Objectifs du cours

Cours de calcul des structures
Partie dynamique des structures
Objectifs :

- présenter la structure des équations de la mécanique des structures
- formuler un problème, mettre en équation ce dernier : principes fondamentaux, obtention et écriture des équations
- introduire deux outils essentiels pour analyser, comprendre et maîtriser le comportement dynamique et vibratoire des structures : la synthèse modale, l'analyse par éléments finis et plus généralement la recherche d'une solution approchée.

Discrétisation des structures

Analyse discrète des structures : objectif et principe
Mise en œuvre
Calcul modal sous forme discrète
Introduction des éléments finis

I – Analyse discrète des structures : objectif et principe

I-1- Objectifs

- recherche de solutions approchées (méthode de Rayleigh-Ritz)
- synthèse modale discrète
- introduction aux éléments-finis

I-2- Principe

Définition du problème → formulation forte

→ formulation faible, variationnelle

deux formulations équivalentes

$$Au = f - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

cdts. limites

cdts. initiales

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(u, u', \dot{u})\,dt = 0 \quad \forall \delta u \text{ cinématiquement admissible}$$

u respecte les cdts. limites en déplacement

$\Rightarrow \delta u = 0$ sur $\partial\Omega_u$

I – Analyse discrète des structures : objectif et principe

I-2- Principe (suite)

Recherche d'une forme approchées de la solution aux équations différentielles aux dérivées partielles sous la forme :

$$u \mapsto \bar{u} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\lambda_i(t).\psi_i(\vec{x})}_{\text{solution discrète}}$$

$\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ forme discrète de la solution

$\{\psi_i\}_{i=1,N}$ fonctions de représentation spatiale de la solution cinématiquement admissibles

Les équations et les formulations fortes et faibles du problème peuvent alors être écrites en termes de $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$

Toutefois, la formulation faible est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle : critère d'optimisation intrinsèque de la solution approchée.

$$u \mapsto \bar{u} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(t).\psi_i(\vec{x})$$

$$L(u,\dot{u},\ldots) \mapsto L(\bar{u},\dot{\bar{u}},\ldots) = L(\lambda_i,\dot{\lambda}_i,\ldots) \qquad \underbrace{\delta\int_{t_1}^{t_2} L(\lambda_i,\dot{\lambda}_i,\ldots)dt = 0}_{\text{condition de minimisation}} \quad \forall \delta\lambda_i \qquad \left(\forall \delta\bar{u} = \sum_{i=1}^{N} \delta\lambda_i.\psi_i\right)$$

Trouver les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ revient à trouver un optimum.

Les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ trouvés sont le meilleur compromis, donc la meilleur solution approchée de la solution en décomposition sur la base des $\{\psi_i\}_{i=1,N}$

I – Analyse discrète des structures : objectif et principe

I-2- Principe (suite)

Recherche d'une forme approchées de la solution aux équations différentielles aux dérivées partielles sous la forme :

$$u \mapsto \bar{u} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\lambda_i(t).\psi_i(\vec{x})}_{\text{solution discrète}}$$

$\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ forme discrète de la solution

$\{\psi_i\}_{i=1,N}$ fonctions de représentation spatiale de la solution cinématiquement admissibles

Les équations et les formulations fortes et faibles du problème peuvent alors être écrites en termes de $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$

Toutefois, la formulation faible est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle : critère d'optimisation intrinsèque de la solution approchée.

$$u \mapsto \bar{u} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(t).\psi_i(\vec{x})$$

$$L(u,\dot{u},\ldots) \mapsto L(\bar{u},\dot{\bar{u}},\ldots) = L(\lambda_i,\dot{\lambda}_i,\ldots) \qquad \underbrace{\delta\int_{t_1}^{t_2} L(\lambda_i,\dot{\lambda}_i,\ldots)dt = 0}_{\text{condition de minimisation}} \quad \forall\delta\lambda_i \qquad \left(\forall\delta\bar{u} = \sum_{i=1}^{N} \delta\lambda_i.\psi_i\right)$$

Trouver les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ revient à trouver un optimum.

Remarque : démarche comparable à l'écriture des équations de Lagrange pour $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{L}}{\partial\dot{\lambda}_i} - \frac{\partial\bar{L}}{\partial\lambda_i} = 0$$

II – Mise en oeuvre

Formulation faible du problème discret (écriture discrète du principe de Hamilton)

$$\underbrace{L = E_C - V + W_{ext}}_{\text{Expression nécessaire des grandeurs énergétiques.}} \quad \text{avec} \quad V = V_{int} + V_{ext}$$

Objectif : factorisation de la forme discrète sous forme quadratique ou sous forme linéaire, suivant les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ afin de faciliter le calcul variationnel.

