北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Probabilité

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

21 février 2020

Table des matières

Chapitre 1 Avant de commencer

Table des matières du chapitre

1.1 L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$

On dira naïvement qu'un ensemble est une collection d'objets, mais toutes les collections d'objets ne sont pas ensembles, ainsi que le montre le paradoxe de Russel (et Zermelo) : la collection de tous les ensembles n'est pas un ensemble. On parlera de catégorie des ensembles (introduite Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane en 1942-1945, et popularisée par Grothendieck).
On suppose qu'il existe des ensembles, en particulier $\emptyset$ (axiome).
On suppose dans toute la suite que Ω est un ensemble.

1.1.1 Définitions

Un sous-ensemble ou une partie de Ω est un ensemble dont tous les éléments sont dans Ω.

Axiome *Soit Ω un ensemble et $\mathcal{P}$ une propriété sur les éléments de Ω. Alors la collection des éléments de Ω qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$ forme un ensemble et on notera cet ensemble*

$$\{x \in \Omega \text{ tq } \mathcal{P}(x)\} \quad \text{ou} \quad \{x \in \Omega \mid \mathcal{P}(x)\} \quad \text{ou} \quad \{x \in \Omega\ ,\ \mathcal{P}(x)\}.$$

Remarque 1 — *Cela vous montre comment écrire correctement un ensemble :*

$$\mathcal{S} = \{n \in \mathbb{N} |\ \exists a \in \mathbb{N},\ n = a^2\}.$$

Axiome *La collection des parties d'un ensemble Ω est encore un ensemble noté $\mathcal{P}(\Omega)$:*

$$A \in \mathcal{P}(\Omega) \iff A \subset \Omega.$$

Exemple 2 —

1. *Si $\Omega = \emptyset$, alors $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ et donc a un élément.*

2. *Si* $\Omega = \{1,2,3\}$, *alors*

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Remarque 3 — *Pour tout ensemble* Ω, *on a toujours* $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$ *et* $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 4
Soit I *un ensemble. Le produit cartésien des ensembles de la famille d'ensembles* $(\Omega_i)_{i\in I}$ *est l'ensemble* $\prod\limits_{i\in I} \Omega_i$ *des familles* $(\omega_i)_{i\in I}$, *avec* $\omega_i \in \Omega_i$.

Exemple 5 — *Par exemple,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 6 — *Sur* $\mathcal{P}(E)$ *on définit le complémentaire d'une partie, ainsi que l'union et l'intersection d'une famille queconque de parties.*
On peut montrer que les unions et les intersections sont associatives et commutatives pour une famille $(A_i)_{i\in I}$ *de parties de* Ω.
La distributivité entre l'union et l'intersection est valable pour des familles quelconques de parties. En particulier,

$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A\cap A_i) \text{ et } A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A\cup A_i).$$

On a aussi

$$\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{i,j}\right) \subset \bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I} A_{i,j}\right).$$

En effet, si $x \in \bigcup\limits_{i\in I}\left(\bigcap\limits_{j\in J} A_{i,j}\right)$, *alors il existe* $i_0 \in I$ *tel que* $\forall j \in J$, $x \in A_{i_0,j}$.
Donc $\forall j \in J$, $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_{i,j}$ *(l'indice* i_0 *convient).*
Finalement, on a prouvé $x \in \bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I} A_{i,j}\right)$, *ce qui termine la preuve.*
Mais a priori, il n'y a pas égalité.

Exemple 7 — *Soit* $A_{i,j} = [j+i-1, i+j[$.

$$\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{i,j}\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} [j+i-1, i+j[\right) = \emptyset$$

et

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} A_{i,j}\right) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} [j+i-1, i+j[\right) = \mathbb{R}$$

§ 1. *Fonction indicatrice d'un ensemble*

Définition 8
Soit $A \subset \Omega$. *On appelle fonction indicatrice de* A, *notée* $\mathbb{1}_A$, *la fonction* $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Proposition 9
Soit A, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
2. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$.

3. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$

Exemple 10 —

1. *Écrire les fonctions indicatrices de $A \setminus B$ et de $A\Delta B$ en fonction de celles de A et B.*
2. *Soit une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ de parties non vides de Ω.*

$$\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \mathbb{1}_{A_i} \text{ et } \mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = 1 - \prod_{i\in I}(1 - \mathbb{1}_{A_i})$$

Proposition 11
Une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ de parties non vides de Ω est une partition de Ω si et seulement si

$$\mathbb{1}_\Omega = \sum_{i\in I} \mathbb{1}_{A_i}.$$

Preuve — On a les équivalences

1. Soit $i \neq j$. Alors $x \in A_i \cap A_j$ ssi
$$\sum_{i\in I} \mathbb{1}_{A_i}(x) \geq 2.$$
2. De plus, $x \in \bigcup_{i\in j} A_i$ ssi il existe i tel que $x \in A_i$ ssi $\sum\limits_{i\in I} \mathbb{1}_{A_i}(x) \geq 1$.

Ceci montre que Ω est l'union disjointe de la famille $(A_i)_{i\in I}$ ssi $\mathbb{1}_\Omega = \sum\limits_{i\in I} \mathbb{1}_{A_i}$.

