北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Français des Sciences

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

29 mars 2020

Chapitre 1 Les nombres complexes

1.1 Construction de $\mathbb{C}$

En mathématiques, il arrive souvent que l'on introduise de nouveaux objets pour résoudre un problème : par exemple, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$. On a complété $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ et on a appelé la solution $\sqrt{2}$.
De même, nous savons tous que l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on va compléter $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$: on pose le symbole i et l'ensemble des éléments $a + ib$ avec a et b réels s'appelle l'ensemble des nombres complexes (ici + est un symbole) :

$$\mathbb{C} = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

On définit deux opérations :

1. *addition :* $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$;
2. *multiplication* $(a + ib) \times (a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$.

Avec la convention $a + i0 = a$, on identifie d'une part $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.
Avec la convention $0 + i1 = i$, on calcule $i^2 = -1$. L'équation $X^2 = -1$ a deux solutions $X = i$ ou $X = -i$.

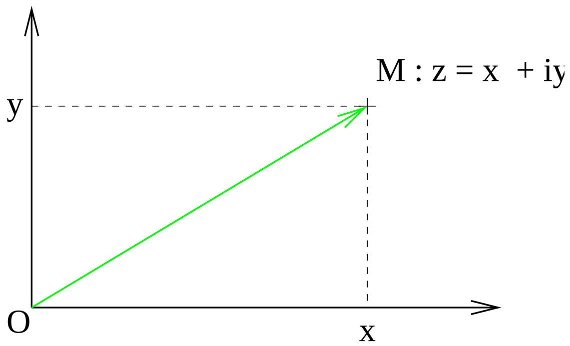
Si $z = a + ib$ avec a, $b \in \mathbb{R}$, on appelle a la partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}\,(z)$ et b la partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}\,(z)$. On a donc

$$z = \mathrm{R}e\, z + i\mathrm{I}m\, z.$$

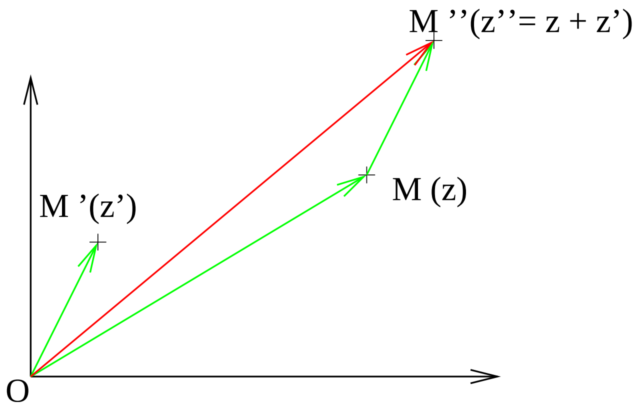
1.2 Interprétation géométrique

On peut identifier $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ et donc avec le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et

1. à tout complexe $z = a + ib$, on associe le point M de coordonnées (a, b). On dit que M a pour affixe z.
2. à tout vecteur $\vec{u}$ du plan on associe un unique point M d'affixe z tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et on dit que $\vec{u}$ est d'affixe z.



Rappelons que si P est le plan euclidien muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si z et z' sont les affixes respectivement des points M et M', alors $z + z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. De même $\alpha.z$ est l'affixe du vecteur du vecteur $\alpha.\overrightarrow{0M}$:



1.3 Le module et le conjugué

Définition 1
Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et le nombre complexe $z = x + iy$:
- *le <u>conjugué</u> de z est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$;*
- *le <u>module</u> de z est le nombre réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

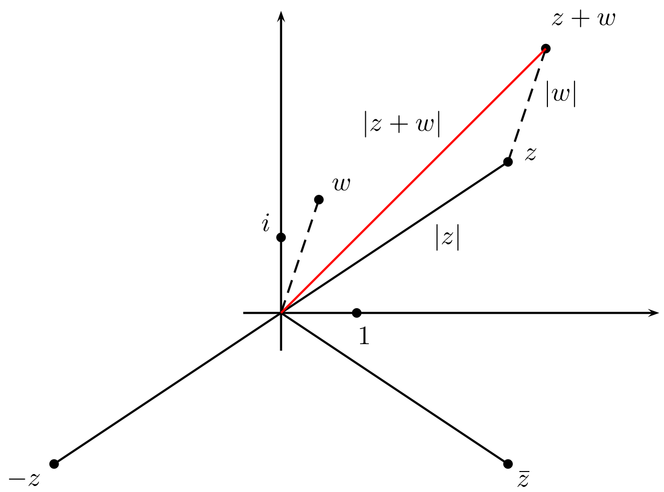


Figure 1.3 – L'opposé, le module & le conjugué d'un nombre complexe

Proposition 2
Soient deux complexes z et w.
1. $Re\,(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ *et* $Im\,(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$;
2. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ *et* $\overline{z \times w} = \bar{z} \times \bar{w}$;
3. $|z| = |\bar{z}|$ *et* $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$;
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *et* $|z \times w| = |z| \cdot |w|$.

