Objectifs du cours

Cours de calcul des structures
Partie dynamique des structures
Objectifs :
- présenter la structure des équations de la mécanique des structures
- formuler un problème, mettre en équation ce dernier : principes fondamentaux, obtention et écriture des équations
- introduire deux outils essentiels pour analyser, comprendre et maîtriser le comportement dynamique et vibratoire des structures : la synthèse modale, l'analyse par éléments finis et plus généralement la recherche d'une solution approchée.

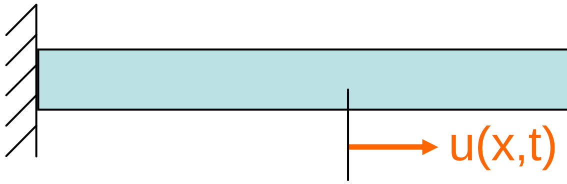
Calcul modal des structures

Modes de vibrations
Propriétés des modes
Synthèse modale

I – Modes de vibration

I-1- Notion de mode

Exemple : équation du mouvement en traction-compression



$$-ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Principe de d'Alembert : solutions sous la forme $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

forme propagative de la solution

Il existe, dans certains cas, des solutions qui peuvent se mettre sous la forme :

$$\boxed{u(x,t) = U.X(x).T(t)}$$

solution par séparation de variables

$X(x)$ forme spatiale de répartition des amplitudes (forme en ondes stationnaires de la solution)

$$-ES\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}T = -\rho SX\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}\frac{\rho S}{ES} = -k^2$$

$k^2 > 0$, pour obtenir une solution stable vis-à-vis du temps

I – Modes de vibration

I-1- Notion de mode

$$-ES\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}T = -\rho S X\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}\frac{\rho S}{ES} = -k^2$$

k^2 >0, pour obtenir une solution stable vis-à-vis du temps

$$X'' = -k^2 X$$

solution harmonique de l'espace

$$X = A_+e^{+ikx} + A_-e^{-ikx}$$
$$= A_C\cos(kx) + A_S\sin(kx)$$

$$T'' = -\omega^2 T$$

solution harmonique du temps

$$T = B_+e^{+i\omega t} + B_-e^{-i\omega t}$$
$$= B_C\cos(\omega t) + B_S\sin(\omega t)$$

avec $\boxed{\omega^2 = \frac{ES}{\rho S}k^2}$

$$\boxed{u(x,t) = U.X(x).T(t) \equiv f(x-ct) + g(x+ct)}$$

avec $c = \frac{\omega}{k}$

I – Modes de vibration

I-2- Définition des modes

Il existe des solutions harmoniques aux équations homogènes du problème de vibrations.

Ces solutions correspondent aux ondes stationnaires.

Mode propre : solution harmonique libre aux équations (homogènes)
(équations d'équilibre homogènes + cdts. aux limites homogènes en déplacement ou en force)

$$u(x,t) \quad \mapsto \quad u(x,t) = \phi(x)\, e^{i\omega t}$$

équation du mouvement (forme forte) $\quad Au = -\rho\ddot{u} \quad$ + cdts. limites

$$A\phi = \omega^2 \phi \ddot{u}$$

(A, opérateur différentiel)

équation du mouvement (forme faible) $\quad \int_\Omega Au.v\, d\Omega = -\int_\Omega \rho\ddot{u}.v\, d\Omega \quad \forall v$

=0, cdts. homogènes $\quad [\ldots]_{\partial\Omega} + a(u,v) = -\int_\Omega \rho\ddot{u}.v\, d\Omega \quad \forall v$

On peut mettre le problème sous la forme $\quad \boxed{a(u,v) = (\rho u, v) \quad \forall v}$

avec a(. , .) et (. , .) formes bilinéaires symétriques.