□

Corollaire 12
Une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ de parties non vides de Ω est une partition de Ω si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{1}_A = \sum_{i\in I} \mathbb{1}_{A_i\cap A}.$$

1.2 Notion de cardinal

1.2.1 Définition

Définition 13
On dit que deux ensembles Ω et Ω' ont même cardinal, et on note $|\Omega| = |\Omega'|$, s'il existe une bijection de Ω dans Ω'. Si Ω est en bijection avec $\{1,\ldots,n\}$, on dit que Ω est un ensemble fini de cardinal n et l'on note $|\Omega| = n$ ou $card(\Omega) = n$.
Par convention, $card(\emptyset) = 0$.
Un ensemble de cardinal infini est un ensemble qui n'est pas de cardinal fini.

Remarque 14 — *Le cardinal d'un ensemble fini est donc le nombre de ses éléments.*

Proposition 15
Soit Ω ensemble fini de cardinal n. Si $F \subset \Omega$, alors F est fini et $card(F) \leq \mathrm{Card}(\Omega)$. De plus, $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}(F)$ si et seulement si $F = \Omega$.

Preuve — Si Ω est de cardinal n, on pose $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. On construit par récurrence une suite (f_n)

1. Si $F \neq \emptyset$, alors $f_0 = \omega_{\inf\{k\ |w_k\in F\}}$
2. Si f_{k-1} est construit et si $F \setminus \{f_0, \cdots, f_{k-1}\} \neq \emptyset$, alors $f_k = \omega_{\inf\{k\ |w_k\in F\setminus\{f_0,\cdots,f_{k-1}\}\}}$
3. Si f_{k-1} est construit et si $F \setminus \{f_0, \cdots, f_{k-1}\} = \emptyset$, alors $F = \{f_0, \cdots, f_{k-1}\}$ et $|F| = k$. Et on s'arrête.

Tous les éléments de Ω sont parcourus ssi $n = k$ et $F = \Omega$. □

Remarque 16 — *On en déduit que $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini car par exemple, $\mathbb{N}$ est en bijection avec les nombres pairs en prenant $k \mapsto 2k$, donc $\mathbb{N}$ a le même cardinal qu'un sous-ensemble strict, ce qui n'est pas possible pour un ensemble fini.*

Définition 17
On dit qu'un ensemble Ω est

- *dénombrable s'il existe une bijection de Ω dans $\mathbb{N}$.*
- *au plus dénombrable si Ω est fini ou dénombrable.*

Proposition 18
Soit Ω un ensemble. Il n'existe pas d'injection de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans Ω.

Preuve — On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe une injection de $f : \mathcal{P}(\Omega) \to \Omega$ pour tout ensemble Ω.
Alors $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid f(A) \notin A\}$ est un sous-ensemble et $B = f(\mathcal{A})$ aussi. On a deux possibilités

1. Soit $B \in \mathcal{A}$: la définition de $\mathcal{A}$ implique $f(B) \notin B$. Par ailleurs, comme $B = f(\mathcal{A})$, la définition de l'image d'une partie implique $f(B) \in B$, ce qui est contradictoire.
2. Soit $B \notin \mathcal{A}$: ainsi $f(B) \in B$, mais B est aussi l'image des éléments qui sont dans $\mathcal{A}$, donc il existe $C \in \mathcal{A}$ tel que $f(B) = f(C)$, mais par injectivité de f, on obtient $B = C \in \mathcal{A}$ ce qui est absurde.

□

Remarque 19 — *La proposition ici, est pour Ω de cardinal quelconque, on peut l'appliquer à $\mathbb{N}$: il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ dans* Card $(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$*. Tous les ensembles de cardinal infini ne sont donc pas nécessairement dénombrables.*

1.2.2 Cardinal d'une union, d'un produit,...

Proposition 20
Soit Ω un ensemble et A une partie finie de Ω. Alors

$$\operatorname{card} A = \sum_{x \in \Omega} \mathbb{1}_A(x)$$

Proposition 21
Si Ω et Ω' sont deux ensembles finis, alors $\Omega \cup \Omega'$ est fini et

$$\operatorname{card}(\Omega \cup \Omega') = \operatorname{Card}(\Omega) + \operatorname{Card}(\Omega') - \operatorname{Card}(\Omega \cap \Omega').$$

Preuve — On procède en deux étapes :

1/ Si $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$, alors en posant $\operatorname{Card}(\Omega) = n$ et $\operatorname{Card}(\Omega') = m$, on numérote les éléments de $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ puis les éléments de $\Omega' = \{a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\}$ et l'application $\Omega \cup \Omega' \to \{1, \ldots, n+m\}$, $a_i \mapsto i$ est bijective, donc $\operatorname{card}(\Omega \cup \Omega') = \operatorname{Card}(\Omega) + \operatorname{Card}(\Omega')$.

2/ En général, on pose $\Omega'' = \Omega' \setminus \Omega$ et $\Omega \cup \Omega' = \Omega \cup \Omega''$. D'après le 1/ puisque $\Omega \cap \Omega'' = \emptyset$, on a $\operatorname{card}(\Omega \cup \Omega') = \operatorname{Card}(\Omega) + \operatorname{Card}(\Omega'')$. Mais Ω' est l'union disjointe de Ω'' et $\Omega \cap \Omega'$, donc $\operatorname{card}(\Omega') = \operatorname{Card}(\Omega'') + \operatorname{Card}(\Omega \cap \Omega')$, et on en déduit l'égalité recherchée. □

Corollaire 22
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de Ω un ensemble fini. Alors

$$|\Omega| = \sum_{i \in I} |A_i|.$$

Preuve — Les A_i sont deux à deux distincts non vides, donc $|I| \leq |\Omega|$: pour tout i, on choisit un élément $a_i \in A_i$ et l'application $i \mapsto a_i$ est une injection.
Puis on procède par récurrence, l'étape $|i| = 1$ implique $A_1 = \Omega$ et l'hérédité résulte immédiatement de la proposition précédente. □

