précise. Comme nous pouvons le voir sur la figure 6.1, utiliser l'approximation qu'offre la continuité consiste à remplacer f au voisinage de a par la droite horizontale $y = f(a)$. Or il est clairement plus judicieux de remplacer f au voisinage de a par une corde passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$, la corde (AB) par exemple. Allons plus loin : nous voyons aussi qu'en faisant "tendre" le point B vers le point A fixé, la corde (AB) admet une "position limite" ou "converge" vers une droite qui épouse parfaitement la forme de la courbe f. Nous connaissons cette droite sous le terme de *tangente* à la courbe f au point a. Et nous voyons clairement sur ce dessin que l'approximation de f en a par cette droite est "meilleure" que celle de f par la droite horizontale $y = f(a)$. Ce changement de précision dans l'approximation de f en un point consiste à passer de l'approximation par continuité (ou approximation à l'ordre 0) à l'approximation par la dérivée de la fonction (ou approximation à l'ordre 1).

1. Définition de la dérivée en un point, tangente

Reprenons la situation précédente et introduisons la fonction **taux** (ou **taux d'accroissement**) de la fonction f au point a :

$$\begin{array}{rccc} \tau_{f,a} : & I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

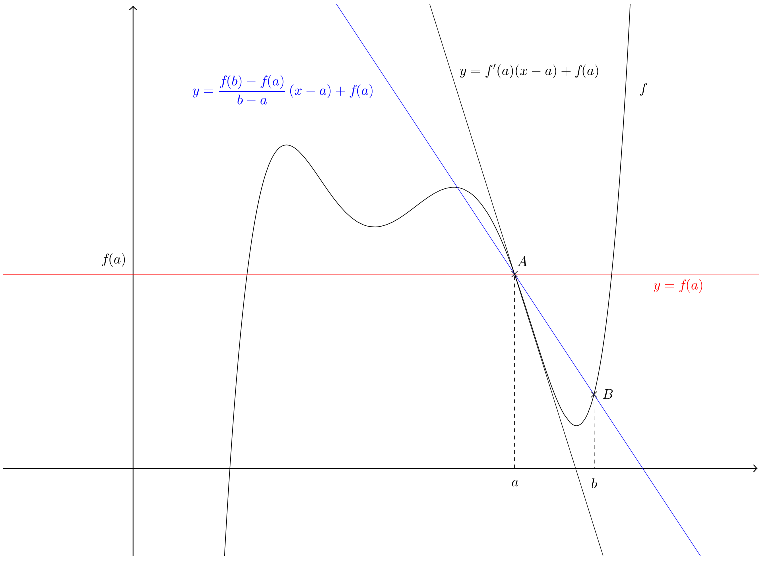


Figure 6.1 – Paradigme de l'approximation d'une fonction par sa tangente en un point

Ainsi, sur la figure 6.1, $\tau_{f,a}(b)$ est la pente de la corde (AB) ce qui nous conduit à penser que la pente de la tangente est un "taux infinitésimal" où l'on ferait "tendre" le point B vers le point A. Nous formaliserons cette idée imprécise au travers de la définition suivante.

Définition 39

*Nous dirons que f est **dérivable** en a si la fonction $\tau_{f,a}$ possède une limite finie en a.*

*Dans ce cas, cette limite sera appelée le **nombre dérivé** de f en a et sera notée $f'(a)$ (ou aussi $Df(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$)*

Ainsi, toujours dans ce cas, nous appellerons **tangente** à la courbe f au point a la droite d'équation :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a).$$

Dans le cas non dérivable où la fonction $\tau_{f,a}$ tend vers $\pm\infty$ en a, nous dirons que f admet une **tangente verticale** en a. Dans le cas dérivable où $f'(a) = 0$, nous dirons que f admet une **tangente horizontale** en a.

Nous observons bien que cette droite *approxime* f au point a dans le sens où :

$$\lim_{x\to a} f(x) - (f'(a)(x-a)+f(a)) = 0.$$

Précisons ce point : posons

$$\forall x \in I, \quad \varepsilon_0(x) = f(x) - f(a)$$

et

$$\forall x \in I, \quad \varepsilon_1(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \text{ si } x \neq a \\ 0 \text{ si } x = a \end{cases}.$$

Ces deux fonctions tendent vers 0 quand x tend vers a. Et nous retrouvons bien les approximations précédentes en écrivant :

$$
\begin{array}{lll}
(0) & f(x) = \underbrace{f(a)}_{\text{approximation}} + \underbrace{\varepsilon_0(x)}_{\text{reste}} & \forall x \in I. \\
(1) & f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{approximation}} + \underbrace{(x-a)\varepsilon_1(x)}_{\text{reste}} & \forall x \in I.
\end{array}
$$

Nous observons ainsi que l'expression (1) fournit une meilleure approximation de $f(x)$ que l'expression (0) car le reste de l'expression (1) : $(x-a)\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 "*plus vite que*" $(x-a)$, alors que celui de l'expression (0) tend juste vers 0 sans indication de vitesse de convergence. Nous donnerons plus tard un sens plus précis à ces analyses, ce qui nous permettra de les généraliser et nous dirons que l'expression (0) est une *approximation de f à l'ordre* 0 et que l'expression (1) est une *approximation de f à l'ordre* 1.

Ce point de vue nous amène à une façon très efficace de caractériser la dérivabilité en un point :

> f est dérivable en a et de dérivée $f'(a) = l$
> si et seulement si
> il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en a et telle que :
>
> $$f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \quad \forall x \in I$$
>
> si et seulement si
> il existe une fonction ε définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 qui tend vers 0 en 0 et telle que :
>
> $$f(a+h) = f(a) + lh + h\varepsilon(h) \quad \forall h \in \mathcal{V}.$$

EXEMPLES 23

1. *Si α et β sont deux réels, la fonction $f : x \longmapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et on obtient facilement que $f'(a) = \alpha$. Nous retrouvons donc bien l'idée que la pente infinitésimale d'une droite est bien la pente de cette droite.*
2. *Etudions la dérivabilité de la fonction $f : x > 0 \mapsto \sqrt{x}$.*
   — *Si $a > 0$, elle est dérivable en a et*
   $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$
   puisque ce taux d'accroissement coïncide au voisinage de a avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ continue en a.
   — *En 0, elle n'est pas dérivable car*
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$
3. *Soit la fonction f définie par :*
   $$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \textit{si } x \neq 0 \textit{ et } f(0) = 0 \textit{ sinon.}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas dérivable en 0, car la fonction :

$$\tau_0(x) = \frac{f(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'a pas de limite en 0, comme on peut le prouver à l'aide des suites :

$$u_n = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et } v = \left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\,n\,\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

qui tendent toutes deux vers 0, mais pour lesquelles on a :

$$\lim_{n\to\infty} \tau_0(u_n) = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \tau_0(v_n) = -1.$$

2. Dérivées à droite et à gauche en un point

De même que nous avons défini des limites à gauches et à droites, puis la notion de continuité à gauche et à droite, nous pouvons élargir notre définition précédente de la dérivabilité en un point à la dérivabilité à gauche et à droite en un point.

DÉFINITION 40

On dira que f est :

— ***dérivable à droite** en a si $\phi = f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a ; la quantité $\phi'(a)$ s'appelle alors **dérivée à droite** de f en a et se note $f'_d(a)$,*

— ***dérivable à gauche** en a si $\psi = f_{|I\cap]-\infty,a]}$ est dérivable en a ; la quantité $\psi'(a)$ s'appelle alors **dérivée à gauche** de f en a et se note $f'_g(a)$.*

Ainsi, nous obtenons l'équivalence classiquement déjà vue :

PROPOSITION 51

Lorsque a n'est pas une borne de I, la fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Preuve — On sait que la fonction τ_a, qui n'est pas définie en a, possède une limite en a si et seulement si elle y possède des limites à droite et à gauche qui sont égales. D'où l'équivalence cherchée. □

Et, comme dans les chapitres précédents, nous utiliserons ces deux définitions partielles (à droites et à gauche) :

— ou bien pour montrer qu'une fonction n'est pas dérivable (en montrant qu'elle est dérivable à droite et à gauche et en montrant que $f'_d(a) \neq f'_g(a)$) ;

— ou bien pour montrer au contraire qu'une fonction est bien dérivable (dans le cas d'un recollement par exemple) et étudiant séparément les cas des dérivées à droite et à gauche et en montrant que celles-ci sont égales.

EXEMPLES 24

1. *La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 car on a $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.*
2. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0 *et* $f'(0) = 0$. *En effet :*

— *elle possède en* 0 *une dérivée à droite qui vaut* $\lim_{x \to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x} = 0$,

— *elle possède en* 0 *une dérivée à gauche égale à* 0 *puisque sa restriction à* $\mathbb{R}_-$ *est nulle.*

Pour faire le pendant au paragraphe précédent, aux notions de dérivée à droite ou à gauche nous associons les notions de demi-tangente à la courbe f au point a : si f admet une dérivée à droite [resp. à gauche] en a alors nous appelerons la droite d'équation :

$$y = f'_d(a)(x-a) + f(a) \text{ resp. } y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$$

la **demi-tangente à droite** [resp. **à gauche**] de f au point a. Et nous parlerons, comme précédemment et le cas échéant, de demi-tangente horizontale ou verticale.

