Analyse vectorielle (PC*)

Opérateurs gradient, divergence, rotationnel, laplacien :

1 – Gradient d'un champ scalaire :

Soit la fonction ou champ scalaire :

$$\vec{r} \quad \rightarrow \quad f(\vec{r}) \in \Re$$

continue et dérivable. L'opérateur gradient agissant sur ce champ scalaire donne un champ vectoriel défini par, où df représente la différentielle de f :

$$df = \overrightarrow{grad}\ f(\vec{r}).d\vec{r} = \vec{\nabla} f(\vec{r}).d\vec{r}$$

* Expressions en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques :

On définit des multiplicateurs μ_i de la manière suivante :

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \mu_i ds_i\ \vec{u}_i$$

Tableau des multiplicateurs	s_1	s_2	s_3	μ_1	μ_2	μ_3
Coordonnées cartésiennes	x	y	z	1	1	1
Coordonnées cylindriques	ρ	θ	z	1	ρ	1
Coordonnées sphériques	r	θ	φ	1	r	$r\sin\theta$

Dans l'un de ces trois systèmes de coordonnées orthogonales, on peut écrire :

$$\overrightarrow{grad}U = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial U}{\partial s_i} \vec{u}_i$$

* En tout point, le gradient du champ scalaire $f(\vec{r})$ est perpendiculaire à la surface de niveau (la surface iso-f) passant par ce point et il est dirigé suivant la direction de variation la plus rapide de $f(\vec{r})$, dans le sens des valeurs croissantes de $f(\vec{r})$.

Exemple en électrostatique : les lignes de champs sont perpendiculaires aux équipotentielles et le champ est dirigé vers les potentiels décroissants (car $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V(\vec{r}))$.

2 – Divergence d'un champ vectoriel :

Soit le champ vectoriel : $\vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{V}(\vec{r})$. La divergence de $\vec{V}(\vec{r})$ est, formellement, le résultat du produit scalaire de $\vec{V}(\vec{r})$ avec l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$, soit :

$$div\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla}.\vec{V}(\vec{r})$$

* Expressions en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques :

On utilise l'interprétation locale de la divergence, vue en cours lors de la démonstration locale du théorème de Gauss :

$$div\vec{A}(\vec{r}) = \frac{d\Phi_{sortant}}{d\tau}$$

A partir d'un point M de coordonnées orthogonales s_i, on construit un pavé élémentaire dont les 6 faces sont définies par les valeurs $s_i + ds_i$, … des coordonnées. Les arêtes du pavé ont pour longueur $\mu_i ds_i$ et son volume vaut :

$$d\tau = \mu_1\mu_2\mu_3\ ds_1 ds_2 ds_3$$

Le flux élémentaire à travers les deux surface s_1 et $s_1 + ds_1$ vaut :

$$d\Phi_1 = A_1(s_1 + ds_1, s_2, s_3)\mu_2 ds_2 \mu_3 ds_3 - A_1(s_1, s_2, s_3)\mu_2 ds_2 \mu_3 ds_3$$

Soit :

$$d\Phi_1 = \frac{\partial(\mu_2\mu_3 A_1)}{\partial s_1} ds_1 ds_2 ds_3$$

Par conséquent :

$$div\vec{A} = \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_3}\left[\frac{\partial(\mu_2\mu_3 A_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial(\mu_1\mu_3 A_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial(\mu_1\mu_2 A_3)}{\partial s_3}\right]$$

En coordonnées cylindriques :

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(rA_z)}{\partial z}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z}$$

Et en coordonnées sphériques :

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(r^2\sin\theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial\phi}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\phi)}{\partial\phi}$$

Pour se persuader de limiter l'utilisation du vecteur Nabla aux seules coordonnées cartésiennes, il suffit d'examiner les expressions du gradient et de la divergence en coordonnées cylindriques : l'expression du gradient suggère de postuler :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

mais si on effectue $\vec{\nabla}.\vec{A}$ (sans précaution !), on ne retrouve l'expression de $div\vec{A}$ obtenue ci-dessus ! Alors, ATTENTION !!!!!

En dehors des coordonnées cartésiennes, il n'est pas nécessaire d'apprendre les expressions des opérateurs (sauf celles du gradient !) ; s'il le faut, l'énoncé les donnera. On peut d'ailleurs par une approche intégrale (théorèmes de Stockes et de Green Ostrogradsky) ne pas avoir besoin de l'expression locale de ces opérateurs.