PROPOSITION 23
Soit Ω et Ω' deux ensembles finis, alors $\Omega \times \Omega'$ est fini et

$$\text{card }(\Omega \times \Omega') = \text{Card }(\Omega)\text{Card }(\Omega').$$

Preuve — Il suffit d'écrire $\Omega \times \Omega'$ comme l'union disjointe $\cup_{y\in\Omega'}\Omega \times \{y\}$. □

PROPOSITION 24
S'il existe une injection de Ω dans Ω' avec Ω' fini, alors Ω est fini et $\text{Card }(\Omega) \leq \text{Card }(\Omega')$.
De même, s'il existe une surjection de Ω dans Ω' avec Ω fini, alors Ω' est fini et $\text{Card }(\Omega') \leq \text{Card }(\Omega)$.

REMARQUE 25 — *On peut en fait montrer que si Ω et Ω' sont deux ensembles tels qu'il existe une injection et une surjection de Ω dans Ω', alors il existe une bijection entre ces deux ensembles (théorème de Bernstein).*

PROPOSITION 26
Si Ω et Ω' sont deux ensembles finis de cardinal respectif n et p, alors l'ensemble Ω'^{Ω} des applications de Ω dans Ω' est fini de cardinal p^n.

Preuve — L'application qui à $f : \Omega \to \Omega'$ associe le n-uplet $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est une bijection. Or Ω'^n est de cardinal p^n d'après la proposition 23, d'où le résultat. □

PROPOSITION 27
Si Ω est une ensemble fini de cardinal n, alors $\mathcal{P}(\Omega)$ est de cardinal fini égal à 2^n.

Preuve — L'application $\psi : \mathcal{P}(\Omega) \to \{0,1\}^{\Omega}$, $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est bijective. □

1.3 ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

1.3.1 Caractérisation des ensembles dénombrables

REMARQUE 28 — *Soit Ω un ensemble dénombrable et $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$ une bijection. On pose $\varphi(n) = \omega_n$ et les ensembles de Ω peuvent être indexés par $\mathbb{N}$: $\Omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On dira que φ est une énumération de Ω.*

PROPOSITION 29
Soit Ω un ensemble dénombrable. Alors toute partie A de Ω est au plus dénombrable.

Preuve — On écrit $\Omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On construit par récurrence une suite (a_n)

1. Si $A \neq \emptyset$, alors $a_0 = \omega_{\inf\{k\ |w_k\in A\}}$
2. Si a_{n-1} est construit et si $A \setminus \{a_0, \cdots, a_{n-1}\} \neq \emptyset$, alors $a_n = \omega_{\inf\{k\ |w_k\in A\setminus\{a_0,\cdots,a_{n-1}\}\}}$
3. Si a_{n-1} est construit et si $A \setminus \{a_0, \cdots, a_{n-1}\} = \emptyset$, alors $A = \{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ et $|A| = n$. Et on s'arrête.

Si la suite continue indéfiniment, on pose $\rho(n) = \inf\{k\ |w_k \in A \setminus \{a_0, \cdots, a_{n-1}\}\}$. L'application $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. En particulier $\rho(n) \geq n$.
Montrons que $A = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. On procède par l'absurde : soit k_0 le plus petit indice tel que $\omega_{k_0} \in A$ et $\omega_{k_0} \notin \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. On a $a_{k_0} = \omega_{\rho(k_0)}$ avec $\rho(k_0) \geq k_0$. Or $w_{k_0} \in A \setminus \{a_0, \cdots, a_{k_0-1}\}$, donc $a_{k_0} = \omega_{k_0}$, d'où la contradiction. □

COROLLAIRE 30
Toute partie de $\mathbb{N}$ est soit cardinal fini, soit dénombrable.

1.3.2 Opérations sur les ensembles dénombrables

PROPOSITION 31
Soit Ω et Ω' deux ensembles dénombrables, alors

1. *$\Omega \cup \Omega'$ est dénombrable.*
2. *$\Omega \times \Omega'$ est dénombrable.*

Preuve — On écrit $\Omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. On pose $\Omega'' = \Omega' \setminus \Omega$ et $\Omega \cup \Omega' = \Omega \cup \Omega''$.
   Si $|\Omega''| = p$, on numérote les éléments de Ω' par ω''_0, ..., ω''_{p-1} et ainsi $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega \cup \Omega'$ définie par
   $$\varphi(k) = \begin{cases} \omega''_k \text{ si } k \in [\![0, p-1]\!] \\ \\ \omega_{k-p} \text{ si } k \geq p \end{cases}$$
   est bijective.
   Si Ω'' est dénombrable, on écrit $\Omega'' = (\omega''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega \cup \Omega'$ définie par
   $$\varphi(k) = \begin{cases} \omega_{k/2} \text{ si } k \text{ pair} \\ \\ \omega''_{(k-1)/2} \text{ sinon} \end{cases}$$
   est bijective.
2. Si $\varphi : \Omega \to \mathbb{N}$ et $\psi : \Omega' \to \mathbb{N}$, alors $\varphi \times \psi : \Omega \times \Omega' \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est bijective.
   L'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie come suit est bijective :
   $$f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (p, q) & \mapsto & \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) + p \end{cases}.$$
   Une manière simple de le voir est de construire une relation d'ordre : $(p, q) \prec (p', q')$ si $p + q < p' + q'$ ou si $p + q = p' + q'$ et $p < p'$.
   On peut donc classer les éléments de $\mathbb{N}^2$ avec la relation $\prec$ et on montre que $f(p, q)$ indique que le couple (p, q) est classé en position $\dfrac{1}{2}(p+q)(p+q+1) + p$ pour cette relation d'ordre.
   On procède par récurrence sur $n = p + q$ sachant que $(0, 0)$ est bien le plus petit élément.
   On suppose que pour tout couple (p, q) tel que $p + q \leq n$, alors (p, q) est classé en position $f(p, q)$ pour la relation $\prec$.
   Les couples (p, q) tels que $p + q = n + 1$ sont classés
   $$(n, 0) \prec (0, n+1) \prec (1, n) \prec \cdots \prec (n+1, 0) \prec (0, n+2)$$
   et pour $k \in [\![0, n+1]\!]$
   $$f(k, n+1-k) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + k = \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 + k = f(n, 0) + k + 1$$
   ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $n + 1$. On en déduit que f est surjective (tout élément est ordonné, car $n = p + q$ tend vers $+\infty$) et injective (la relation d'ordre est stricte).