3. Caractère local de la dérivabilité

Il faut bien garder à l'esprit que, défini en tant que limite, la dérivabilité d'une fonction en un point est éminemment une notion locale. Ainsi :

PROPOSITION 52
Si f *coïncide au voisinage de* a *avec une fonction* g *dérivable en* a*, alors* f *est dérivable en* a *et* $f'(a) = g'(a)$.

Preuve — Comme f coïncide avec g au voisinage de a, le taux d'accroissement de f en a coïncide avec le taux d'accroissement de g en a, ce qui prouve le résultat. □

EXEMPLE 31 — *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = |x^2 - 1|$.

— f *est dérivable en* 2 *: en effet, pour* $|x-2| \leqslant 1$*, on a* $f(x) = x^2 - 1$ *et* f *coïncide donc au voisinage de* 2 *avec la fonction* $g : x \mapsto x^2 - 1$ *; sachant que cette fonction polynomiale est dérivable en* 2 *et que* $g'(2) = 4$*, on en déduit que* f *est dérivable en* 2 *et que* $f'(2) = 4$.

— f *n'est pas dérivable en* 1*, car :*

  — *pour* $x \geqslant 1$*, on a* $f(x) = g(x)$ *et donc* $f'_d(1) = g'(1) = 2$.

  — *pour* $x \in]-1, 1[$*, on a* $f(x) = -g(x)$ *et donc* $f'_g(1) = -g'(1) = -2$.

  La fonction f*, ayant des dérivées différentes à droite et à gauche en* 1*, n'est pas dérivable en* 1.

4. Dérivabilité et continuité

Nous avons introduit l'idée de dérivabilité d'une fonction comme une "amélioration" de l'approximation obtenue par la continuité. Il est donc naturel que, pour une fonction, son caractère dérivable soit une propriété plus restrictive que son caractère continue. En effet :

PROPOSITION 53
Si f *est dérivable en* a*, alors elle est continue en* a.

Preuve — Si f est dérivable en a, alors nous avons déjà dit qu'il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc par passage à la limite dans cette égalité, on obtient que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Et f est donc continue en a. □

Remarques 26 1. *On obtient un résultat similaire avec la dérivabilité à droite ou à gauche et la continuité à droite ou à gauche.*

2. *Une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a, comme le prouve l'exemple de la fonction $f : x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 et non dérivable en ce point car elle y possède des dérivées à droite et à gauche qui sont différentes.*

Exemples 25

1. *En $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$:*
   - *n'est pas continue, donc n'est pas dérivable.*
   - *possède une dérivée à droite qui est nulle car sa restriction à $]n, +\infty[$ coïncide avec une constante au voisinage de n.*
   - *ne possède pas de dérivée à gauche car elle n'est pas continue à gauche.*
2. *Si une fonction admet en a une dérivée à droite et une dérivée à gauche, elle est continue à droite et à gauche en a, donc elle est continue en a.*

5. Fonction dérivée

Rapprochons-nous maintenant du point de vue global.

Définition 41
Lorsque la fonction f est dérivable en tout point de I, on dit que f est ***dérivable sur*** *I et la fonction définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée* ***fonction dérivée*** *de f, et se note f', Df ou $\frac{df}{dx}$.*

On notera $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles dérivables sur I. On a donc :

$$\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

Définition 42
On dira aussi qu'une fonction f est ***continûment dérivable sur*** *I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.*

On notera $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continûment dérivables sur I et on dira qu'une telle fonction est **de classe** $\mathcal{C}^1$. On a donc :

$$\mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

On montrera plus tard que ces espaces sont des espaces vectoriels et des anneaux. Il faut les penser chacun comme de “gros” espaces de dimension infinie qui sont tous infiniment plus gros les uns que les autres (dans le sens où la probabilité de “tirer au hasard” une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'espace des fonctions continues est nulle).

II Opérations sur les fonctions dérivables

L'objectif de cette section est d'établir les règles algébriques de calculs de dérivées.

1. Combinaisons linéaires & produits

PROPOSITION 54

Soient f et g deux fonctions définies sur I ainsi que λ et μ deux réels. Si f et g sont dérivables en a, alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f g$ sont dérivables en a et l'on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a) \quad \text{et} \quad (f g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a).$$

Preuve

1. On a, pour $x \neq a$:
$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \mu \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
d'où le résultat en utilisant les opérations sur les limites.
2. On a :
$$\frac{(f g)(x) - (f g)(a)}{x-a} = f(x) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a) \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
Sachant que f est dérivable, donc continue en a, on en déduit le résultat en utilisant les opérations sur les limites.

□

2. Inverse et quotient

PROPOSITION 55

Si f est une fonction dérivable en a et ne s'annulant pas sur I, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}.$$

Preuve — Pour $x \in I$ et $x \neq a$, on peut écrire :

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = -\frac{1}{f(x)\, f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Sachant que f est dérivable, donc continue en a, on en déduit le résultat grâce aux propriétés des limites. □

COROLLAIRE 13

Soient f et g deux fonctions dérivables en a. Si g ne s'annule pas sur I alors la fonction f/g est dérivable en a et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g(a)^2}\right) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a) g'(a)}{g(a)^2}.$$

Preuve — Appliquer le résultat précédent et celui concernant la dérivabilité d'un produit. □

3. Composée et fonction réciproque

PROPOSITION 56

Soient I et J deux intervalles, f une application de I dans J et g une application définie sur J. Si f est dérivable en $a \in I$ et g dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)\, f'(a).$$

Preuve — Soit ε la fonction définie sur J par :

$$\varepsilon(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} \text{ si } y \neq b. \\ g'(b) \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi pour tout $y \in J$, on a :

$$g(y) = g(b) + (y-b)g'(b) + (y-b)\varepsilon(y)$$

Et donc pour tout $x \in I$, on a :

$$g(f(x)) = g(b) + (f(x)-b)g'(b) + (f(x)-b)\varepsilon(f(x))$$

ou encore si $x \neq a$, on a :

$$(*) \qquad \frac{g(f(x)) - g(b)}{x-a} = \frac{f(x)-b}{x-a}\left(g'(b) + \varepsilon(f(x))\right)$$

La dérivabilité de g en b nous assure que

$$\lim_{y \to b} \varepsilon(y) = 0.$$

Et f étant dérivable en a, f est continue en a et donc par composition de limites :

$$\lim_{x \to a} \varepsilon(f(x)) = 0.$$

Ainsi par passage à la limite quand x tend vers a dans l'égalité $(*)$ on obtient :

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x-a} = g'(b)f'(a).$$

C'est le résultat cherché. □

On peut maintenant appliquer le calcul de dérivée de composition au cas des fonctions réciproques de fonctions bijectives.

PROPOSITION 57

Soit f une application continue et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$. La fonction f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$, et l'on a alors :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Preuve — Démontrons les deux sens de l'équivalence :

1. Supposons f^{-1} dérivable en $b = f(a)$. Comme $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$, la proposition précédente permet d'écrire :

   $$(f^{-1})'(b)\, f'(a) = \mathrm{Id}'_a = 1$$

   ce qui entraîne :

   $$f'(a) \neq 0 \text{ et } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

2. Réciproquement supposons que $f'(a) \neq 0$, montrons $\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{f'(a)}$.

   La fonction f étant dérivable en a, on a :

   $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

   Comme f^{-1} est continue en b, le théorème de composition des limites donne :

   $$f'(a) = \lim_{y \to b} \frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \to b} \frac{y-b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}.$$

   Cette limite étant non nulle, d'après le théorème sur l'inverse d'une limite, on a :

   $$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

4. Synthèse des règles de dérivations

Nous résumons ici les règles de dérivations démontrées dans les paragraphes précédents.

Combinaison linéaire & produit

Si f et g sont deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, alors :

$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \lambda f+\mu g$ est dérivable et $(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$.
fg est dérivable et $(fg)'=f'g+g'f$.

Nous dirons ainsi, à l'aide du cours d'algèbre 1, que : $\mathcal{D}(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau et que l'application dérivation :

$$D\,:\,\begin{array}{rcl}\mathcal{D}(I) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I,\mathbb{R})\\ f & \longmapsto & f'\end{array}$$

est linéaire. Par contre, nous verrons que ce n'est pas un morphisme d'anneau.

On démontre ainsi par récurrence que, pour tout entier $n\geqslant 1$, la fonction $f_n\ :\ x\mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_n'(x)=n\,x^{n-1}.$$

On en déduit que toute fonction polynôme :

$$f\ :\ x\mapsto\sum_{k=0}^{n}a_k\,x^k$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}k\,a_k\,x^{k-1}.$$

Ainsi, si l'on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\mathcal{P}\subset\mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

Par ailleurs, si f est une fonction dérivable sur I, on démontre par récurrence que, pour tout entier $n\geqslant 1$, la fonction f^n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(f^n)'=n\,f^{n-1}\,f'$.

Inverse & quotient

Si f et g sont deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ et si g ne s'annule pas sur I, alors :

$\dfrac{1}{g}$ est dérivable et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'=-\dfrac{g'}{g^2}$.
$\dfrac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$.

Ainsi, si n est un entier négatif, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (i.e. les restrictions de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sont dérivables), et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \,,\ f_n'(x) = n\, x^{n-1}.$$

Et de manière plus générale, une fraction rationnelle est dérivable sur tout intervalle compris dans son domaine de définition.