II-1-a- Energie de déformation

Ex. : poutre en traction-compression

$$V_{int} = E_{déformation} = \frac{1}{2}\int_0^L ES\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L ES\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L ES\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i.\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i.\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\int_0^L ES\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial x}dx\,\lambda_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i.a(\psi_i,\psi_j)\lambda_j$$

forme bilinéaire symétrique donc quadratique

$$= \frac{1}{2}{}^T[\lambda_i][a(\psi_i,\psi_j)][\lambda_j]$$

II – Mise en oeuvre

Formulation faible du problème discret (écriture discrète du principe de Hamilton)

$$\underbrace{L = E_C - V + W_{ext}}_{\text{Expression nécessaire des grandeurs énergétiques.}} \quad \text{avec} \quad V = V_{int} + V_{ext}$$

Objectif : factorisation de la forme discrète sous forme quadratique ou sous forme linéaire, suivant les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ afin de faciliter le calcul variationnel.

II-1-b- Généralisation

$V_{int} = E_{déformation}$ est une forme bilinéaire symétrique

$$V_{int} = E_{déformation} = \frac{1}{2}{}^{T}[\lambda_i][K_{ij}][\lambda_j]$$

avec pour terme général de la matrice $\boxed{K_{ij} = a(\psi_i, \psi_j)}$

a(u,v) est obtenue directement à partir du premier membre de l'équation en formulation forte Au=-ρü mis sous forme variationnelle.

II – Mise en oeuvre

Formulation faible du problème discret (écriture discrète du principe de Hamilton)

$$\underbrace{L = E_C - V + W_{ext}}_{} \quad \text{avec} \quad V = V_{int} + V_{ext}$$

Expression nécessaire des grandeurs énergétiques.

Objectif : factorisation de la forme discrète sous forme quadratique ou sous forme linéaire, suivant les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ afin de faciliter le calcul variationnel.

II-2-a- Energie cinétique

Ex. : poutre en traction-compression

$$E_C = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L ES \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L ES \left(\sum_{i=1}^{N} \dot{\lambda}_i . \psi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \dot{\lambda}_i . \psi_i\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \dot{\lambda}_i \int_0^L \rho S \psi_i \psi_j dx \, \dot{\lambda}_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \dot{\lambda}_i (\rho\psi_i, \psi_j) \dot{\lambda}_j \longrightarrow$$

forme bilinéaire symétrique donc quadratique

$$= \frac{1}{2}{}^T\left[\dot{\lambda}_i\right]\left[(\rho\psi_i, \psi_j)\right]\left[\dot{\lambda}_j\right]$$

II – Mise en oeuvre

Formulation faible du problème discret (écriture discrète du principe de Hamilton)

$$\underbrace{L = E_C - V + W_{ext}}_{\text{Expression nécessaire des grandeurs énergétiques.}} \quad \text{avec} \quad V = V_{int} + V_{ext}$$

Objectif : factorisation de la forme discrète sous forme quadratique ou sous forme linéaire, suivant les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ afin de faciliter le calcul variationnel.

II-2-b- Généralisation

E_C est une forme bilinéaire symétrique

$$E_C = \frac{1}{2}{}^T[\dot{\lambda}_i][M_{ij}][\dot{\lambda}_j]$$

avec pour terme général de la matrice $\boxed{M_{ij} = (\rho\psi_i, \psi_j)}$

(ρu,v) est obtenue directement à partir du second membre de l'équation en formulation forte Au=-ρü mis sous forme variationnelle.

II – Mise en oeuvre

Formulation faible du problème discret (écriture discrète du principe de Hamilton)

$$\underbrace{L = E_C - V + W_{ext}}_{\text{Expression nécessaire des grandeurs énergétiques.}} \quad \text{avec} \quad V = V_{int} + V_{ext}$$

Objectif : factorisation de la forme discrète sous forme quadratique ou sous forme linéaire, suivant les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ afin de faciliter le calcul variationnel.

II-3-a- Travail des actions mécaniques extérieures

Actions volumiques = forces qui dérivent d'un potentiel

$$\vec{f} \xrightarrow{\text{travail}} \int_\Omega \vec{f}.\vec{u}\, d\Omega = -V_{ext} \ (\text{ou}\ W_{ext})$$

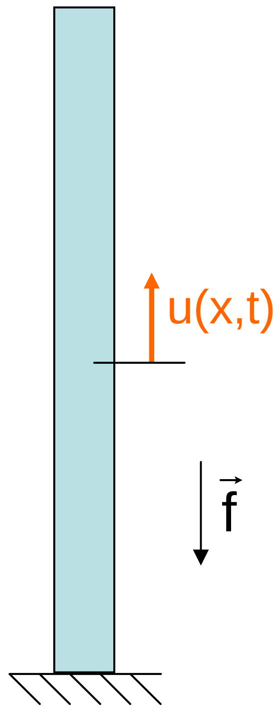
Ex. : poutre en traction-compression, verticale

$$-V_{ext} = \int_0^L Sf.u\,dx = \int_0^L Sf.\sum_{i=1}^N \lambda_i.\psi_i\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^N \lambda_i.\int_0^L Sf\,\psi_i dx$$

forme linéaire

$$= {}^T[f_i][\lambda_i] \qquad \text{avec} \quad f_i = \int_0^L Sf\,\psi_i dx$$



II – Mise en oeuvre

Formulation faible du problème discret (écriture discrète du principe de Hamilton)

$$\underbrace{L = E_C - V + W_{ext}}_{} \quad \text{avec} \quad V = V_{int} + V_{ext}$$

Expression nécessaire des grandeurs énergétiques.

