Feuille de TD n° 1

Espaces vectoriels

28 février 2020

Pour commencer

Exercice 1. Pour chacun des ensembles suivants, dire si il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, en précisant $\mathbb{K}$ si nécessaire :

1. $\{(x,y) \in \mathbb{K}^2\,,\ x=0\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{K}^2\,,\ x \neq y\}$
4. $\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3\,,\ x=y\}$
5. $\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3\,,\ x \neq y\}$
7. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ de période } T\}$
8. $\{f \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}\,, f(1)=0\}$
10. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \text{ périodique}\}$
3. $\{(x,1)\,,\ x \in \mathbb{K}\}$
6. $\{f \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}\,, f(0)=1\}$
9. $\{(x,y) \in \mathbb{K}^2\,, |x|=|y|\}$
11. $\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbf{N}}, \forall n\,,\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\}$
13. $\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbf{N}},\ \lim u_n = 1\}$
12. $\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbf{N}}, (u_n) \text{ est convergente }\}$
14. $\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbf{N}},\ \lim u_n = 0\}$

Exercice 2. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Le complémentaire de F est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 3. Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lesquels en sont des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des fonctions dérivables en 0 ?
2. L'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$?
3. L'ensemble des fonctions prenant la valeur 1 en 0 ?

Exercice 4. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On considère les ensembles suivants :

$$F = \{(x,y,z,t) \in E / \ x+y+z=0\}$$

$$G = \mathrm{Vect}\,((1,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (1,0,0,0))\,.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Trouver deux vecteurs a et b de E tels que $F \cap G = \mathrm{Vect}\,(a,b)$.

Pour continuer

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $u = (1,1,1)$. On pose $F = \{(x,y,z) \in E, x+y+z=0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\ u$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 6. Soit E un $K-$ev, G, F et H des sev de E.

1. Montrer que $(F\cap G)+(F\cap H) \subset F\cap(G+H)$.
2. Montrer que $(G \subset F)$ ou $(H \subset F) \Longrightarrow (F\cap G)+(F\cap H) = F\cap(G+H)$.
3. Donner un exemple pour lequel il n'y a pas égalité dans le résultat du 1).

Exercice 7. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{x} = (2,3,-1)$ et $\overrightarrow{y} = (1,-1,-2)$ engendrent le même sev que $\overrightarrow{u} = (3,7,0)$ et $\overrightarrow{v} = (5,0,-7)$.

Exercice 8. Soit $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ deux familles de sous-espaces vectoriels de E. On suppose que

1. $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$;
2. Pour tout i, $E_i \subset F_i$.

Montrer que pour tout i $E_i = F_i$ (indication : prendre $x \in F$ et le décomposer sur $\oplus E_i$).
Donner un contre exemple si la condition 2/ n'est pas vérifiée.

Pour aller plus loin

Exercice 9. Soient U, V, W trois sous-espaces vectoriels d'un sous-espace vectoriel E tels que $U \subset V$.

1. Montrer que $U + (V \cap W) = (U + V) \cap (U + W)$.
2. Monter que le résultat peut être faux si $U \not\subset V$.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit E et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrez que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Soit $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels telle que $E = \cup_{i=1}^{n} F_i$. Montre qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $F_i = E$.