Par ailleurs, si f est une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I, la fonction f^n est dérivable sur I pour tout entier négatif n et l'on a :

$$(f^n)' = \left(\frac{1}{f^{-n}}\right)' = -\frac{-nf^{-n-1}\, f'}{f^{-2n}} = n\, f^{n-1}\, f'.$$

REMARQUE 26 — *Il est souvent plus simple de dériver un quotient f/g comme le produit de f par $1/g$, surtout lorsque le dénominateur est une puissance : en dérivant f/g^n comme un quotient, on obtient un dénominateur égal à g^{2n} et il faudra alors simplifier la fraction, alors que la dérivée de $f\, g^{-n}$ donne naturellement un dénominateur égal à g^{n+1}.*

Composition

Soient I et J deux intervalles. Si f est une application dérivable de I dans J et g une application dérivable sur J, alors :

$$\boxed{g \circ f \text{ est dérivable et } (g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'.}$$

Si f est une fonction dérivable et strictement monotone de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ et si f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.}$$

5. Exemples d'études dans des cas concrets

§ *1. Un exemple de calcul de dérivée de fonction réciproque* La restriction à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction sinus définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-1, 1[$ qui est strictement croissante et dont la dérivée ne s'annule pas. Sa fonction réciproque Arc sinus est donc dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}.$$

Mais comme $\cos = \sqrt{1 - \sin^2}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on déduit que :

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

sur $]-1,1[$. Ainsi quand bien même la fonction arcsin ne s'exprime pas à l'aide de fonctions simples comme $\sqrt{\cdot}$ ou des fractions rationnelles, sa dérivée, elle, possède une forme remarquablement simple.

Cette situation n'est pas spécifique à la fonction arcsin et se retrouve dans tous les cas de fonctions réciproques de fonctions trigonométriques circulaires ou hyperboliques.

§ *2. Un exemple de fonction non continûment dérivable* Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Nous avons déjà étudié cette fonction p.103 et avons montré qu'elle était continue.

Les théorèmes généraux donnent la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$ car au voisinage de tout point $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction f coïncide avec la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est dérivable en a comme produit d'une fonction polynôme et de la composée de la fonction sin avec une fraction rationnelle définie au voisinage de a, et donc dérivable en a. On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*\ ,\ f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot$$

Pour la dérivabilité en 0, on utilise le taux d'accroissement (défini sur $\mathbb{R}^*$) :

$$\tau_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est le produit de la fonction $x \longmapsto x$ qui tend vers 0 en 0, et de la fonction bornée $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; il a donc 0 comme limite en 0, ce qui donne $f'(0) = 0$.

Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on peut montrer que la fonction f' n'est pas continue en 0.

§ *3. Vers un exemple de construction de fonction « plateau »* Étudions la dérivabilité de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-1)^2 & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

En $a \in]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$ la fonction f est dérivable car, au voisinage de a, elle coïncide avec une fonction polynomiale et l'on a :

$$f'(a) = \begin{cases} 2a(a-1)(2a-1) & \text{si } a \in [0,1] \\ 0 & \text{si } a \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

La restriction de f à $]-\infty,0[$ coïncide avec la fonction nulle. La fonction f est donc dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.

La restriction à $]0,1[$ de f coïncide avec la fonction polynomiale :

$$g : x \mapsto x^2(x-1)^2.$$

La fonction f est donc dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = g'(0) = 0$.

La fonction f est donc dérivable en 0 et l'on a $f'(0) = 0$. On prouve de même que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

A l'aide de ce type de fonction, on arrive à construire, pour tout $a < b < c < d$ dans $\mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :
— f est nulle sur $]-\infty, a] \cup [d, +\infty[$;
— f est constante égale à 1 sur $[b, c]$.
On appelle ce type de fonction, une fonction « *plateau* ».

III Point de vue global

Nous passons maintenant à l'utilisation de la dérivée d'une fonction en vue d'obtenir des renseignements globaux sur la fonction. Il s'agit là d'une illustration importante de ce phénomène mathématique remarquable du « *passage du local au global* » : d'une information sur la dérivée de la fonction (la dérivée étant une limite, il s'agit d'une information locale), nous allons tirer des informations globales.

1. Extremum d'une fonction dérivable

Ce paragraphe constitue une étude préliminaire.

Proposition 58
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'en est pas une borne. Si la fonction f présente un extremum local en a et si elle est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

Preuve — Comme a n'est pas une extrémité de l'intervalle I, on peut trouver $h_1 > 0$ tel que :
$$]a - h_1, a + h_1[\subset I.$$

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f présente un maximum local en a, i.e. qu'il existe $h_2 > 0$ tel que :
$$\forall x \in I,\ |x - a| \leqslant h_2 \Longrightarrow f(x) \leqslant f(a).$$
Posons $h = \min(h_1, h_2)$;
pour $0 < x - a \leqslant h$, on a alors :
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$
et donc :
$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0.$$
De même, pour $-h \leqslant x - a < 0$, on a :
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$
et donc :
$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0.$$
Comme on suppose f dérivable en a, on en déduit $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a) = 0$. □

Remarques 27 *1. Une fonction peut avoir un extremum local en a et ne pas être dérivable en a, comme le prouve l'exemple de la fonction $x \longmapsto |x|$ en 0.*

2. *Si a est une extrémité de l'intervalle, une fonction peut présenter un extremum local en a et être dérivable en a sans que sa dérivée y soit nulle, comme le prouve l'exemple de la restriction à $[0,1]$ de la fonction $x \longmapsto x$ qui présente un minimum en 0 et un maximum en 1.*
3. *L'annulation de la dérivée de f en a n'est qu'une condition nécessaire pour que f possède un extremum local en a, comme le prouve l'exemple de la fonction strictement croissante $x \longmapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0 mais qui ne possède pas d'extremum en 0.*

2. Théorème de Rolle

Théorème 20 (Théorème de Rolle)
Étant donnés des réels a et b tels que $a < b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$, il existe un réel c appartenant à $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve — La fonction f étant continue sur $[a,b]$, le théorème fondamental sur la continuité nous assure que l'image par f du segment $[a,b]$ est un segment $[m,M]$, avec $m \leqslant M$.

— Si $m = M$, la fonction f est constante sur $[a,b]$ donc de dérivée nulle sur $]a,b[$.
— Si $m < M$, l'un des réels m ou M est différent de la valeur commune prise par f en a et b. Supposons par exemple $m \neq f(a)$; la fonction f atteint alors la valeur m en un point c différent de a et de b ; elle admet donc un minimum en ce point de l'intervalle ouvert $]a,b[$, ce qui implique $f'(c) = 0$.

□

Remarques 28 1. *Le théorème de Rolle*[1] *est un théorème profond puisqu'il repose entièrement sur le théorème fondamental de la continuité, qui repose lui-même sur le théorème de Bolzano-Weierstrass.*

2. *Dans la suite, nous utiliserons le théorème de Rolle sous la forme suivante : soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = f'(c)$. Nous représentons cette situation dans la figure 6.2*
3. *En terme de métaphore cinématique, le théorème de Rolle nous affirme que si deux mobiles roulant sur un axe partent et arrivent aux même endroits aux même moment, alors à un certain instant, ces deux voitures ont eu la même vitesse. On pourra dire aussi, sous la forme originale du théorème : un point mobile sur un axe qui revient à son point de départ a vu sa vitesse s'annuler à un instant donné.*

3. Égalité des accroissements finis

Théorème 21 (des accroissements finis)
Étant donnés des réels a et b tels que $a < b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, il existe un réel c appartenant à $]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c).$$

1. Michel Rolle est un mathématicien français né en 1652 et mort en 1719 qui travailla notamment en analyse et en astronomie notamment.

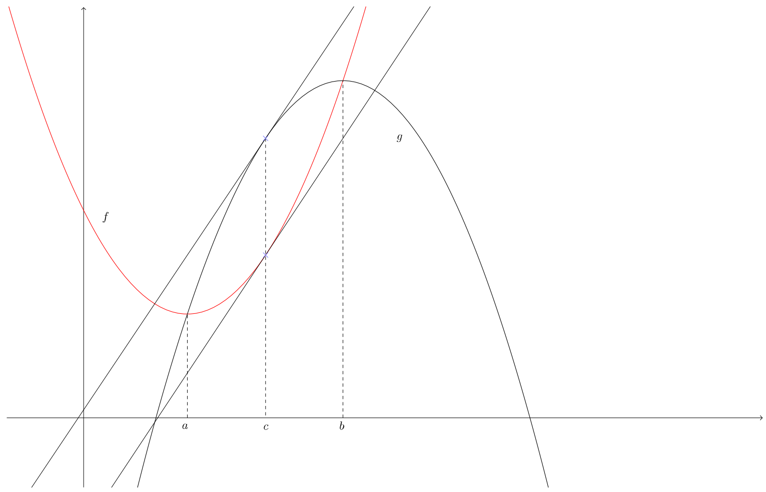


FIGURE 6.2 – Le théorème de Rolle

Preuve — Inspirons-nous de la figure 6.3. On considère la fonction affine ϕ dont le graphe est la droite reliant les points $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. Donc ϕ est définie sur $[a, b]$ par

$$\phi(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Comme la fonction ϕ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\phi(a) = f(a)$ et $\phi(b) = f(b)$, on peut donc lui appliquer le théorème de Rolle dans sa version énoncée précédemment : il existe donc un réel c appartenant à $]a, b[$ tel que $\phi'(c) = f'(c)$, ce qui équivaut à :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et donne le résultat. □

REMARQUES 29

1. *Pour filer la métaphore cinématique entamée dans le paragraphe précédent, le théorème des accroissements finis signifie donc que si un mobile roulant sur un axe a une vitesse moyenne de $20km/h$ entre deux instants alors à un certain temps t compris entre ces deux instants sa vitesse instantanée est de $20km/h$.*
2. *Le théorème des accroissements finis est un théorème très important, qui est une conséquence pourtant très simple du théorème de Rolle. Il va nous permettre de mettre en œuvre des résultats puissants de passage du local au global : d'une information d'ordre locale sur l'accroissement infinitésimale $f'(c)$, on pourra déduire une information sur l'accroissement global $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

On écrira parfois le théorème des accroissements finis sous la forme suivante :

PROPOSITION 59

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I. Étant donnés deux réels x et h tels que x et $x+h$ appartiennent à I, il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h).$$

Preuve — Lorsque $h = 0$, le réel θ peut être choisi arbitrairement.