□

Remarque 32 — *La première partie de la preuve du 1/ correspond à l'histoire suivante : un hôtel possède une infinité de chambres et il est complet. Un car arrive avec 60 passagers. La personne de la réception dit pas de problème, on décale tout le monde de soixante chambres, et les 60 premières seront libres. La seconde partie de la preuve correpond au cas où chaque client se décale de sorte qu'une chambre libre les séparent et donc laisse un nombre infini de chambres libres !*

Proposition 33
Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Preuve — Soit I un ensemble dénombrable et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles dénombrables. Donc il existe des bijections $f : I \to \mathbb{N}$ et $\varphi_i : \Omega_i \to \mathbb{N}$ pour tout $i \in I$. L'application
$$\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} \Omega_i$$
$$(n, p) \mapsto \varphi^{-1}_{f^{-1}(p)}(n)$$
est surjective. Pour tout $\omega \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ on choisit le plus petit couple (n, p) pour l'ordre lexicographique tel que $\psi(n, p) = \omega$: $(n, p) \prec (n', p')$ si $n < n'$ ou $n = n'$ et $p \leq p'$.
On définit ainsi une application injective de $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ dans $\mathbb{N}^2$, et donc $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}^2$ qui est infinie donc dénombrable. □

Remarque 34 — *On déduit des résultats de ce chapitre que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Ce n'est pas le cas de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, de $\mathbb{R}$, ni des intervalles $[a, b]$ lorsque $a < b$.*

Exemple 35 —

1. *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ monotone est au plus dénombrable : on suppose f est croissante et f est discontinue en a ssi $]\lim_{a^-} f, \lim_{a^+} f[$ est non vide donc contient un rationnel et les points de discontinuité sont donc en bijection avec une partie $\mathbb{Q}$, d'où le résultat.*
2. *L'ensemble des racines des polynômes à coefficients entiers est dénombrable. Un nombre qui ne peut s'écrire comme racine d'un polynôme à coefficients entiers est un nombre transcendant : la pluspart des nombres sont transcendants, mais on en connait très peu.*

1.4 Coefficients binomiaux

1.4.1 p-combinaisons

Définition 36
On appelle p-combinaison d'un ensemble Ω de cardinal n toute partie de Ω de cardinal p.

Remarque 37 — *On peut montrer que le nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments ne dépend que de p et de n.*

Définition 38
On note $\binom{n}{p}$ ou C_n^p le nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments. On convient que si $p < 0$, alors $\binom{n}{p} = 0$.

1.4.2 Formules sur les coefficients binomiaux

Proposition 39
(Triangle de Pascal) Soit $n, p \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}.$$

Preuve — Soit Ω de cardinal $n+1$ et $a \in \Omega$. Alors l'ensemble des p-combinaisons de Ω est égal à l'union disjointe des p combinaisons qui contiennent a et de celles qui ne le contiennent pas. Le premier ensemble a pour cardinal $\binom{n}{p-1}$ et le second de cardinal $\binom{n}{p}$, d'où la formule. □

Proposition 40
Soit n, p des entiers.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Preuve — Si $p > n$, l'égalité se résume à $0 = 0$. Sinon, soit Ω de cardinal n et $\varphi : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)$, $A \mapsto \bar{A}$. Alors φ est involutive, donc bijective et induit donc une bijection des p-combinaisons avec les $n-p$-combinaisons, l'égalité est démontrée. □

Proposition 41
Soit n et p des entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Preuve — Le résultat est connu et se montre aussi à partir des arrangements (cf plus bas) mais ici on donne une preuve par récurrence qui justifie le principe du triangle de P (exercice). □

Exemple 42 — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on cherche $p \in \mathbb{N}$ tel que $\binom{n}{p}$ soit maximal. pour cela, on calcule pour $p \neq 0$*

$$\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p-1}} = \frac{n!}{(p)!(n-p)!}\frac{(p-1)!(n-p+1)!}{n!} = \frac{n+1-p}{p} = \frac{n+1}{p} - 1$$

Le quotient est décroissant en p, vaut n en 1, 0 en $n+1$ et vaut 1 ssi $n+1=2p$. On en déduit que $\binom{n}{p}$ est maximal pour $p=\left[\frac{n}{2}\right]$ (si le rapport vaut 1 le maximum est atteint pour deux valeurs de p).

