Objectifs du cours

Cours de calcul des structures
Partie dynamique des structures
Objectifs :

- présenter la structure des équations de la mécanique des structures
- formuler un problème, mettre en équation ce dernier : principes fondamentaux, obtention et écriture des équations
- introduire deux outils essentiels pour analyser, comprendre et maîtriser le comportement dynamique et vibratoire des structures : la synthèse modale, l'analyse par éléments finis et plus généralement la recherche d'une solution approchée.

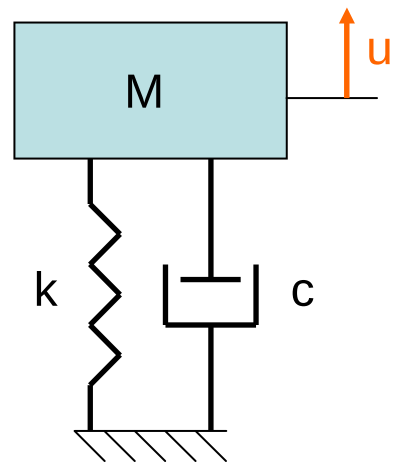
Chapitre n+1
Formulation du problème en dynamique des structures : formulation forte / formulation faible
I – Approche différentielle sur les systèmes discrets
II – Principe de Hamilton
III- Systèmes continus
Chapitre n+2
Calcul modal des structures
I- Modes de vibrations
II- Propriétés de modes
III- Synthèse modale
Chapitre n+3
Discrétisation des structures
I- Analyse discrète des structures : objectif et principe
II- Mise en œuvre
III- Calcul modal sous forme discrète
IV- Introduction des éléments finis

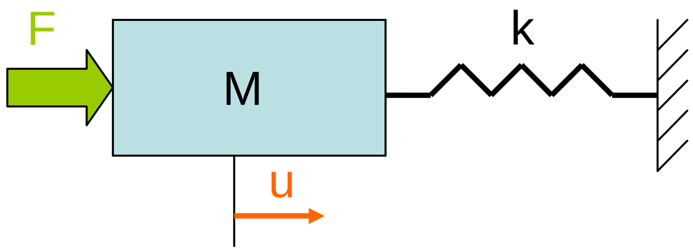
Formulation du problème en dynamique des structures : formulation forte / formulation faible

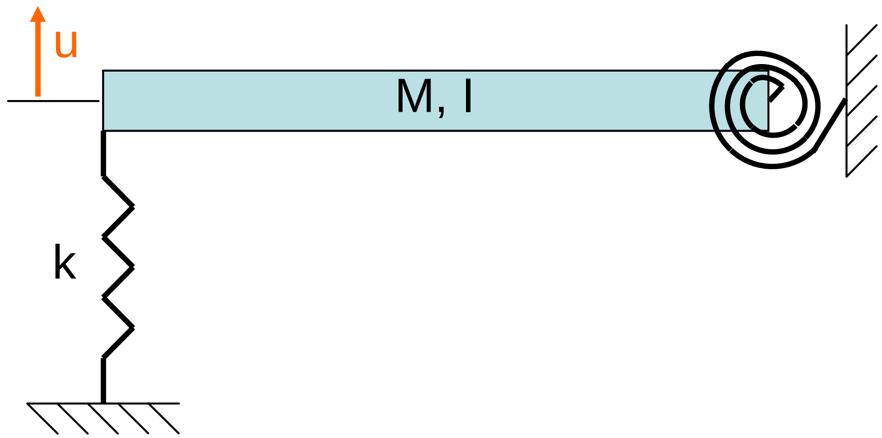
Approche différentielle sur les systèmes discrets
Principe de Hamilton
Systèmes continus
Dynamique et vibration des systèmes continus

I - Approche différentielle sur les systèmes discrets

Jusqu’ici, les systèmes vibratoires (ou dynamiques) sont des assemblages d’éléments discrétisés, à savoir des corps rigides dont la seule caractéristique considérée est l’inertie, reliés entre eux par des éléments déformables (ressorts) et/ou des éléments dissipatifs dépourvus d’inertie. Au mieux une liaison contraint la cinématique.







Le nombre d’inconnues et de degrés de liberté est lié au nombre de solides et d’équations de liaison.