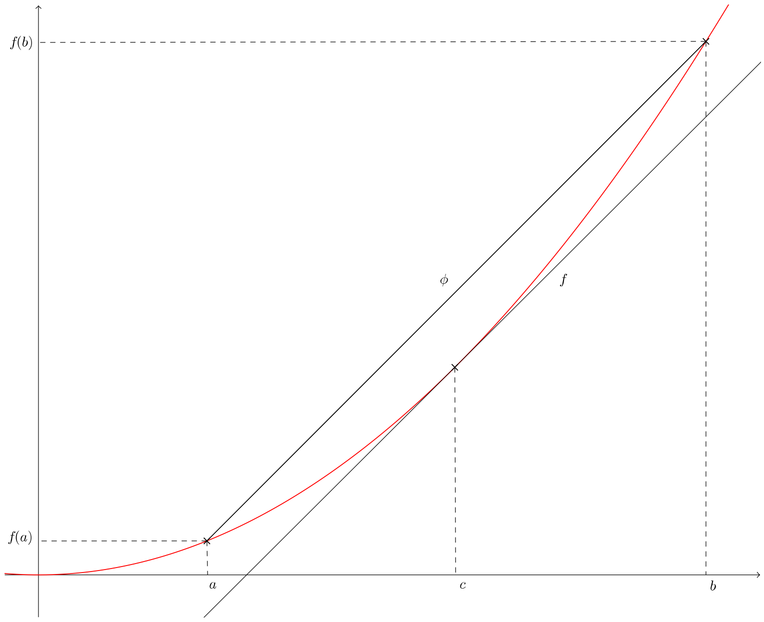


Figure 6.3 – Le théorème des accroissements finis

Sinon, il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis sur le segment $]x, x+h[$ (inclus dans I puisque I est un intervalle) sur lequel la fonction f est dérivable donc continue. On en déduit l'existence d'un réel c strictement compris entre x et $x+h$ et vérifiant $f(x+h) = f(x) + h\,f'(c)$, lequel réel est de la forme $x + \theta h$ pour un certain $\theta \in]0,1]$. □

4. Inégalité des accroissements finis

L'utilisation centrale du théorème des accroissements finis réside dans les inégalités que celui-ci permet d'obtenir. Ces inégalités s'appellent "*inégalités des accroissements finis*".

Théorème 22 (Inégalité des accroissements finis)
Soient a et b des réels vérifiant $a < b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe un réel M vérifiant :

$$\forall x \in]a,b[f'(x) \leqslant M$$

alors on a :

$$f(b) - f(a) \leqslant M\,(b-a).$$

Preuve — D'après l'égalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur le segment $[a,b]$, il existe un réel c tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Par hypothèse, on a $f'(c) \leqslant M$, ce qui implique :

$$f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

□

On peut décliner l'inégalité précédente de plusieurs façons et chaque inégalité obtenu sera aussi qualifié d'*inégalité des accroissements finis* :

Corollaire 14
Soient a et b des réels vérifiant $a < b$ ainsi qu'une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe un réel m vérifiant :

$$\forall x \in]a,b[m \leqslant f'(x)$$

alors on a :

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a).$$

Preuve — Il s'agit d'appliquer le théorème à $-f$. □

Corollaire 15
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et M un réel positif tel que $\forall x \in I\,,\ \left|f'(x)\right| \leqslant M$, alors on a :

$$\forall (x_1, x_2) \in I \times I\,,\ \left|f(x_2) - f(x_1)\right| \leqslant M\,|x_2 - x_1|.$$

Preuve — Soient x_1 et x_2 deux éléments de I ; supposons par exemple $x_1 \leqslant x_2$.

— Si $x_1 = x_2$, alors $f(x_1) = f(x_2)$ et donc $\left|f(x_2) - f(x_1)\right| \leqslant M\,|x_2 - x_1|$.
— Supposons $x_1 \neq x_2$. La fonction f étant continue et dérivable sur $]x_1, x_2[$ et vérifiant $\forall x \in]x_1, x_2[\,,\ -M \leqslant f'(x) \leqslant k$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur le segment $]x_1, x_2[$ implique :

$$-M\,(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1) \leqslant M\,(x_2 - x_1)$$

ce qui équivaut à $\left|f(x_2) - f(x_1)\right| \leqslant M\,|x_2 - x_1|$.

□

Remarque 27 — *Pour clore notre série de métaphores cinématiques entamée dans les paragraphes précédents, l'inégalité des accroissements finis signifie donc que si un mobile roulant sur un axe a une vitesse constamment inférieure à $20km/h$ alors en une heure de temps, il parcourera moins de $20km$.*

IV Applications des résultats globaux

Dans cette section, nous proposons différentes pistes importantes d'application de la filiation des trois théorèmes de la section précédente (Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis). Il ne s'agit là que d'exemples particulièrement remarquables et classiques. Toute la suite de ce cours sur l'approximation locale et globale des fonctions constituera les applications naturelles de cette filiation de trois théorèmes.

1. Variations d'une fonction

Proposition 60
Soient I un intervalle et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$.

La fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I\,,\ f'(x) \geqslant 0$ (resp. $\forall x \in I\,,\ f'(x) \leqslant 0$).

Preuve — Traitons le premier cas, le deuxième s'en déduisant en considérant $-f$.

— Si f est croissante, pour tout $x_0 \in I$, le taux d'accroissement de f en x_0 est une fonction positive et sa limite $f'(x_0)$ en x_0 est donc positive.
— Réciproquement, supposons $\forall x \in I\,,\ f'(x) \geqslant 0$. Soient x_1 et x_2 deux éléments de l'intervalle I vérifiant $x_1 < x_2$. Comme, d'après les hypothèses, la fonction f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$, on peut lui appliquer l'inégalité des accroissements finis sur le segment $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = 0(x_2 - x_1) \geqslant 0.$$

et par suite $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. La fonction f est donc croissante sur I.

□

PROPOSITION 61
Avec les mêmes hypothèses, la fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si $\forall x \in I\,,\ f'(x) > 0$ (resp. $\forall x \in I\,,\ f'(x) < 0$).

REMARQUE 28 — *La réciproque est évidemment fausse en général : on pensera à la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3$.*

Preuve — Supposons donc par exemple que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) > 0.$$

D'après la proposition précédente, on en déduit donc que f est croissante. Supposons qu'il existe $x_1 < x_2$ dans I tels que $f(x_1) = f(x_2)$, alors d'après le théorème de Rolle, il existe un $c \in]x_1, x_2[$ tel que :

$$f'(c) = 0,$$

or cela n'est pas. D'où l'on déduit que f est nécessairement strictement croissante. □

Nous pouvons affiner la propriété précédente :

PROPOSITION 62
Une fonction f dérivable sur un intervalle I est strictement monotone sur I si et seulement si on a les deux conditions suivantes :
— *sa dérivée est de signe constant ;*
— *il n'existe pas d'intervalle inclus dans I et contenant au moins deux points sur lequel f' soit identiquement nulle.*

Preuve — La première condition étant équivalente à la monotonie de f, il suffit de montrer que pour une fonction f monotone dérivable, la stricte monotonie est équivalente à la deuxième condition.

Or f n'est pas strictement monotone si et seulement si on peut trouver deux points distincts a et b tels que $f(a) = f(b)$, i.e. si et seulement si f est constante sur un intervalle contenant au moins deux points, soit enfin si et seulement si f' est nulle sur un tel intervalle. □

Dans la pratique, on utilise le résultat suivant :

COROLLAIRE 16
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est de signe constant et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement monotone.

Ce paragraphe permet donc d'apporter une démonstration rigoureuse à la méthode extrêmement efficace consistant à étudier le signe et les zéros éventuels de la dérivée afin d'obtenir le tableau de variation d'une fonction.

2. Caractérisation des fonctions constantes

Proposition 63
Une fonction dérivable sur un intervalle I est constante si et seulement si sa dérivée est nulle.