1.4.3 Arrangements

Définition 43

(Arrangements) Soit n et p deux entiers non nuls. On appelle arrangement de p éléments de $I_n=\{1,\cdots,n\}$ tout p-uplet $(a_1,\cdots,a_n)$ de I_n^p tel que les a_i soient deux à deux distincts.

Proposition 44

Le nombre d'arrangements de p éléments dans $I_n=\{1,\cdots,n\}$ est égal à $A_p^n=\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Preuve — Le nombre d'arrangements de p éléments dans I_n revient à la donnée d'un élément a_1 dans I_n, puis d'un élément $a_2\in I_n\setminus\{a_1\}$, etc puis $a_p\in I_n\setminus\{a_1,\cdots,a_{p-1}\}$... et donc $A_p^n=n(n-1)\cdots(n-p+1)$, ce que nous voulions. □

1.5 Exemples de dénombrement

Exemple 45 — *Soit un mot de n lettres, composé des lettres a_1 apparaissant α_1 fois, ..., a_l apparaissant α_l fois et donc $n=\alpha_1+\cdots+\alpha_l$. Alors le nombre d'anagrammes (mots obtenus par permutation des lettres) $N(n,\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ est*

$$N(n,\alpha_1,\cdots,\alpha_l)=\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_l!}.$$

On procède par récurrence sur l, pour $l=1$, il n'y a qu'un seul anagramme du mot.
Supposons la proposition vraie pour $l-1\geq 1$.
La lettre a_l doit apparaître α_l fois dans l'anagramme, il y a donc $\binom{n}{\alpha_l}$ possibiltés : on peut les numéroter de 1 à $\binom{n}{\alpha_l}$ et soit Ω_i l'ensemble des anagrammes tels que la position de la lettre a_l corresponde au choix i.
Les ensembles Ω_i forment une partition de Ω.
Or chaque Ω_i correspond aux anagrammes du mot d'origine privé de la lettre a_l et donc est de cardinal $N(n-\alpha_l,\alpha_1,\cdots,\alpha_{l-1})$:

$$N(n,\alpha_1,\cdots,\alpha_l)=\binom{n}{\alpha_l}N(n-\alpha_l,\alpha_1,\cdots,\alpha_{l-1})=\frac{n!}{\alpha_l!(n-\alpha_l)!}\times\frac{(n-\alpha_l)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{l-1}!}=\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_l!}$$

ce qui termine la preuve.
Le nombre $N(n,\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ s'appelle coefficient multinomial.

Proposition 46

Soit a_1, a_2,... a_p des complexes avec $p\geq 2$, alors

$$(a_1+\cdots+a_p)^n=\sum_{\alpha_1+\cdots\alpha_p=n}\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_p!}a_1^{\alpha_1}\cdots a_p^{\alpha_p}$$

Preuve — On calcule le coefficient de $a_1^{\alpha_1}\cdots a_p^{\alpha_p}$ sachant que la puissance totale est n car on a n facteurs : il faut choisir parmi les n facteurs α_1 a_1 puis α_2 a_2 parmi les restants puis... puis les α_n restants donnent la puissance de a_p.

Par exemple

$$(a_1+\cdots+a_p)^2=a_1^2+\cdots+a_p^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_{n-1}a_n.$$
$$(a_1+a_2+a_3)^3=a_1^3+a_2^3+a_3^3+3a_1^2a_2+3a_1^2a_3+3a_2^2a_1+3a_2^2a_3+3a_3^2a_1+3a_3^2a_2+6a_1a_2a_3.$$

□

Exemple 47 — *Soit E un ensemble fini à n éléments et A une partie de E de cardinal p $(0\leq p\leq n)$. Dénombrer l'ensemble*

$$\Omega=\{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2\mid A\subset X\cap Y\text{ et }X\cup Y=E\}$$

On simplifie d'abord le problème : par hypothèse A est inclus dans X et Y, en posant $X' = X \setminus A$ et $Y' = Y \setminus A$, on cherche tous les couples $(X', Y') \in \mathcal{P}(E \setminus A)^2$ tels que $X' \cup Y' = E' = E \setminus A$.

$$\Omega' = \{(X', Y') \in \mathcal{P}(E')^2 \mid X' \cup Y' = E\}$$

Pour faire le calcul, on pose Ω_k l'ensemble des couples $(X', Y') \in \Omega'$ tels que X' a k éléments dans E'.
Calculons $|\Omega_k|$: pour X' fixé, soit $\Omega_{k,X'}$ l'ensemble des couples $(X', Y') \in \Omega'$, c'est-à-dire ssi Y' contient le complémentaire de X' dans E' : $Y' = \overline{X'} \cup Z$, $Z \in \mathcal{P}(X')$ qui est de cardinal 2^k.
Or les $\Omega_{k,X'}$ avec X' de cardinal k forment une partition de Ω_k et il y en a $\binom{n-p}{k}$.
On en déduit que

$$|\Omega_k| = \sum_{X' \in \mathcal{P}(E'),\ |X'|=k} |\Omega_{k,X'}| = \binom{n-p}{k} 2^k.$$

Enfin k varie entre 0 et $n-p$ donc

$$|\Omega| = |\Omega'| = \sum_{k=0}^{n-p} |\Omega_k| = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} 2^k = 3^{n-p}.$$

EXEMPLE 48 — *De combien de manières peut-on mettre n boules dans p trous.*
Je considère $n+p-1$ cases numérotées de 1 à $n+p-1$. Je colorie $p-1$ cases, ce qui fait apparaître p groupes :

- *le nombre de cases du premier groupe correspond au nombre de boules dans le premier trou.*
- *...*
- *le nombre de cases du dernier groupe correspond au nombre de boules dans le dernier trou.*

La réponse est donc $\binom{n+p-1}{n} = \binom{n+p-1}{p-1}$.
Si x_1, ..., x_p sont des variables combien existe-t-il de monômes $x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p}$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$?