I – Modes de vibration

Exemples 1D : justification de la forme générale
en formulation forte et en formulation faible

$$\boxed{Au = -\rho\ddot{u}} \qquad \boxed{a(u,v) = (\rho u, v) \quad \forall v}$$

Barre en traction-compression

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad Au = -\frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{(\rho\ddot{u}, v) = -\int_0^L S\rho\ddot{u}.v\,dx}$$

$$(Au, v) = \int_0^L Au.v\,dx = -\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right).v\,dx = \underbrace{-\left[ES\frac{\partial u}{\partial x}.v\right]_0^L}_{=0,\ \text{cdts. limites homogènes}} + \int_0^L ES\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

$$Hu_{x=0ouL} = ES\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0ouL} \quad \text{ou} \quad u_{x=0ouL}$$

opérateur différentiel de frontière

$$\Rightarrow \boxed{a(u,v) = \int_0^L ES\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x}dx}$$

I – Modes de vibration

Exemples 1D : justification de la forme générale
en formulation forte et en formulation faible

$$\boxed{Au = -\rho\ddot{u}} \qquad \boxed{a(u,v) = (\rho u, v) \quad \forall v}$$

Poutre en flexion

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \Rightarrow \quad Au = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{(\rho\ddot{u}, v) = -\int_0^L S\rho\ddot{u}.v\,dx}$$

$$(Au, v) = \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).v\,dx = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)v\right]_0^L - \left[EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right]_0^L}_{=0,\ \text{cdts. limites homogènes}} + \int_0^L EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx$$

$$Hu_{x=0ouL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right) \\ EI\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \end{bmatrix}_{x=0ouL} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ u \end{bmatrix}_{x=0ouL}$$

opérateur différentiel de frontière

$$\Rightarrow \boxed{a(u,v) = \int_0^L EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx}$$

I – Modes de vibration

Bilan :

Soit ϕ_i solution harmonique libre (cdts. limites homogènes), il existe ω_i tel que

$$\boxed{A\phi_i = \rho\omega_i^2\phi_i} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a(\phi_i, v) = \omega_i^2(\rho\phi_i, v) \quad \forall v}$$

+ cdts. limites

(ϕ_i, ω_i) est appelé le mode propre i

Formule de Green, formulation équivalente à la formulation forte : $\int_\Omega u.Av.d\Omega = (u, Av) = (Au, v) + [...]$

II – Propriétés des modes propres

II-1- Orthogonalité des modes propres

Soit (ω_n, ϕ_n) mode propre

Soit (ω_p, ϕ_p) mode propre

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a(\phi_n, \phi_p) &= \omega_n^{\,2}(\rho\phi_n, \phi_p) \\ a(\phi_p, \phi_n) &= \omega_p^{\,2}(\rho\phi_p, \phi_n) \end{aligned}$$

Par soustraction membre à membre : $\left(\omega_n^{\,2} - \omega_p^{\,2}\right)(\rho\phi_p, \phi_n) = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(\rho\phi_p, \phi_n) = 0}$$ (produit scalaire)

Les modes propres sont orthogonaux suivant le produit scalaire $(\rho\ .\ ,\ .\ )$.

Remarque : $(\rho\ .\ ,\ .\ )$ est une forme bilinéaire symétrique, définie et positive sur l'espace vectoriel des solutions

II – Propriétés des modes propres

II-2- Unicité et normalisation

Soit (ω_n, ϕ_n) mode propre

Soit α un nombre réel

par définition : $A\phi_n = \rho\omega_n^{\,2}\phi_n$

alors ϕ_n est aussi solution

$$A\alpha\phi_n = \rho\omega_n^{\,2}\alpha\phi_n$$

Par conséquent ϕ_n est défini à un coefficient multiplicatif près.

Choix de normalisation, pour définir l'unicité : $\boxed{(\rho\phi_n, \phi_n) = 1}$

Conséquence : les modes propres sont une base orthogonale (voire orthonormée) de l'espace des solutions.