Preuve — Une fonction est constante si et seulement si elle est croissante et décroissante. □

Corollaire 17
Deux fonctions dérivables sur un intervalle I ont leur dérivées égales si et seulement si elles sont égales à addition par une constante près.

Remarques 30

1. *Ce paragraphe nous permet donc de démontrer la résolution de notre première équation différentielle : les solutions de l'équation*
$$y' = 0$$
sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. Ce résultat est le premier pas très important en direction des méthodes de résolution générales des équations différentielles.
2. *Il faut bien prendre garde à la nature de l'ensemble de départ. Si I n'est pas un intervalle alors f' peut être nul sans pour autant que la fonction soit constante. Considérons par exemple la fonction*
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x & \longmapsto & \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) \end{array}$$
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un intervalle et on obtient par un calcul simple que f' est nulle. Pourtant une évaluation en 1 montre que f est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et une évaluation en -1 montre que f est constante égale à $-\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_-^*$. La fonction f n'est donc pas constante sur son ensemble de définition mais est constante sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

3. Obtention d'inégalités classiques

L'inégalité des accroissements finis permet d'obtenir nombre d'inégalités dites classiques qui peuvent se révéler extrêmement utiles. Nous donnons dans ce qui suit quelques exemples plus ou moins célèbres.

$$\boxed{\begin{array}{rl} |\sin(x)| \leqslant |x| & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \ln(1+x) \leqslant x & \forall x \in]-1, +\infty[, \\ \exp(x) \geqslant 1 + x & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \tan(x) \geqslant x & \forall x \geqslant 0, \\ \mathrm{sh}(x) \geqslant x & \forall x \geqslant 0, \\ \mathrm{th}(x) \leqslant x & \forall x \geqslant 0. \end{array}}$$

Preuve — Les démonstrations de ces inégalités sont toutes similaires, démontrons par exemple la première : commençons par observer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
$$|\sin'(t)| \leqslant 1.$$

Appliquons donc l'inégalité des accroissements finis à sin sur l'intervalle $[0, x]$ pour $x > 0$. On a donc :

$$|\sin(x)| \leqslant |x| .$$

On obtient l'inégalité sur $\mathbb{R}$ par imparité de la fonction sin ou plus généralement en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur le segment $[x, 0]$ pour $x < 0$. □

Exemple 32 — *Donnons un exemple d'utilisation d'une inégalité d'accroissement finis pour l'étude d'une série numérique classique :*

Soit $x > 0$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ sur le segment $[x, x+1]$, on obtient alors l'encadrement :

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}\cdot$$

On a alors, pour $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:

$$\ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \ln(p) - \ln(p-1)$$

ce qui donne en sommant terme à terme :

$$1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln n - \ln 1$$

et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1.$$

Nous venons de montrer que la série, appelée série harmonique, suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

et que cette divergence a lieu à la "vitesse" $\ln(n)$.

4. Prolongement $\mathcal{C}^1$ de fonctions

Une utilisation importante du théorème des accroissement finis concerne le prolongement de fonctions en un point ; technique que nous allons développer ici. Commençons par poser le problème : *nous considérons une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur I. Soit $a \in \mathbb{R}$ une borne de I telle que $a \notin I$. Si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

alors nous pouvons prolonger f par continuité en a. Question : est-ce que ce prolongement est dérivable en a ? est-il de classe $\mathcal{C}^1$ en a ?

Pour répondre à cette question, il existe une démarche naturelle, mais laborieuse :

1. On construit le prolongement par continuité de f en a :

$$\begin{array}{rcl} \overline{f} : I \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \neq a \\ l \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array}.$$

   Ce prolongement est continue sur $I \cup \{a\}$ et dérivable sur I.

2. Si la limite suivante existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - l}{x - a}$$

   alors $\overline{f}$ est dérivable en a.

3. Si $\overline{f}$ est bien dérivable en a et si

$$\lim_{x \to a} f'(x) = \overline{f}'(a)$$

   alors $\overline{f}$ est continûment dérivable en a.

Nous pouvons raccourcir cette démarche en utilisant le théorème suivant :

Théorème 23 (de la limite de la dérivée)
Soit a un élément de I. Si une fonction f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'_{|I \setminus \{a\}}$ a une limite finie l en a, alors f est dérivable en a, on a $f'(a) = l$ et donc f' est continue en a.

Preuve — Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Le théorème des accroissements finis nous donne un point c_x strictement compris entre a et x tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Comme c_x tend vers a quand x tend vers a, on en déduit :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

ce qui donne le résultat cherché. □

Remarque 29 — *Le théorème précédent n'est qu'une condition suffisante pour prouver l'existence de $f'(a)$. Il se peut que $f'(a)$ existe sans que $f'_{|I \setminus \{a\}}$ ait une limite en a comme le prouve l'exemple de la fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ prolongée par continuité en 0 (cf. p. 122).*

Grâce à ce théorème, et en reprenant les hypothèses précédentes auxquelles on ajoute que la fonction f est dérivable sur I, la démarche pour obtenir un prolongement $\mathcal{C}^1$ de notre fonction f est plus courte :

1. Cette étape est similaire (on construit le prolongement par continuité $\overline{f}$ de f en a).
2. Si la limite suivante existe

$$\lim_{x \to a} f'(x) = l,$$

   alors $\overline{f}$ est dérivable sur $I \cup \{a\}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ en a.

Exemple 33 — *Mettons en pratique notre nouvelle démarche sur l'exemple classique suivant. Considérons*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \exp(-\frac{1}{x}) \textit{ si } x > 0 \\ 0 \textit{ sinon} \end{array} \right. \end{array}.$$

Il est facile de voir que f est bien continue sur $\mathbb{R}$. Elle est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Nous souhaitons savoir si elle est $\mathcal{C}^1$ en 0 et si oui, connaître sa dérivée en 0. Pour ce faire, observons que :

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0.$$

Le théorème de la limite de la dérivée nous assure donc du fait que : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 0$. Nous retrouverons cette fonction dans le cours "analyse 3" et nous montrerons qu'il s'agit d'une fonction infiniment plate en 0 (toutes ses dérivées successives en 0 sont nulles) bien qu'elle soit strictement croissante au voisinage à droite de 0.

Notons que nous avons un résultat analogue dans le cas des limites infinies :

Proposition 64
Soit a un élément de I. Si une fonction f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'_{|I\setminus\{a\}}$ tend vers $+\infty$ en a, alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty.$$

Preuve — Analogue à celle du théorème 23. □

5. Convergence de suites récurrentes

Passons maintenant à la dernière zone d'application importante du théorème des accroissements finis : l'étude de la convergence des suites récurrentes. Et ce paragraphe fera par la même occasion office de rappel concernant ce sujet important ainsi que de *plan général d'étude* d'une suite récurrente.

§ *1. Position du problème* Considérons une fonction

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si u_0 est un élément d'une sous-partie *stable*[2] X pour f alors nous pouvons définir la suite récurrente (ou *système dynamique discret*) suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in X \subset \mathcal{D} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Nous cherchons ici à étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n).

Remarque 30 — *On ne rappellera jamais assez que l'hypothèse de stabilité de l'ensemble est cruciale pour s'assurer que la suite (u_n) existe bien au sens existe bien pour une infinité de termes. En effet, considérons par exemple la fonction f définie $f(x) = \frac{2}{x-1}$ sur $\mathbb{R}^*$. Si $u_0 = 3$, alors $f(u_0) = u_1 = 1$ et u_2 n'existe pas. Si $u_0 = \frac{5}{3}$, alors $u_1 = 3$, $u_2 = 1$ et u_3 n'existe pas. Et ainsi de suite... Pour ces valeurs de u_0 construites comme préimages par f d'une valeur qui n'appartient pas à l'ensemble de définition de f, il n'existe pas de sous-ensemble X de l'ensemble de définition de f tel que X est stable par f et $u_0 \in X$.*

2. On rappelle qu'un sous-ensemble X de $\mathcal{D}$ est, par définition, stable pour f si et seulement si $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.

§ *2. Monotonie* L'étude de la monotonie de la suite (u_n) est facile. Celle-ci est donnée par la position de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur X ou autrement dit par le signe de $f(x) - x$ pour $x \in X$. Une étude de signe est donc nécessaire pour conclure. Pour autant, quand f est monotone, on peut aller plus vite dans la conclusion :

— si f est croissante sur X, alors :

$$\begin{cases} u_0 \leqslant u_1 & \Longrightarrow \quad (u_n) \text{ est croissante.} \\ u_0 \geqslant u_1 & \Longrightarrow \quad (u_n) \text{ est décroissante.} \end{cases}$$

— si f est décroissante[3] sur X, alors $f \circ f$ est croissante sur X et :

$$\begin{cases} u_0 \leqslant u_2 & \Longrightarrow \quad (u_{2n}) \text{ est croissante.} \\ u_0 \geqslant u_2 & \Longrightarrow \quad (u_{2n}) \text{ est décroissante.} \\ u_1 \leqslant u_3 & \Longrightarrow \quad (u_{2n+1}) \text{ est croissante.} \\ u_3 \geqslant u_1 & \Longrightarrow \quad (u_{2n+1}) \text{ est décroissante.} \end{cases}$$

§ *3. Convergence* L'étude de la convergence de la suite (u_n) peut parfois se révéler très difficile car nous ne possédons qu'une condition nécessaire de convergence : *si f est continue sur un sous-ensemble X qui est stable et si (u_n) converge vers l dans X alors*

$$l = f(l).$$

Autrement dit la limite finie éventuelle de la suite (u_n) est un *point fixe* de f (en effet : si (u_n) converge vers l alors la sous-suite (u_{n+1}) converge aussi vers l et donc la suite $(f(u_n))$ converge vers l. Or f étant continue et par unicité de la limite on a : $f(l) = l$.)