I - Approche différentielle sur les systèmes discrets

I-1- Description des formulations

- Formulation forte, système discret

$$M\ddot{u} = -ku + F \qquad\qquad M\ddot{u} = -ku - c\dot{u}$$

- Approche variationnelle : écriture des équations, écriture des équilibres à partir de principes variationnels qui reposent sur les concepts d'énergie et de travail

Remarques :

elle facilite l'écriture analytique de équations du mouvement d'un système complexe

elle conduit à des méthodes numériques approchées pour le calcul des systèmes discrets et des systèmes continus

Démarche :

- principe des travaux virtuels (PTV)
- notion de degrés de liberté (ddls)
- principe de Hamilton
- équation du mouvement sous la forme de Lagrange

I - Approche différentielle sur les systèmes discrets

I-2- Principe des travaux virtuels

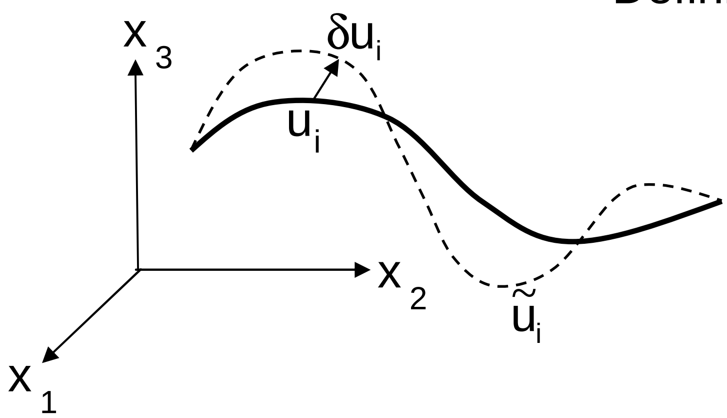
Principe des travaux virtuels pour un point matériel
(ou un système de points matériels)

Équation du mouvement (équilibre dynamique) $m\ddot{u}_i = X_i \Leftrightarrow m\ddot{u}_i - X_i = 0$

masse (m)
accélération ($\ddot{u}_i$)
force appliquée (X_i)

formulation forte

Définition : δ. appelé « opérateur de variation »



$$\delta u_i = \tilde{u}_i(t) - u_i(t)$$

$u_i(t)$: déplacement réel

$\tilde{u}_i(t)$: déplacement virtuel, arbitraire

δu_i : variation par rapport au déplacement réel

Arbitraire mais tel que : $\delta u_i(t_1) = 0$ et $\delta u_i(t_2) = 0$

I - Approche différentielle sur les systèmes discrets

Remarque : conséquence de la définition de l'opérateur de variation δ., cet opérateur commute avec l'opérateur de dérivation temporelle.

$$\frac{d}{dt}(\delta u_i) = \frac{d}{dt}(\tilde{u}_i) - \frac{d}{dt}(u_i) = \delta\left(\frac{d}{dt}(u_i)\right)$$

$$= \dot{\tilde{u}}_i - \dot{u}_i = \delta\dot{u}_i$$

Rappels sur les fonctionnelles et les variations :

fonction u(x), dérivée de fonction u'(x)

fonctionnelle $F(u(x), u'(x), \ldots, x)$

fonctionnelle intégrale $J = \int_{x_1}^{x_2} F(u(x), u'(x), \ldots, x).dx$

$$\delta u' = (\delta u)'$$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' + \ldots$$

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta F.dx$$

I - Approche différentielle sur les systèmes discrets

Formulation forte (équations d'équilibre pour un point matériel) :

$$m\ddot{u}_i = X_i \qquad \forall i \in \{1,2,3\}$$

Alors : $\underbrace{\sum_{i=1}^{3} (m\ddot{u}_i - X_i).\delta u_i = 0}$ $\qquad \forall \delta u_i$

$$\left\{ \begin{bmatrix} m\ddot{u}_1 \\ m\ddot{u}_2 \\ m\ddot{u}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \right\} . \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le travail virtuel effectué par les forces agissant réellement sur le point matériel lors d'un déplacement virtuel δu_i est nul.

vecteur des forces d'inertie

vecteur force

vecteur variation

<u>Conséquence :</u> par extension aux systèmes à plusieurs ddls, si l'équation des travaux virtuels est vérifiée pour tout déplacement compatible avec les conditions cinématiques, l'équilibre du système est satisfait.