On peut ainsi représenter la solution sous la forme : $u(x,t) = \sum_n \lambda_n(t).\phi_n(x)$

λ_n coordonnée généralisée dans la base modale

Remarque : on démontre qu'il existe une infinité de modes propres (espace des solutions de dimension infinie)

III – Synthèse modale

III-1- Base modale

On peut représenter toute solution sous la forme : $u(x,t)=\sum_i q_i(t).\phi_i(x)$

Formulation forte : $Au=-\rho\ddot{u}+f$ et cdts. limites

Formulation faible :

$$\int_\Omega Au.\phi_j dx+\int_\Omega \rho\ddot{u}.\phi_j dx=\int_\Omega f.\phi_j dx \quad \forall\phi_j$$

$$\int_\Omega A\sum_i q_i(t).\phi_i(x).\phi_j dx+\overbrace{\int_\Omega \rho\sum_i \ddot{q}_i(t).\phi_i(x).\phi_j dx}^{F_j}=\int_\Omega f.\phi_j dx \quad \forall\phi_j$$

intégration par parties

$$\sum_i q_i(t).a(\phi_i,\phi_j)-\int_{\partial\Omega}\left(H\sum_i q_i.\phi_i\right).\phi_j dx+\ddot{q}_i=f_j$$

opérateur différentiel de frontière

$$\omega_j^{\ 2}q_j-F_j+\ddot{q}_i=f_j$$

$$\boxed{\ddot{q}_i+\omega_j^{\ 2}q_j=F_j+f_j}$$

Une équation pour chaque mode j

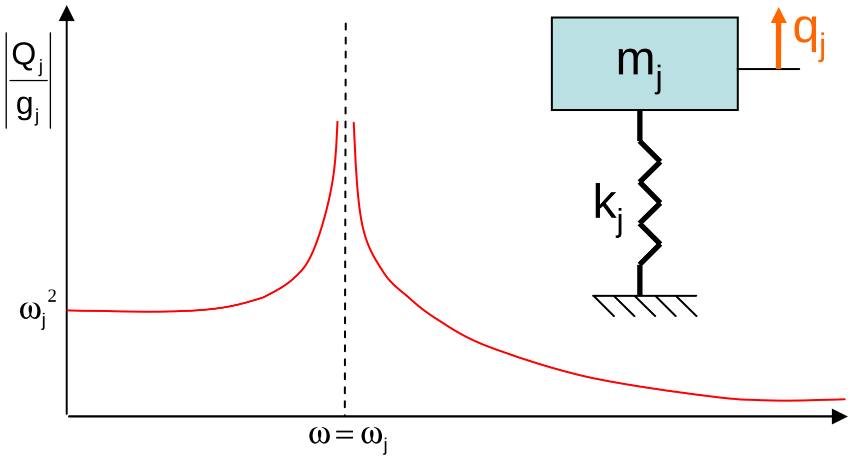
Équation de base pour le calcul en base modale

III – Synthèse modale

III-1- Base modale (suite)

Réponse harmonique

Soit $F_j + f_j = g_j e^{i\omega t}$ alors $q_j = Q_j e^{i\omega t} +$ forme transitoire



Forme analogue à celle d'un oscillateur harmonique : résolution identique pour q_j dans tous les cas :

- réponse forcée
- analyse de Fourier
- intégration, réponse transitoire …

$\omega_j^2 = \dfrac{k_j}{m_j}$	pulsation propre
m_j	masse modale
k_j	raideur modale

III – Synthèse modale

III-2- Synthèse modale – effet de troncature

$Au = -\rho\ddot{u} + f$ et cdts. limites

Calcul des modes propres (ϕ_i, ω_i)