La question qui se pose est la réciproque à cette propriété. Nous obtiendrons une réponse partielle à cette question à travers l'étude de la dérivée de f aux points fixes de f. Nous supposerons donc dorénavant que *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X*. Considérons l un point fixe de f. On a alors les deux cas suivants :

— si $|f'(l)| < 1$, alors nous dirons que l est un *point fixe attractif* pour f. Si (u_n) converge vers l alors (u_n) converge à vitesse exponentielle vers l, autrement dit :

$$\exists 0 < k < 1, \exists C > 0 \quad |u_n - l| \leqslant Ck^n \text{ à partir d'un certain rang.}$$

Autrement dit, il existe $k \in]0, 1[$ tel que $|u_n - l| = O(k^n)$.

— si $|f'(l)| > 1$, alors nous dirons que l est un *point fixe répulsif* pour f et (u_n) ne converge pas vers l.

Notons que le cas $|f'(l)| = 1$ est un cas d'indétermination sur lequel aucune conclusion n'est possible sans information supplémentaire concernant le comportement de f au voisinage de l.

Preuve

— Supposons donc que l est un point fixe attractif et que (u_n) converge vers l. On sait que

$$\lim_{x \to l} f'(x) = f'(l).$$

Donc il existe $\eta > 0$ tel que par exemple :

$$\forall x \in]l - \eta, l + \eta[, \quad x \in \mathcal{D} \implies |f'(x)| \leqslant \frac{1 + |f'(l)|}{2} = k < 1.$$

Par ailleurs, $\mathcal{D}$ contenant un voisinage de l, quitte à changer de η, on peut supposer que $\mathcal{D} \cap]l - \eta, l + \eta[$ est un intervalle. Or la suite (u_n) convergeant vers l, il existe un rang N à partir duquel $u_n \in]l - \eta, l + \eta[$. Ainsi

3. Dans ce cas-là, il pourra être commode d'étudier le signe de $f \circ f(x) - x$.

pour tout $n > N$, appliquons l'IAF à f sur l'intervalle $[u_{n-1}, l] \subset \mathcal{D} \cap]l-\eta, l+\eta[$ (en effet, $\mathcal{D} \cap]l-\eta, l+\eta[$ étant un intervalle, comme u_{n-1} et l appartiennent à $\mathcal{D} \cap]l-\eta, l+\eta[$ l'intervalle $[u_{n-1}, l]$ est inclu dans $\mathcal{D} \cap]l-\eta, l+\eta[$). Ainsi :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| &\leqslant k\,|u_n - l| = |f(u_{n-1}) - f(l)| \\ &\leqslant k^2\,|u_{n-1} - l| \\ &\vdots \quad \vdots \\ &\leqslant k^{n-N+1}\,|u_N - l|\,. \end{aligned}$$

Nous venons de montrer qu'à partir du rang $N+1$, et en posant $C = \frac{|u_N - l|}{k^N}$, la suite (u_n) vérifie :

$$|u_n - l| \leqslant Ck^n.$$

C'est le résultat cherché.

— Supposons donc que l est un point fixe répulsif et que (u_n) converge vers l. On sait que

$$\lim_{x \to l} f'(x) = f'(l).$$

Donc il existe $\eta > 0$ tel que par exemple :

$$\forall x \in]l-\eta, l+\eta[, \quad x \in \mathcal{D} \implies |f'(x)| \geqslant \frac{1 + |f'(l)|}{2} = k > 1.$$

Le même raisonnement que précédemment (en inversant le signe desinégalités) nous amène donc à la conclusion qu'à partir du rang $N+1$, et en posant $C = \frac{|u_N - l|}{k^N}$, la suite (u_n) vérifie :

$$|u_n - l| \geqslant Ck^n.$$

Or k étant strictement supérieur à 1, le terme de droite tend vers $+\infty$ ce qui contredit la convergence de la suite (u_n) vers l.

□

6. Étude d'un exemple

Nous considérons ici un exemple en apparence très simple : celui de la suite récurrente donnée par la fonction de transition :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array}$$

et étudions son « *comportement asymptotique*[4] » selon la position du point de départ $u_0 \in \mathbb{R}$. Nous procédons par ordre et de manière systématique :

- Tout d'abord, on observe que la suite (u_n) est bien définie quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R}$ tout entier est stable pour f.

- Ensuite, on observe que, f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, si (u_n) converge vers une limite finie l alors $l = f(l)$, soit $l = l_1$ ou l_2 avec :

$$l_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad l_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

- Afin d'étudier la monotonie éventuelle de la suite, nous devons chercher des intervalles stables sur lesquels la fonction soit monotone ou bien sur lesquels le signe de $f(x) - x$ est constant. De tels intervalles n'apparaissant pas clairement, nous devons donc séparer les cas, ce que nous faisons dans ce qui suit.

4. La notion de *comportement asymptotique* est très importante, elle concerne la façon dont la suite évolue quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire non seulement la limite mais la vitesse de convergence vers cette limite. Le mot "asymptotique" vient du grec ancien *asymptōtos*, « *qui ne s'affaisse pas, qui ne s'écroule pas, qui ne coïncide pas* ».

1. Commençons notre étude en supposant $u_0 \in]l_1, +\infty[$ (cas de la figure 6.4). Cet intervalle et stable et f y est croissante, donc (u_n) est monotone. Comme $f(x) - x \geqslant 0$ sur cet intervalle, on déduit que la suite (u_n) est croissante. Si elle convergeais, elle convergerais vers un point fixe de f. Le seul point fixe de f dans $[l_1, +\infty[$ étant l_1, elle convergerait donc vers l_1. Mais la suite étant croissante, cela lui interdit de converger vers l_1, donc nécessairement la suite (u_n) tend vers $+\infty$. Pour savoir à quelle vitesse la suite (u_n) tend vers $+\infty$, nous pouvons utiliser à nouveau les accroissements finis : $f'(l_1) = \sqrt{5} + 1 > 1$ et on note f' est croissante sur $]l_1, +\infty[$. Donc pour tout $x > l_1$, on a :
$$f'(x) \geqslant k_1 = \sqrt{5} + 1 > 1.$$
Ainsi par application de l'IAF sur $[u_n, l_1]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque), on a :
$$|u_n - l_1| = |f(u_{n-1}) - f(l_1)| \geqslant k_1 |u_{n-1} - l_1| \geqslant \cdots \geqslant k_1^n |u_0 - l_1|.$$
D'où l'on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n \geqslant l_1 + k_1^n (u_0 - l_1).$$
La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$ à vitesse exponentielle. C'est l'information sur le comportement asymptotique que nous recherchions.

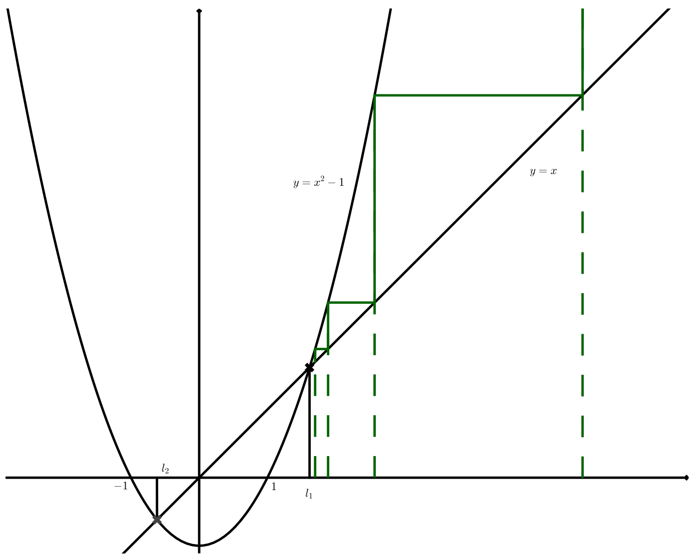


FIGURE 6.4 – Cas $u_0 > l_1$ de la suite récurrente (u_n)

2. Dans le cas $u_0 = l_1$ la suite est constante.
3. Si $u_0 \in]1, l_1[$, (cas de la figure 6.4) alors $u_1 \in]0, l_1[$ et nous observons que l'intervalle $]1, l_1[$ n'est pas stable. Supposons cependant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$u_n \in]1, l_1[.$$
Sur cet intervalle on a $f(x) \leqslant x$, donc la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 1 elle converge. Mais alors elle convergerait nécessairement vers l_1 ce qui est impossible, nécessairement il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \notin]1, l_1[$ ainsi dans ce cas $u_{n_0} \in]0, 1]$ et nous sommes donc ramené au cas suivant.