1.6 Familles sommables

1.6.1 Familles sommables de réels positifs

§ *1. Définition et propriétés*

DÉFINITION 49
Soit I un ensemble non vide et $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs indéxée par I. On pose

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \sup_{J \subset I,\ |J| < +\infty} \sum_{i \in J} \alpha_i$$

avec la convention que la borne supérieure vaut $+\infty$ si l'ensemble n'est pas majoré.
Si la borne supérieure est finie, on dit que la famille est sommable.

REMARQUE 50 — *On pourrait considérer la somme dans $\overline{1}\mathbb{R}$ et même les a_i peuvent être égaux à $+\infty$. Le programme nous suggère de ne considérer que des sommes de réels (finis).*

PROPOSITION 51
Soit I un ensemble non vide et $(\alpha_i)_{i \in I}$ et $(\beta_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs indéxées par I. Alors :

1. *Si $\forall i \in I$, $\alpha_i \le \beta_i$,*
$$\sum_{i \in I} \alpha_i \le \sum_{i \in I} \beta_i$$
2. *si $a \ge 0$,*
$$\sum_{i \in I} (a\alpha_i) = a \sum_{i \in I} \alpha_i$$

3.

$$\sum_{i\in I}(\alpha_i+\beta_i)=\sum_{i\in I}\alpha_i+\sum_{i\in I}\beta_i.$$

Preuve — Nous ne traitons que le point 3/ : Pour tout J fini, par défination de la borne supérieure (majorant)

$$\sum_{i\in J}(\alpha_i+\beta_i)=\sum_{i\in J}\alpha_i+\sum_{i\in J}\beta_i\le\sum_{i\in I}\alpha_i+\sum_{i\in I}\beta_i.$$

Et encore par définition de la borne (plus petit des majorants)

$$\sum_{i\in I}(\alpha_i+\beta_i)\le\sum_{i\in I}\alpha_i+\sum_{i\in I}\beta_i.$$

Réciproquement, pour tous J et J' de cardinal fini

$$\sum_{i\in J}\alpha_i+\sum_{i\in J'}\beta_i\le\sum_{i\in J\cup J'}(\alpha_i+\beta_i)\le\sum_{i\in I}(\alpha_i+\beta)$$

On applique la définition de la borne supérieure aux deux sommes de gauche successivement et on obtient

$$\sum_{i\in I}\alpha_i+\sum_{i\in I}\beta_i\le\sum_{i\in I}(\alpha_i+\beta)$$

□

PROPOSITION 52
Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et soit $A\subset I$ une partie non nécessairement de cardinal fini. Alors

$$\sum_{i\in A}\alpha_i=\sum_{i\in I}\mathbb{1}_A(i)\,\alpha_i.$$

COROLLAIRE 53
Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et soit $A,B\subset I$ deux parties non nécessairement de cardinal fini. Alors

$$A\subset B\Rightarrow\sum_{i\in A}\alpha_i\le\sum_{i\in B}\alpha_i.$$

$$A\cap B=\emptyset\Rightarrow\sum_{i\in A\cup B}\alpha_i=\sum_{i\in A}\alpha_i+\sum_{i\in B}\alpha_i.$$

§ *2. Lien avec les séries à termes positifs*

PROPOSITION 54
Soit $I=\mathbb{N}$, $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n$ est fini ssi la suite $\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et alors

$$\sum_{i\in I}\alpha_i=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k.$$

Preuve — La différence est qu'avec la nouvelle définition on ne tient pas compte de l'ordre des α_i tandis que dans la seconde si ! Rappelons que les α_i sont positifs.
Si $\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, la suite est croissante et majorée par sa limite S.
Soit $J\subset\mathbb{N}$ de cardinal fini. Alors J admet un maximum N et

$$\sum_{i\in J}\alpha_i\le\sum_{j=0}^{N}\alpha_j\le S$$

Un ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure majorée par S, donc $\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i$ existe. De plus comme pour $J_n=[0,n]$, $\sum_{i\in J_n}\alpha_i=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i$ tend vers S, on a bien égalité.

Réciproquement, si $\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i$ existe et vaut S, alors $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i=\sum_{i\in[0,n]}\alpha_i$ est majoré par S et donc converge, et la première partie de la preuve montre qu'alors $\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_i=S$. □

Remarque 55 — *On a donc montré que lorsqu'on somme des réels positifs, l'ordre de la somme ne change pas le résultat. On va montrer que ceci est encore vrai pour les séries absolument convergentes, mais on verra aussi que le résultat est complètement faux pour les séries non absolument convergentes.*

§ *3. Somme et dénombrabilité*

Proposition 56
Soit I un ensemble non vide et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indéxée par I telle que $\displaystyle\sum_{i\in I}\alpha_i$ existe. Alors l'ensemble des indices i tels que $\alpha_i > 0$ est au plus dénombrable.