$$u(x,t) = \sum_i q_i(t).\phi_i(x)$$

$$\ddot{q}_i + \omega_j^{\ 2} q_j = F_j + f_j$$

Calcul des q_j

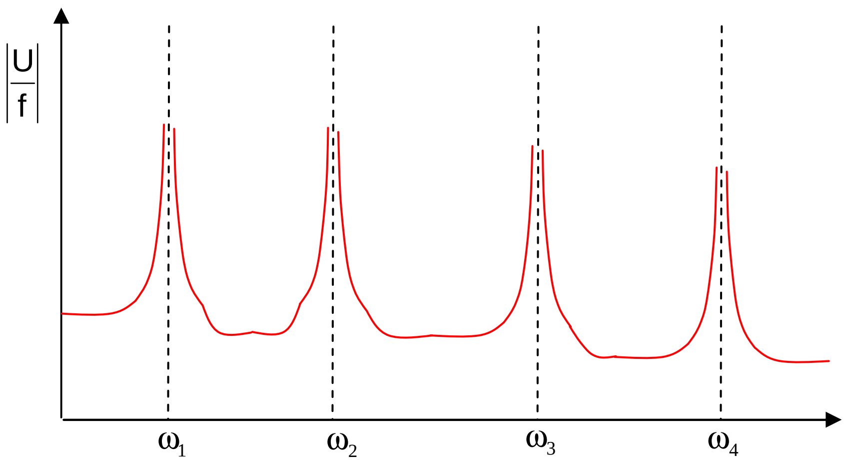
Reconstruction de la solution

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t).\phi_i(x)$$

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} q_i(t).\phi_i(x)$$

troncature à N

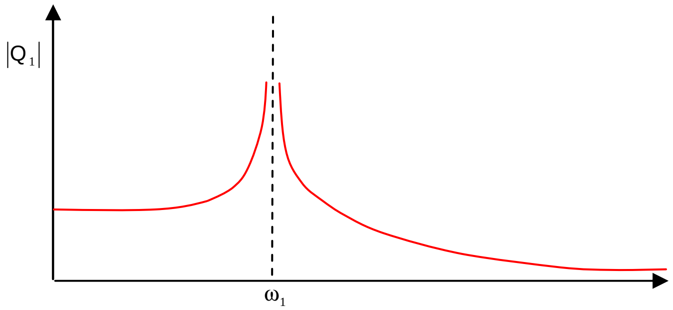
effet de troncature

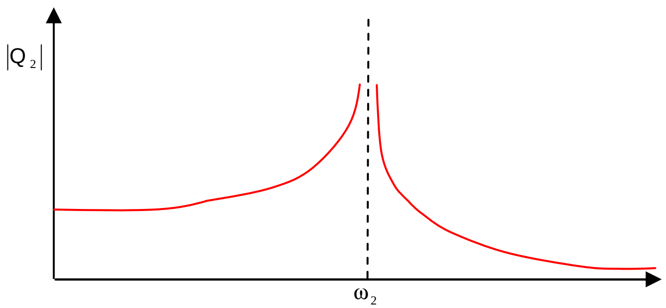


réponse harmonique

III – Synthèse modale

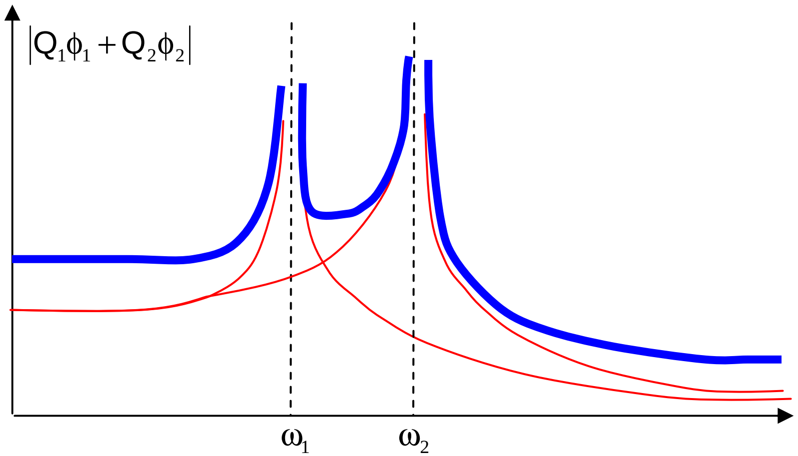
III-2- Synthèse modale – effet de troncature (suite)





$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} q_i(t).\phi_i(x)$$ troncature à N