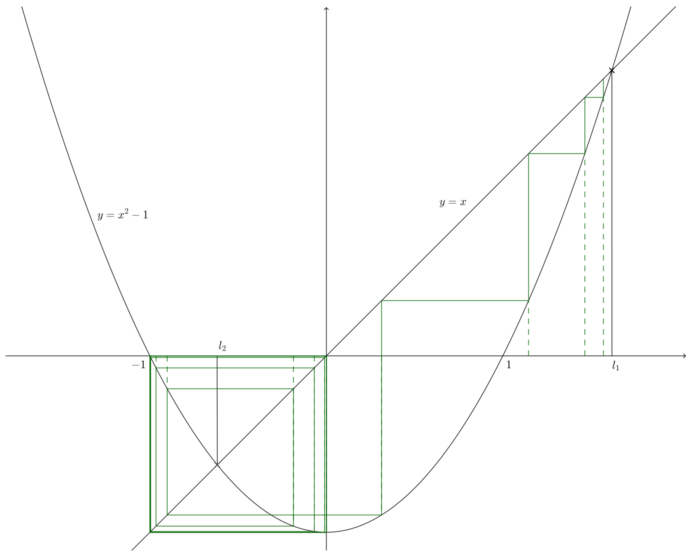


Figure 6.5 – Cas $1 < u_0 < l_1$ de la suite récurrente (u_n)

4. Si $u_0 \in]0, 1]$, alors $u_1 \in] - 1, 0]$ et nous sommes là aussi ramené aux cas suivants.
5. Si $u_0 = -1$ ou 0, alors la suite (u_n) vaut $\pm(-1)^n$. Cette suite périodique de période 2 n'a évidemment pas de limite.
6. Si $u_0 = l_2$, alors la suite est clairement constante.
7. Si $u_0 \in] - 1, 0[\setminus\{l_2\}$, (cas de la figure 6.5 à partir du rang 4) alors on observe que, l'intervalle $] - 1, 0[$ étant stable, on a :
$$u_n \in] - 1, 0[\setminus\{l_2\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Si la suite converge, alors elle converge nécessairement vers l_2. Or $|f'(l_2)| = \sqrt{5} - 1 > 1$. Donc ce point fixe est répulsif. Ainsi la suite (u_n) ne converge pas. Afin d'obtenir une information qualitative sur le comportement asymptotique de la suite (u_n) nous étudions les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) : f étant décroissante sur $]-1, 0[$ ces deux sous-suites sont monotones. Traitons par exemple le cas $u_0 \in]l_2, 0[$. Comme
$$f(]l_2, 0[) =] - 1, l_2[\text{ et } f(] - 1, l_2[) =]l_2, 0[,$$
on déduit que (u_{2n}) est une suite de $]l_2, 0[$ et que (u_{2n+1}) est une suite de $] - 1, l_2[$. Et comme $f(x) \geqslant x$ sur $]-1, l_2[$ et $f(x) \leqslant x$ sur $]l_2, 0[$, on obtient que (u_{2n}) décroit et (u_{2n+1}) croit. Nous dirons que la sous-suite (u_n) forme dans ce cas une spirale divergente. Et on pourra d'ailleurs montrer dans ce cas, en étudiant les points fixes de $f \circ f$, que la sous-suite (u_{2n}) converge vers 0 et que la sous-suite (u_{2n+1}) converge vers -1.
8. Il reste le cas $u_0 \in] - \infty, -1[$ (cas de la figure 6.6). On observe alors que $u_1 \in]0, +\infty[$ ce qui nous ramène aux cas précédents on peut l'observer graphiquement.

Nous observons, sur cet exemple, que le comportement d'une suite récurrente peut-être redoutablement *instable* selon les valeur du point de départ. Au voisinage de l_1, une variation infinitésimale de u_0 fait, en effet, passer la suite d'un comportement en spirale pour $u_0 < l_1$, à un

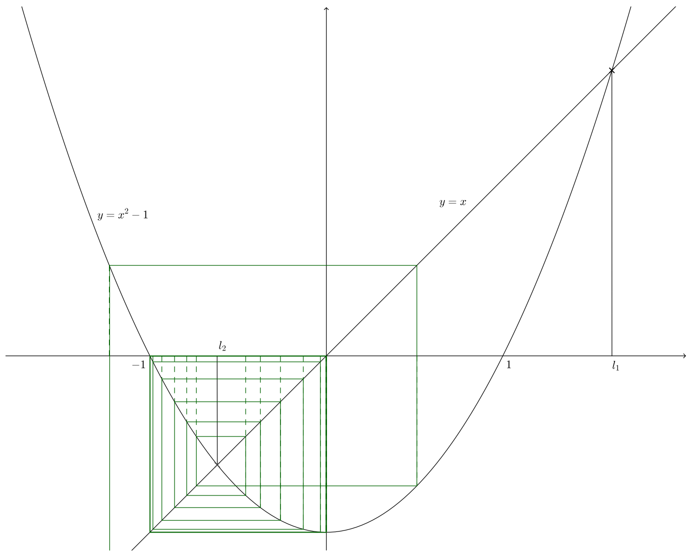


Figure 6.6 – Cas $u_0 < l_2$ de la suite récurrente (u_n)

comportement stationnaire pour $u_0 = l_1$, à un comportement divergent à vitesse exponentielle pour $u_0 > l_1$. Et il convient de noter que cette instabilité très forte a été obtenue à l'aide d'une équation des plus simple : le trinôme du second degré $x^2 - 1$. Ce phénomène a été étudié pour la première fois par Benoît Mandelbrot [5] qui étudie le comportement de la suite complexe :

$$u_{n+1} = u_n^2 + c, \text{ où } u_0 \in \mathbb{C} \text{ et } c \in \mathbb{C} \text{ est fixé.}$$

Si l'on colorie le plan complexe en donnant la couleur rouge au point $u_0 \in \mathbb{C}$ si la suite des itérés $u_{n+1} = u_n^2 - 1$ diverge et une couleur qui balaie le spectre de l'arc-en-ciel "plus la suite converge", alors on obtient le dessin de la figure 6.7 (obtenu en MAPLE à l'aide d'un test de convergence très naïf du type : $|u_n| \geqslant 3$). Celui est centré en 0 et parcourt tous les u_0 du rectangle : $\mathrm{Re}\,(u_0) \in [-2, 2]$ et $\mathrm{Im}\,(u_0) \in [-1.5, 1.5]$. La zone "frontière" dessinée par le changement de couleur est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ célèbre, il s'agit de l'ensemble de Julia [6]

V Dérivée d'ordre supérieur

Cette dernière partie a pour simple et unique objectif d'introduire les dérivées d'ordre supérieur et leurs premières propriétés ; il n'y aura donc pas ici de résultat difficile mais uniquement des résultats d'ordre "utilitaires" dans la perspective de la suite de ce cours.

5. Mathématicien franco-américain, né à Varsovie en 1924 et mort aux États-Unis en 2010. Benoît Mandelbrot est le père de la géométrie *fractale*.

6. Gaston Julia (1893-1978) est un mathématicien français né en Algérie qui a beaucoup en théorie des fonctions de la variable complexe. Ses travaux n'ont pas reçu une grande popularité jusqu'à ce qu'ils se retrouvent au cœur de la théorie des fractales initiée par B. Mandelbrot.

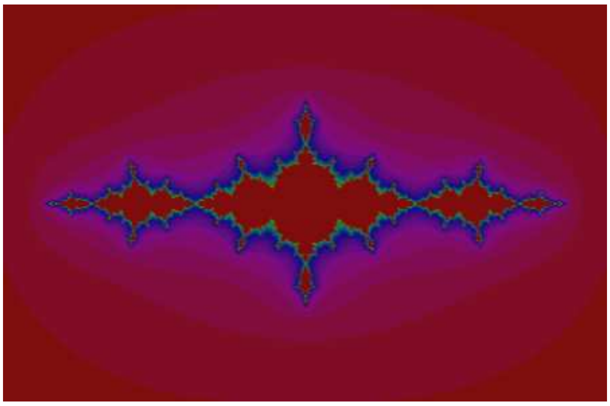


FIGURE 6.7 – Ensemble de Julia pour $u_{n+1} = u_n^2 - 1$ et $u_0 \in \mathbb{C}$.

1. Définition

DÉFINITION 43
*Soit f une fonction définie sur l'intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, nous dirons que f est n **fois dérivable** sur I si :*

$$\begin{array}{ll} (1) & f \text{ est dérivable sur } I\,; \\ (2) & f' \text{ est dérivable sur } I\,; \\ \vdots & \vdots \\ (n-1) & \underbrace{(\cdots(f')'\cdots)'}_{n-1 \text{ fois}} \text{ est dérivable sur } I. \end{array}$$

Dans ce cas, nous noterons cette dernière dérivée $f^{(n)}$.

Par extension, nous noterons $f^{(0)} = f$.

Nous avons déjà défini les espaces $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$. A l'aide de cette définition de dérivée successive, nous pouvons donc poursuivre cette construction. C'est le sens de la définition suivante :

DÉFINITION 44
*Si $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, nous dirons que f est de **classe** $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.*

*Nous dirons aussi que f est de **classe** $\mathcal{C}^\infty$ ou **lisse** si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier n.*

On notera $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lisses sur I. Ces espaces forment donc une suite infiniment décroissante de sous-ensembles :

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset C^0(I,\mathbb{R}).}$$

On notera que l'application de dérivation des fonctions permet de passer d'un espace à un autre :

$$D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

2. Opérations

Dans tout ce paragraphe n désigne un entier positif. Nous rassemblons ici les propriétés permettant de montrer que les dérivées n-ièmes existent (et de les calculer dans la plupart des cas) pour une fonctions par opérations algébriques.