II – Principe de Hamilton

Principe de Hamilton $\longrightarrow$ équations de Lagrange

(hyp. : système conservatif)

Le principe de Hamilton est une forme intégrée dans le temps du principe des travaux virtuels obtenue en transformant l 'expression suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}(-m_k\ddot{u}_{ik}+X_{ik}).\delta u_{ik}\right].dt=0$$

X_{ik} : force sur le point matériel k, dans la direction i

$\ddot{u}_{ik}$: accélération du point matériel k, dans la direction i

δu_{ik} , déplacement virtuel arbitraire *compatible* qui vérifie les conditions aux extrémités du domaine temporel

déplacement <u>compatible</u> = déplacement cinématiquement admissible = déplacement qui vérifie les condition imposées en déplacement

$$\delta u_{ik}=\tilde{u}_{ik}(t)-u_{ik}(t)$$

$$\delta u_{ik}(t_1)=0$$

$$\delta u_{ik}(t_2)=0$$

II – Principe de Hamilton

II-1- Energie cinétique

On constate que

$$\frac{d}{dt}\left(m_k \dot{u}_{ik}.\delta u_{ik}\right) = m_k \ddot{u}_{ik}\delta u_{ik} + m_k \dot{u}_{ik}\delta \dot{u}_{ik} = m_k \ddot{u}_{ik}\delta u_{ik} + \delta\left(\frac{1}{2} m_k \dot{u}_{ik}\dot{u}_{ik}\right)$$

alors, sachant que l'énergie cinétique totale s'écrit :

$$E_C = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\left(m_k \dot{u}_{ik}\dot{u}_{ik}\right)$$

on obtient :

$$-m_k \ddot{u}_{ik}\delta u_{ik} = -\frac{d}{dt}\left(m_k \dot{u}_{ik}.\delta u_{ik}\right) + \delta\left(\frac{1}{2} m_k \dot{u}_{ik}\dot{u}_{ik}\right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\left(-m_k \ddot{u}_{ik}\right).\delta u_{ik}\right].dt = \left[-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} m_k \dot{u}_{ik}.\delta u_{ik}\right]_{t_1}^{t_2} + \delta\int_{t_1}^{t_2} E_C.dt$$

II – Principe de Hamilton

II-2- Travail des actions mécaniques (forces)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left(-m_k \ddot{u}_{ik} + X_{ik} \right) . \delta u_{ik} \right] . dt = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} X_{ik} . \delta u_{ik}$$

$\delta W_{extérieur}$ travail d'action mécanique extérieure

$-\delta V$ V, énergie potentielle

X_{ik} dérive d'un potentiel

II – Principe de Hamilton

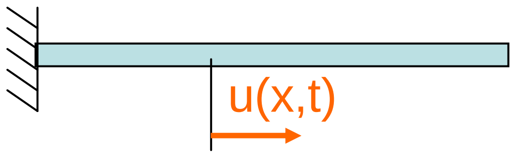
II-3- Coordonnées généralisées

- description de la solution sous la forme initiale $\{u_{ik}\}_{i,k}$

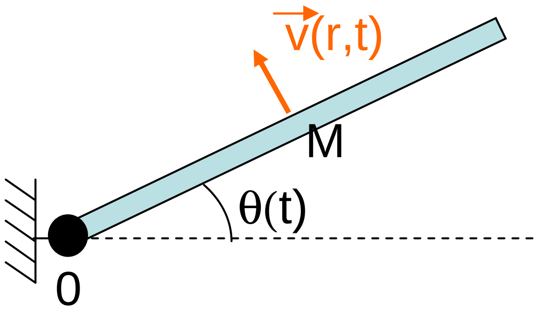
- on peut réduire ce paramétrage à un ensemble de coordonnées en nombre limité, qui permet de généraliser la représentation de la solution et des équations

$\{u_{ik}\}_{i,k} \mapsto \{q_S\}$ $\qquad$ q_S, coordonnée généralisée

<u>exemples :</u>



$$\begin{cases} u(x,t) = \alpha.\left(1 - \dfrac{x}{L}\right) \\ \alpha = \alpha(t) \equiv q_S \end{cases}$$



vitesses de la poutre : $\vec{v}(r,t) = v(r,t).\vec{t}$ $\quad$ $v(r,t) = r\,\dot{\theta}$ $\qquad$ $\{V\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\vec{z} \\ v(r,t).\vec{t} \end{Bmatrix}_{M(r)}$