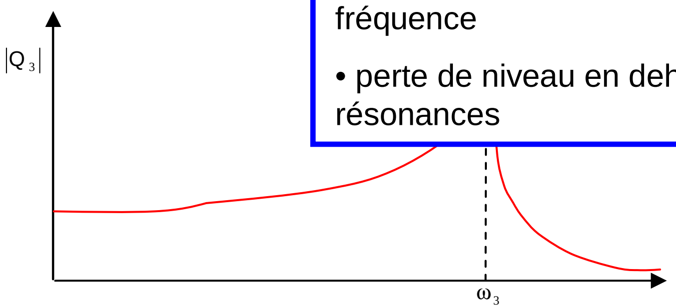
effet de troncature

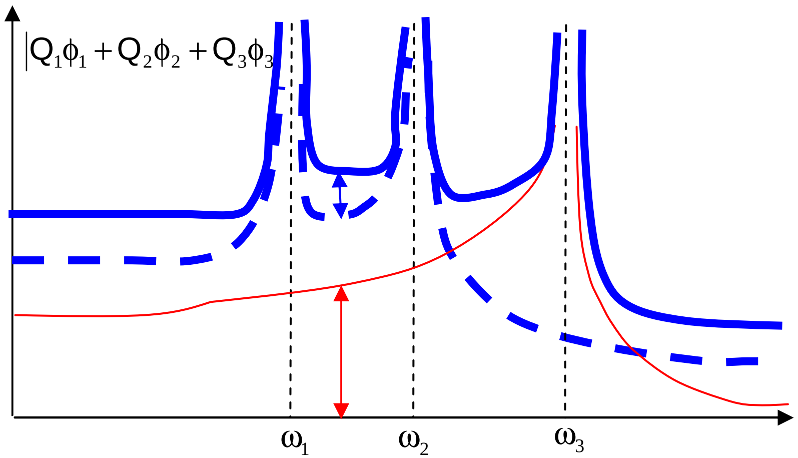


Troncature :

• perte de la réponse à plus haute fréquence

• perte de niveau en dehors des résonances

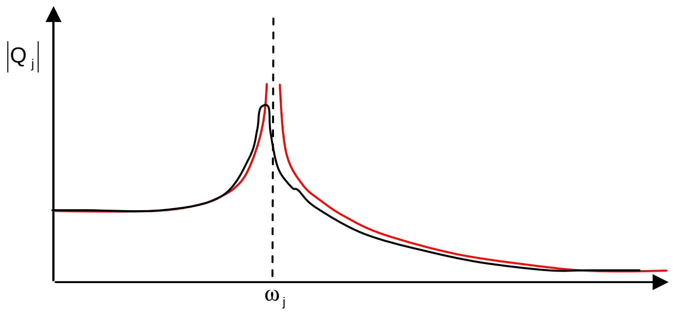




III – Synthèse modale

III-3- Amortissement

Constat : valeur finie de la réponse en résonance, effet de l'amortissement (analogie système 1ddl)



$$\ddot{q}_i + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^{\ 2} q_j = F_j + f_j$$

$$\xi_j = \frac{c_j}{2m_j\omega_j}$$ taux d'amortissement

c_j coefficient d'amortissement

Hypothèse de Basile : chaque équation modale a son propre amortissement; il n'y a pas de couplage.

C'est-à-dire qu'il existe une fonction « potentiel de dissipation » associée à une force visqueuse qui travaille. On suppose alors que l'orthogonalité des modes est préservée

(hyp. de non couplage des modes par les effets de dissipation).

Bilan

Chapitre n+2
Calcul modal des structures

I – Modes de vibrations
II – Propriétés de modes
III- Synthèse modale

Mode propre (ϕ_i, ω_i) solution harmonique libre aux équations homogènes du problème.

$$\boxed{Au = -\rho \ddot{u}} \qquad \boxed{a(u,v) = (\rho u, v) \quad \forall v}$$

Modes propres = base orthogonale de l'espace des solutions

Les modes propres sont orthogonaux suivant le produit scalaire (ρ . , .).

On peut représenter toute solution sous la forme : $u(x,t) = \sum_i q_i(t).\phi_i(x)$

$$\ddot{q}_i + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^{\ 2} q_j = F_j + f_j$$