Proposition 65 (Linéarité)
Soient f et g deux fonctions n fois dérivables. Soient λ et μ deux réels. Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable et :

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Preuve — Il s'agit de procéder par récurrence sur l'entier n à l'aide de la linéarité de la propriété 54 sur la linéarité de l'opération de dérivation. Écrivons-le précisément : nous démontrons donc par récurrence sur n la proposition

$\mathcal{P}_n$: si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$

- La propriété est évidente pour $n = 0$ d'après les résultats sur les fonctions continues.
- Supposons $\mathcal{P}_n$ et considérons deux fonctions f et g supposées $n+1$ fois dérivables sur I ainsi que deux réels λ et μ. f et g sont donc n fois dérivables et l'hypothèse de récurrence permet d'écrire

  $$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

  Comme chacune des fonctions $\lambda f^{(n)}$ et $\mu g^{(n)}$ est dérivable sur I, on en déduit que $(\lambda f + \mu g)^{(n)}$ est dérivable sur I et que

  $$(\lambda f + \mu g)^{(n+1)} = \left(\lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}\right)' = \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)}.$$

  Ce qui prouve $\mathcal{P}_{n+1}$.

□

Nous déduirons de cette propriété, à l'aide du cours "géométrie 1", que les espaces $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

La propriété suivante est importante et très utile, car elle procure une méthode automatique de calcul de dérivée n-ième pour un produit de fonctions.

Proposition 66 (Formule de Leibniz)
Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et :

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Preuve — Nous procédons par récurrence sur n pour démontrer la propriété :

$\mathcal{P}_n$: si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et $(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

- La propriété est vraie pour $n = 0$ d'après les résultats pour les fonctions continues.

— Supposons $\mathcal{P}_n$ et considérons deux fonctions f et g supposées $n+1$ fois dérivables sur I. Elles sont donc n fois dérivables et l'hypothèse $\mathcal{P}_n$ permet d'écrire :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

La fonction $(fg)^{(n)}$ est donc une combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables ; elle est donc dérivable et par suite fg est $n+1$ fois dérivable. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
(fg)^{n+1} &= ((fg)^n)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^k g^{(n-k+1)} + f^{k+1} g^{n-k} \right) \\
&= \binom{n}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{k+1} g^{(n-k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g \\
&= \binom{n+1}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve $\mathcal{P}_{n+1}$.

□

Nous déduirons de cette propriété, à l'aide du cours "géométrie 1", que les espaces $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ sont des anneaux pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

En ce qui concerne la composition de fonctions, une formule similaire fournissant une formule close pour le calcul de la dérivée n-ième n'existe pas si simplement (un calcul simple pour $n = 2$ ou 3 montre que le calcul est autrement plus complexe). Le lecteur désireux d'obtenir une telle formule pourra se référer à l'étude faite dans cet article[7]. Cependant nous obtenons le résultat d'existence suivant :

PROPOSITION 67
Étant donné une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, qui sont n fois dérivables [resp. de classes $\mathcal{C}^n$] et tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I [resp. de classe $\mathcal{C}^n$].

Preuve — Fixons J un intervalle de $\mathbb{R}$ et procédons par récurrence sur n pour démontrer la propriété suivante (le cas de classe $\mathcal{C}^n$ étant similaire) :

$\mathcal{P}_n$: si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions n fois dérivables telles que $f(I) \subset J$, alors $f \circ g$ est n fois dérivable

— La propriété est vraie pour $n = 0$ d'après les résultats sur les fonctions continues.

— Supposons $\mathcal{P}_n$ et considérons deux fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$ et supposées $n+1$ fois dérivables. Elles sont donc dérivables et le résultat sur la dérivée d'une composée permet d'écrire que $g \circ f$ est dérivable et :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

Mais g' et f sont n fois dérivables et donc par hypothèse de récurrence la composée $g' \circ f$ est n fois dérivable. Comme f' est n fois dérivable, la propriété précédente sur la dérivée n-ième d'un produit montre alors que $(g \circ f)'$ est n fois dérivable et donc que $g \circ f$ est $n+1$ fois dérivable. Ce qui prouve $\mathcal{P}_{n+1}$.

□

Une technique similaire de démonstration fonctionne en ce qui concerne le caractère n fois dérivable de la fonction réciproque d'une fonction n fois dérivable. En effet :

7. cf. http://culturemath.ens.fr/maths/pdf/analyse/derivation.pdf

Proposition 68
Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection n fois dérivable [resp. de classe $\mathcal{C}^n$] pour $n \geqslant 1$ telle que sa dérivée ne s'annule pas, alors sa fonction réciproque f^{-1} est n fois dérivable [resp. de classe $\mathcal{C}^n$].

Preuve —Procédons par récurrence sur n pour démontrer la propriété suivante (le cas de classe $\mathcal{C}^n$ étant similaire) :

$\mathcal{P}_n$: si $f : I \longrightarrow J$ est une bijection n fois dérivable telle que sa dérivée ne s'annule pas, alors f^{-1} est n fois dérivable

- La propriété est vraie pour $n = 1$ d'après les résultats sur les fonctions dérivabilité d'une fonction réciproque.
- Supposons $\mathcal{P}_n$ et considérons une bijection $f : I \longrightarrow J$ $n+1$ fois dérivable telle que f' ne s'annule pas. Alors f^{-1} est n fois dérivable et :
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$
Mais alors d'après le résultat qui précède $f' \circ f^{-1}$ est n fois dérivable et la composée avec la fonction inverse l'est donc aussi. Ainsi $\left(f^{-1}\right)'$ est n fois dérivable ce qui montre que f^{-1} est n fois dérivable. Ce qui prouve $\mathcal{P}_{n+1}$.

□

3. Exemples de fonctions lisses

Des propriétés du paragraphe précédent on déduit que les fonctions polynômiales sont lisses puis que les fonctions rationnelles sont lisses aussi.

Des propriétés sur la dérivé des fonctions usuelles exp, ln, sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan, ch, sh, th, argch, argsh, argth, on déduit que toute fonction construite en tant que composée de fraction rationnelle en ces fonctions est lisse sur son ensemble de définition.

4. Prolongements

Il reste à s'interroger sur une dernière question dans ce chapitre : celle du prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ ou de classe $\mathcal{C}^\infty$ de fonctions.

Posons le problème : nous considérons une fonction $f]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$). Si f admet un prolongement par continuité en a, alors est-ce que ce prolongement de f est de classe $\mathcal{C}^n$ en a ? La réponse n'est pas toujours positive. Pour autant nous avons le résultat suivant qui généralise le théorème 23 de la limite de la dérivée :

Proposition 69
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b]$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et si :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{x \to a^+} f^{(k)}(x) \text{ existe et vaut } l_k,$$
alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et
$$\forall k = 1, \ldots, n, \quad f^{(k)}(a) = l_k.$$

Preuve — Raisonnons par récurrence sur n :

- pour $n = 1$, il s'agit d'appliquer le théorème 23 pour $k = 1$ en l'appliquant à f. On obtient ainsi que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $f'(a) = l_1$.

— supposons le résultat vrai au rang $n-1$. Si l'on applique l'hypothèse de récurrence à f' alors on obtient que f' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et pour tout $k=1,\ldots,n$ la dérivée k-ième $f'^{(k)}(a)$ existe et donc les dérivées $f^{(k)}(a)$ existent pour k variant entre 1 et $n+1$.

□

EXEMPLE 34 — *La proposition précédente va jouer le rôle de méthode très efficace de démonstration pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ en un point. Considérons par exemple la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & si\ x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & si\ x > 0 \end{cases} \end{array}$$

La considération de la limite à droite en 0 *montre que* f *est continue en* 0*. Montrons que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*. Comme pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, nous avons que :*

$$\lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = 0,$$

nous devons donc montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0.$$

A cette fin, montrons tout d'abord que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$*, il existe une fonction polynômiale* P_n *telle que :*

$$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} \quad \forall x > 0.$$

Ce résultat se montre facilement par récurrence sur n *:*

— *pour* $n=0$*, la fonction* P_0 *constante égale à* 1 *convient ;*

— *supposons le résultat vrai à l'ordre* n*, alors il existe une fonction polynomiale* P_n *telle que :*

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}.$$

Mais alors par dérivation, on obtient :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}\left(P_n'(\frac{1}{x}) - P_n(\frac{1}{x})\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

Définissons donc le polynôme $P_{n+1}(X) = -X^2\left(P_n'(X) - P_n(X)\right)$*. On obtient donc bien le résultat :*

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}.$$

Il reste alors à calculer la limite en 0^+*. On a :*

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^+} P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} P_n(y)e^{-}y = 0$$

par croissance comparée des fonctions puissances et de l'exponentielle en $+\infty$*.*

Nous venons donc de démontrer que cette fonction est bien lisse sur $\mathbb{R}$*. Observons qu'elle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$ *pourtant toutes ses dérivées successives en* 0 *sont nulles. Nous dirons que cette fonction est « plate » en* 0*.*