$\boxed{\begin{array}{l} \theta, \dot{\theta} \\ v(r,t) \end{array}} \longrightarrow$ θ, coordonnée généralisée (condition de liaison : pivot en 0)

II – Principe de Hamilton

II-3- Coordonnées généralisées (suite)

<u>Conséquences :</u> de manière générale

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} X_{ik}.\delta u_{ik} = \sum_{S=1}^{n} Q_S.\delta q_S \qquad \text{avec} \quad n \leq 3N$$

$$\boxed{Q_S}\ \boxed{\text{force généralisée}}$$

$$u_{ik}(x,t) = U_{ik}(q_S,t) \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_{ik} = \frac{\partial U_{ik}}{\partial t} + \sum_{S=1}^{n} \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_S}.\dot{q}_S$$

pour $\{X_{ik}\}_{i,k}$ qui dérive d'un potentiel, on peut alors écrire

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} X_{ik}.\delta u_{ik} = \sum_{S=1}^{n} Q_S.\delta q_S = -\delta V \qquad \text{avec} \quad n \leq 3N$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_C &= E_C(q_S,\dot{q}_S,t) \\ V &= V(q_S,t) \end{aligned}}$$

Q_S force généralisée dérivée d'un potentiel

$$Q_S = -\frac{\partial V}{\partial q_S}$$

V, énergie potentielle

II – Principe de Hamilton

II-4- Enoncé du principe de Hamilton

Compte tenu des expressions obtenues pour E_C , V et W_{ext} , on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} (-m_k \ddot{u}_{ik} + X_{ik}).\delta u_{ik} \right].dt = \underbrace{\left[-\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_k \dot{u}_{ik}.\delta u_{ik} \right]_{t_1}^{t_2}}_{\begin{array}{l} =0 \\ \text{car } \delta u_{ik}(t_1)=0 \\ \text{et } \delta u_{ik}(t_2)=0 \end{array}} + \delta \int_{t_1}^{t_2} (E_C - V + W_{ext}).dt$$

<u>Principe de Hamilton</u> (pour un système conservatif) :

La trajectoire réelle du système (solution) est celle qui rend stationnaire l'intégrale :

$$\int_{t_1}^{t_2} (E_C - V + W_{ext}).dt \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} E_C = E_C(q_S, \dot{q}_S, t) \\ V = V(q_S, t) \end{array}$$

par rapport à toutes les variations arbitraires de déplacement (compatible) entre les deux instants t_1 et t_2, mais qui s'annulent toutefois aux extrémités de l'intervalle.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_C - V + W_{ext}).dt = 0 \quad \text{avec} \quad \delta q_S(t_1) = 0 \quad \text{et} \quad \delta q_S(t_2) = 0$$

II – Principe de Hamilton

II-5- Equations du mouvement à partir du principe de Hamilton

$$\delta E_C = \sum_{S=1}^{n} \left(\frac{\partial E_C}{\partial q_S} \delta q_S + \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_S} \delta \dot{q}_S \right)$$

on pose $\delta W_{ext} = F_S . \delta q_S$ d'après $W_{ext} = F_S . q_S$

alors $\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_C - V + W_{ext}) . dt = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{S=1}^{n} \left(\frac{\partial E_C}{\partial q_S} + Q_S + F_S \right) \delta q_S + \underbrace{\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_S} \delta \dot{q}_S}_{\text{intégration par partie}} \right] dt = 0$

$$\cancel{\left[\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_S} \delta q_S \right]_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_S} \right) \delta q_S . dt$$

= 0 (cdt. du principe de Hamilton)

donc

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{S=1}^{n} \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_S} + \frac{\partial E_C}{\partial q_S} + Q_S + F_S \right) \delta q_S \right] dt = 0$$

δq_S → variation arbitraire pour tout l'intervalle de temps

II – Principe de Hamilton

II-5- Equations du mouvement à partir du principe de Hamilton (suite)

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{S=1}^{n}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_S}+\frac{\partial E_C}{\partial q_S}+Q_S+F_S\right)\delta q_S\right]dt=0$$

On obtient alors les équations du mouvement proposées par Lagrange.