Preuve — Soit l'ensemble J des indices tels que $\alpha_i > 0$. Pour tout $n > 1$ on pose J_n l'ensemble des indices de J tels que $\dfrac{1}{n-1} > \alpha_i \geq \dfrac{1}{n}$ et J_1 est l'ensemble des α_i tels que $\alpha_i \geq 1$. Comme $\displaystyle\sum_{i\in I}\alpha_i$ converge, on en déduit que J_n est de cardinal fini.
Or $J = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i$, donc J est au plus dénombrable comme union de parties finies, ce qui termine la preuve. □

§ *4. Théorème de sommation par paquets*

Théorème 57
(Sommation par paquets) Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et soit $(A_j)_{j\in J}$ une partition quelconque de I. Alors

$$\sum_{i\in I}\alpha_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in A_j}\alpha_i\right).$$

Preuve — Pour toute famille finie F on pose J_F l'ensemble (fini) des indices j tels que $A_j \cap F \neq \emptyset$. Alors

$$\sum_{i\in F}\alpha_i = \sum_{j\in J_F}\left(\sum_{i\in A_j\cap F}\alpha_i\right) \leq \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in A_j}\alpha_i\right),$$

et par définition de la borne supérieure $\displaystyle\sum_{i\in I}\alpha_i \leq \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in A_j}\alpha_i\right)$.
Réciproquement, pour toute partie finie J_0 de J,

$$\sum_{j\in J_0}\left(\sum_{i\in A_j}\alpha_i\right) = \sum_{i\in\cup_{j\in J_0}A_j}\alpha_i \leq \sum_{i\in I}\alpha_i,$$

ce qui montre l'inégalité inverse. □

1.6.2 Familles sommables de complexes

§ *1. Définition* Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \max(0, -x)$. On a $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Définition 58
Une famille de réels $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable si $(\alpha_i^+)_{i\in I}$ et $(\alpha_i^-)_{i\in I}$ le sont en tant que familles de réels positifs. On définit alors la somme

$$\sum_{i\in I}\alpha_i = \sum_{i\in I}\alpha_i^+ - \sum_{i\in I}\alpha_i^-.$$

Une famille de complexes $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable si sa partie réelle et sa partie complexe sont sommables et sa somme est la somme des parties réelle et imaginaire.

Remarque 59 — *Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$,*

$$\max(|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|) \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$$

On en déduit qu'une famille de complexe est sommable ssi la famille $(|z_i|)_{i\in I}$ l'est.

Proposition 60
Si une famille de réels $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable, alors l'ensemble J des indices j tels que $\alpha_j \neq 0$ est dénombrables.
De plus, si J est infini et $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une énumération, alors la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable ssi la série $\sum_{k=0}^{n} \alpha_{j_k}$ est absolument convergente et dans ce cas

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{j_k}.$$

Preuve — On a déjà montré ce résultat pour les séries à termes positifs et $|x| = x^+ + x^-$. Pour une famille de réels quelconque, comme $x = x^+ - x^-$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{j_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{j_k}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{j_k}^-.$$

Enfin, pour les complexes, on applique le résultat à la partie réelle et la partie imaginaire. □

Remarque 61 — *Si $\sum_{k\geq 0} u_k$ est une somme absolument convergente, alors sa somme ne dépend pas de l'ordre dans lequel on somme. Mais si une série est convergente non absolument convergente, on peut montrer que des valeurs de la somme en changeant l'ordre est en fait dense dans $\mathbb{R}$! : en effet $\sum_n u_n^+$ et $\sum_n u_n^-$ tendent vers $+\infty$. Soit $a \in \mathbb{R}$, on prend la plus petite somme telle que $u_0^+ + \cdots + u_{k_0}^+ \geq a$ puis on rajoute $u_0^- + \cdots, u_{k_1}^-$ la plus grande somme inférieure à a. Puis on rajoute des termes positifs pour redépasser a, des termes négatifs pour redescendre sous a... Comme (u_n) tend vers 0, la somme ainsi réordonnée tend vers a.*

§ 2. *Propriétés des familles sommables*

Proposition 62
Soit I un ensemble non vide et $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\beta_i)_{i\in I}$ deux familles de complexes sommables indéxées par I. Alors :

1. *Si les familles sont réelles et $\forall i \in I$, $\alpha_i \leq \beta_i$,*
$$\sum_{i\in I} \alpha_i \leq \sum_{i\in I} \beta_i$$
2. *Si $a \in \mathbb{C}$,*
$$\sum_{i\in I} (a\alpha_i) = a \sum_{i\in I} \alpha_i$$
3. $$\sum_{i\in I} (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i + \sum_{i\in I} \beta_i.$$

Preuve — Nous ne traitons que le point 3/ et pour les familles de réels : La famille $(\alpha_i + \beta_i)$ est sommable car majorée en valeur absolue par $(|\alpha_i| + |\beta_i|)$ qui est sommable par définition.
Pour montrer l'égalité des sommes on doit partitionner l'ensemble des indices I de sorte que α_i, β_i et $\alpha_i + \beta_i$ sont de signe constant :

1. $I_{+,+} = \{i \in I \mid \alpha_i \geq 0,\ \beta_i \geq 0\}$
2. $I_{-,-} = \{i \in I \mid \alpha_i < 0,\ \beta_i < 0\}$
3. $I_{+,-}^+ = \{i \in I \mid \alpha_i \geq 0,\ \beta_i < 0, \alpha_i + \beta_i \geq 0\}$
4. $I_{+,-}^- = \{i \in I \mid \alpha_i \geq 0,\ \beta_i < 0, \alpha_i + \beta_i < 0\}$
5. $I_{-,+}^+ = \{i \in I \mid \alpha_i < 0,\ \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i \geq 0\}$
6. $I_{-,+}^- = \{i \in I \mid \alpha_i < 0,\ \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i < 0\}$

Sur chacun des ces ensembles on a l'égalité des sommes et on en déduit l'égalité finale car on somme 6 (fini) parties deux à deux disjointes. □