Exercice – Montrer que : si $z \neq 0$, alors z possède un inverse et $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$. Calculer l'inverse $\dfrac{1}{1 + i\sqrt{3}}$ du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$.

Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est réel si, et seulement si, $z = \bar{z}$.

1.4 Le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique $\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes z tels que $|z| = 1$:

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z = \cos\theta + i\sin\theta.$$

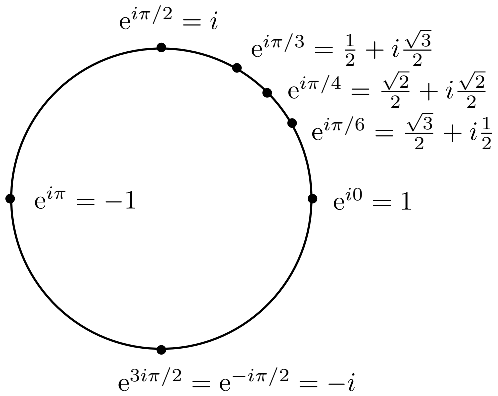


Figure 1.4 – Le cercle trigonométrique

Un peu de trigonométrie : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta) \times (\cos\varphi + i\sin\varphi) &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta) \\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi). \qquad (1)\end{aligned}$$

On décide de noter

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

C'est une bonne idée car (1) devient :

$$\boxed{e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}}$$

Exercice – Montrer que $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

Proposition 3

Soit un réel θ.

1. $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = Re\left(e^{i\theta}\right)$ *et* $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = Im\left(e^{i\theta}\right)$;
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exercice – Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.
2. Exprimer $\cos^3(\theta)$ en fonction de $\cos(3\theta)$ et de $\cos\theta$.

La multiplication par $e^{i\varphi}$	équivaut à	la rotation d'angle φ :
multiplier par $e^{i\varphi}$	$\Longleftrightarrow$	tourner d'un angle φ.

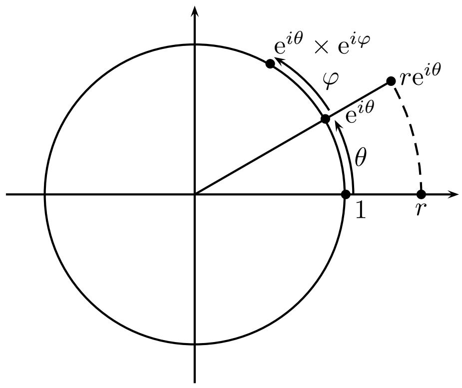


Figure 1.5 – La multiplication de deux complexes

Tout nombre complexe peut s'écrire

$$z = r\,e^{i\theta}, \qquad \text{où} \quad r = |z|.$$

L'<u>écriture cartésienne</u> d'un nombre complexe est $z = x + iy$ (elle est unique).

Une <u>écriture</u> <u>polaire</u> de z est $re^{i\theta}$ (elle n'est pas unique car $\forall k \in \mathbb{Z},\ e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$.)

Par exemple, une écriture polaire de -2 est $2e^{i\pi}$.

1.5 L'équation du second degré

Soit un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$. Une racine carrée de a est une solution complexe de l'équation $z^2 = a$.

Proposition 4
Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées opposées.

Exercice – Calculer les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$.

Proposition 5
Soient $a \neq 0$, b et c trois nombres complexes. Pour résoudre l'équation

$$az^2 + bz + c = 0\,,$$

on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:
— *si $\Delta = 0$, alors l'équation a une unique solution $-\frac{b}{2a}$;*
— *si $\Delta \neq 0$, alors l'équation a deux solutions $\frac{-b-\delta}{2a}$ et $\frac{-b+\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ.*

Exercice – Déterminer les solutions de l'équation $z^2 + 2z - i\sqrt{3} = 0$.

1.6 Les racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une racine $n-$ième de l'unité est une solution de l'équation $z^n = 1$. L'ensemble des racines $n-$ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Exercice –Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$: les racines $n-$ièmes de l'unité appartiennent au cercle trigonométrique.

Proposition 6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe n racines $n-$ièmes de l'unité :

$$\omega_k = e^{ik2\pi/n}, \quad \textit{où} \quad k = 0, \cdots, n-1.$$

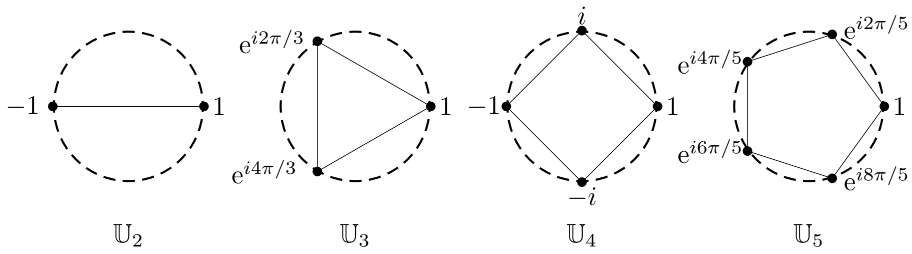


Figure 1.6 – Les racines deuxièmes, troisièmes, quatrièmes & cinquièmes de l'unité