Pour chaque δq_S

$$\boxed{\underbrace{-\frac{d}{dt}\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_S}+\frac{\partial E_C}{\partial q_S}}_{\text{forces d'inertie généralisées associées aux coordonnées généralisées } q_S}+\underbrace{Q_S+F_S}_{\text{forces généralisées regroupant aussi bien les forces internes que les forces externes}}=0}$$

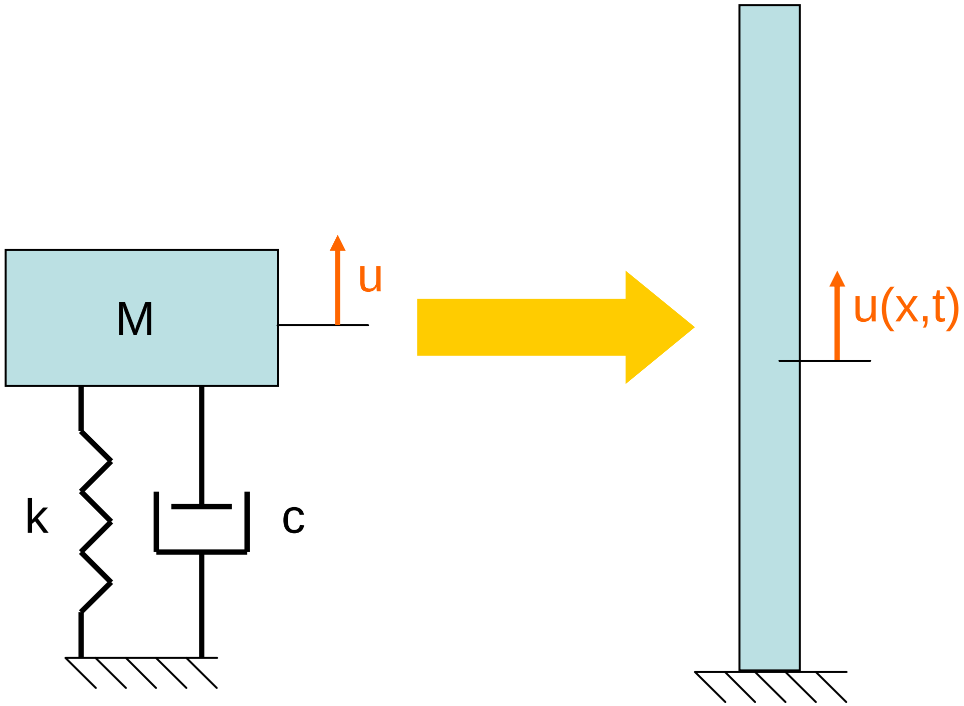
forces d’inertie généralisées associées aux coordonnées généralisées q_S

forces généralisées regroupant aussi bien les forces internes que les forces externes

III – Cas des systèmes continus

Système continu : dans notre cas, modèle mathématique d'un système continu déformable dans le temps (propriété d'inertie et de déformation dans un même objet)

élastodynamique $\Longrightarrow$ mécanique des milieux continus



$\vec{u}(\vec{x},t)$ vecteur déplacement d'un point dans l'objet

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{Bmatrix}$$

III – Cas des systèmes continus

III-1- Généralisation du principe de Hamilton

La trajectoire réelle (ou déplacement) est celle qui rend stationnaire l'action au sens de Lagrange et Hamilton la fonctionnelle :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(E_C - V + W_{ext}\right).dt \qquad \text{i.e.} \qquad \delta\int_{t_1}^{t_2} \left(E_C - V + W_{ext}\right).dt = 0 \quad \forall\, \delta u$$

$$\text{avec} \quad \delta u(t_1) = 0 \quad \text{et} \quad \delta u(t_2) = 0$$

On note $L(u) = E_C - V + W_{ext}$

$$E_C = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \rho_0 \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i \dot{u}_i \, d\Omega$$

$$V = \underbrace{V_{int} + V_{ext}}$$

énergies associées aux actions mécaniques qui dérivent d'un potentiel

<u>Hyp.:</u> petites déformations

ε tenseur linéarisé

$\Omega \approx \Omega_0$

$\rho \approx \rho_0$

III – Cas des systèmes continus

III-1- Généralisation du principe de Hamilton (suite)

$$V = V_{int} + V_{ext}$$

V_{ext} énergie potentielle des forces volumiques $\quad V_{ext} = -\int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{3} f_i . u_i \, d\Omega$