§ 3. Théorème de sommation par paquets

THÉORÈME 63
(Sommation par paquets) Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de complexes et soit $(A_j)_{j\in J}$ une partition quelconque de I. Alors pour que la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ soit sommable il faut et il suffit que chacune des familles $(\alpha_i)_{i\in A_j}$ soit sommable et que la famille

$$\left(\sum_{i\in A_j} |\alpha_i|\right)_{j\in J}$$

soit sommable.
Enfin, si la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable, alors

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in A_j} \alpha_i\right).$$

Preuve — C'est une conséquence directe du théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs.
On l'applique à la famille $(|\alpha_i|)_{i\in I}$. Comme par définition, $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable ssi $(|\alpha_i|)_{i\in I}$, on a la premère équivalence du théorème.
De plus, on applique en core le théorème de sommation par paquets aux familles (x_i^+), (x_i^-), (y_i^+), (y_i^-) où $\alpha_k = x_k + iy_k$, x_k, y_k réels.
Enfin, d'après la proposition 62, on a

$$\sum_{k\in I} \alpha_k = \sum_{k\in I} x_k^+ - \sum_{k\in I} x_k^- + i\sum_{k\in I} x_k^+ - i\sum_{k\in I} x_k^-$$

on obtient l'égalité de la seconde partie du théorème. □

REMARQUE 64 — *Pourque $(\alpha_i)_{i\in I}$ soit sommable, il ne suffit pas que chacune des familles $(\alpha_i)_{i\in A_j}$ soit sommable et la famille $\left(\sum_{i\in A_j} \alpha_i\right)_{j\in J}$ soit sommable : si $A_j = \{2j, 2j+1\}$ pour tout $j\in\mathbb{N}$ et $\alpha_j = (-1)^j$, la famille $(1, -1, 1, -1, ...)$ indexée par $\mathbb{N}$ n'est pas sommable.*

1.6.3 Double somme

On s'interroge sur la possibilité d'intervertir deux sommes dénombrables : Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une famille de complexes.
Suppposons que pour j fixé la somme $s_j = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$ existe et que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} s_j = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right).$$

Peut-on en déduire que $s'_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$ converge ? La réponse est non. Et même si s'_i converge et que la somme $\sum_{i=0}^{+\infty} s'_i$ converge, alors alors $\sum_{i=0}^{+\infty} s'_i$ n'est pas nécessairement égal à $\sum_{j=0}^{+\infty} s_j$.
Le théorème de Fubini pour les familles sommables nous donne les conditions à vérifier

THÉORÈME 65
(Théorème de Fubini) Soit une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$.

1. *Si les $u_{i,j}$ sont positifs : la famille est sommable ssi $\sum\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)$ converge et alors,*

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right).$$

2. Si la famille est sommable (et $u_{i,j}$ complexes), alors

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right).$$

Preuve — C'est exactement le théorème de sommation par paquets appliqué à $A_j = \{(i,j),\ i\mathbb{N}\}$ pour $j \in \mathbb{N}$.

□

Remarque 66 — *Pour une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}}$ on montrera que pour tout j, $\sum_i |u_{i,j}|$ converge puis que $\sum_j \left(\sum_i |u_{i,j}|\right)$ converge. On peut alors appliquer le théorème de Fubini.*

Corollaire 67
Si $\sum_{i\geq 0} a_i$ et $\sum_{i\geq 0} b_i$ sont absolument convergentes, alors la famille $(u_{i,j} = a_i b_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}} a_i b_j = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i.$$

Remarque 68 — *Si l'on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et en utilisant le théorème de sommation par paquets, on retrouve que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergente et que la somme du produit est le produit des sommes. Quand nous étudierons les séries entières nous ferons des produit $\sum a_n x^n \sum b_n x^= \sum c_n x^n$; tant que les séries sont absolument convergentes on pourra parler aussi bien de produit de familles sommables que de produit de Cauchy : mais le second me semble plus naturel dans ce cas.*

Exemple 69 — *Démontrer que la famille $(\alpha_{m,n}) = \left(\frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}\right)_{m,n\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculer sa somme S.*
On sait que $A = \sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que si P est l'ensemble des entiers pairs non nuls et I les entiers impairs, alors

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}A$$

et

$$\sum_{i\in I} \frac{1}{i^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} - \sum_{p\in P} \frac{1}{p^2} = \frac{3}{4}A.$$

On a

$$\sum_{(m,n)(N^*)^2} |\alpha_{m,n}| = \sum_{(m,n)(N^*)^2} \frac{1}{m^2n^2} = \left(\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}\right)^2$$

donc la famille est bien sommable.
De plus le produit mn est impairs ssi m et n sont impairs. On en déduit

$$S = U^2 + 2UV - V^2 = -\frac{\pi^4}{288}.$$

Exemple 70 — *Démontrer que la famille $(\alpha_{n,p}) = \left(\frac{1}{n^p}\right)_{n,p\geq 2}$ est sommable et calculer sa somme S.*
En effet, pour $n \geq 2$ fixé, la série géométrique $\sum_{p\geq 2} \frac{1}{n^p}$ converge et vaut $\frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ qui est le

terme général d'une série télescopique convergente vers 1.
La famille est bien sommable de somme 1 *et on a ainsi montré que*

$$\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\right) = 1 = \sum_{p=2}(\zeta(p)-1) = 1$$

où la fonction zeta de Riemann vaut $\zeta(z) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}$ *pour* $|z| > 1$.