V_{int} énergie potentielle associée aux contraintes et aux déformations internes, <u>énergie de déformation</u>

Dans le cas d'un solide élastique, linéaire : $\quad V_{int} = \int_{\Omega_0} w(\varepsilon_{ij}) d\Omega$

$w(\varepsilon_{ij})$ densité d'énergie de déformation

$$w(\varepsilon_{ij}) = \sum_{i,j} \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij} \quad \Rightarrow \quad \delta w = \sum_{i,j} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij}$$

III – Cas des systèmes continus

III-1- Généralisation du principe de Hamilton (fin)

Travail des efforts extérieurs $$W_{ext} = \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^{3} F_i . u_i \, d\partial\Omega$$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$ effort sur la frontière $\partial\Omega_0$

Retour sur la fonctionnelle en énergie :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} \left(E_C - V + W_{ext}\right).dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega_0} \left(\underbrace{\rho_0 \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i \delta\dot{u}_i}_{} - \sum_{i,j} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} + \sum_{i=1}^{3} f_i . \delta u_i \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^{3} F_i . \delta u_i \, d\partial\Omega \right] dt$$

$$\overbrace{\int_{\Omega_0} \cancel{\left[\rho_0 \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i \delta u_i \right]_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} \rho_0 \sum_{i=1}^{3} \ddot{u}_i \delta u_i \, dt \, d\Omega}$$

= 0 (cdt. du principe de Hamilton)

III – Cas des systèmes continus

III-1- Généralisation du principe de Hamilton (fin)

Travail des efforts extérieurs $$W_{ext} = \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^{3} F_i . u_i \, d\partial\Omega$$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$ effort sur la frontière $\partial\Omega_0$

Retour sur la fonctionnelle en énergie :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_C - V + W_{ext}).dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega_0} \left(\rho_0 \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i \delta\dot{u}_i \underbrace{- \sum_{i,j} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij}}_{\text{Green-Ostrogradski}} + \sum_{i=1}^{3} f_i . \delta u_i \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^{3} F_i . \delta u_i \, d\partial\Omega \right] dt$$

$$\overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i,j} n_i \sigma_{ij} \delta u_j \, d\partial\Omega \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_0} \sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_j \, d\Omega dt}$$

III – Cas des systèmes continus

III-1- Généralisation du principe de Hamilton (fin)

Travail des efforts extérieurs $W_{ext} = \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^{3} F_i . u_i \, d\partial\Omega$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$ effort sur la frontière $\partial\Omega_0$

Retour sur la fonctionnelle en énergie :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_C - V + W_{ext}).dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i,j} (F_j - n_i \sigma_{ij}) \delta u_j \, d\partial\Omega \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_0} \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \rho_0 \ddot{u}_j + f_j \right) \delta u_j \, d\Omega dt$$

$\delta u_j = 0$ là où u_j est connue à la frontière (variation cinématiquement admissible)

variation arbitraire qui respecte les conditions du principe de Hamilton

Bilan

Chapitre n+1
Formulation du problème en dynamique des structures : formulation forte / formulation faible

I – Approche différentielle sur les systèmes discrets
II – Principe de Hamilton
III- Systèmes continus

Principe de travaux virtuels (calcul de variation) :
formulation faible / formulation forte

Fonctionnelle en énergie :
énergie cinétique, énergie potentielle, travail des efforts extérieurs

Principe de Hamilton : généralisation au cas des structures continues

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(E_C - V + W_{ext}\right).dt \qquad \text{i.e.} \qquad \delta\int_{t_1}^{t_2} \left(E_C - V + W_{ext}\right).dt = 0 \quad \forall\,\delta u$$

$$\text{avec} \quad \delta u(t_1) = 0 \quad \text{et} \quad \delta u(t_2) = 0$$

Démarche générique d'écriture des équations du problème en élastodynamique (équations d'équilibre, conditions limites…)