Objectif : factorisation de la forme discrète sous forme quadratique ou sous forme linéaire, suivant les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ afin de faciliter le calcul variationnel.

II-3-a- Travail des actions mécaniques extérieures (suite)

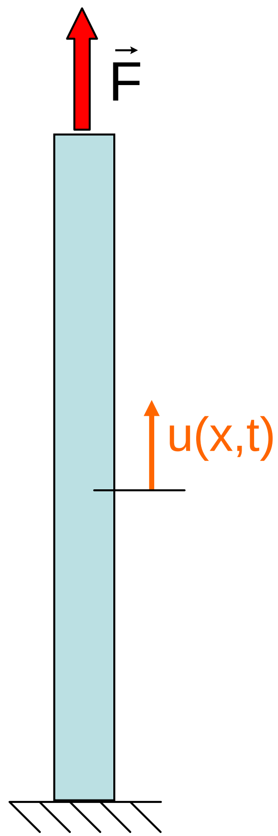
Actions de contact ou de liaison (démarche analogue)

Ex. : poutre en traction sollicitée en x=L

$$\vec{F} \xrightarrow{\text{travail}} \vec{F}.\vec{u}(L) = F.u(L)$$

$$= F.\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(t).\psi_i(L)$$ → forme linéaire

$$= {}^T[F_i][\lambda_i] \quad \text{avec} \quad F_i = F\,\psi_i(L)$$



II – Mise en œuvre

Formulation faible du problème discret (écriture discrète du principe de Hamilton)

$$\underbrace{L = E_C - V + W_{ext}}_{} \quad \text{avec} \quad V = V_{int} + V_{ext}$$

Expression nécessaire des grandeurs énergétiques.

Objectif : factorisation de la forme discrète sous forme quadratique ou sous forme linéaire, suivant les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ afin de faciliter le calcul variationnel.

II-3-a- Travail des actions mécaniques extérieures (fin)

Actions de contact ou de liaison (démarche analogue)

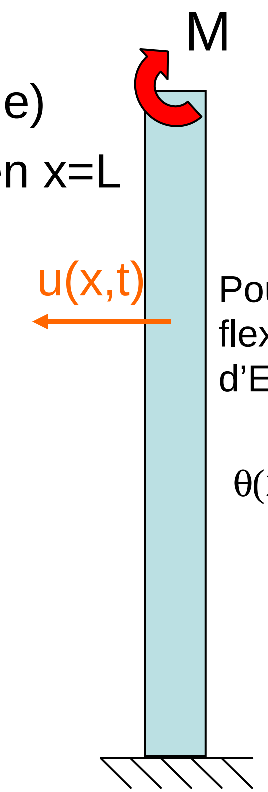
Ex. : poutre en traction sollicitée par un couple appliqué en x=L

$$M \xrightarrow{\text{travail}} M.\theta(L,t) = M.\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}$$

$$= M.\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(t).\left.\frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}$$

forme linéaire

$$= {}^T[M_i][\lambda_i] \quad \text{avec} \quad M_i = M\left.\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right|_{x=L}$$



Poutre en flexion, modèle d'Euler Bernouilli

$$\theta(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

II – Mise en oeuvre

Formulation faible du problème discret (écriture discrète du principe de Hamilton)

$$\underbrace{L = E_C - V + W_{ext}}_{\text{Expression nécessaire des grandeurs énergétiques.}} \quad \text{avec} \quad V = V_{int} + V_{ext}$$

Objectif : factorisation de la forme discrète sous forme quadratique ou sous forme linéaire, suivant les $\{\lambda_i\}_{i=1,N}$ afin de faciliter le calcul variationnel.

II-3-b- Généralisation

$$u \xrightarrow{D} (u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots) = Du$$

D, opérateur différentiel

$$\left.\begin{matrix} \vec{F} \\ M \\ p \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{t}$$

densité d'effort (contrainte) suivant la limite $\partial\Omega_F$

$$W_{ext} = \int_{\partial\Omega_F} \vec{t}.Du \, d\partial\Omega_F = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega_F} \vec{t}.D\psi_i \, d\partial\Omega_F.\lambda_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left. < \vec{t}, D\psi_i > \right|_{\partial\Omega_F} .\lambda_i = {}^T[F_i].[\lambda_i]$$

II – Mise en œuvre

II-4- Application du principe de Hamilton

$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad \forall \delta u$ cinématiquement admissible et telle que $\delta u(t_1) = 0$ et $\delta u(t_2) = 0$

$$\delta E_C = \delta\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\dot{\lambda}_i.(\rho\psi_i,\psi_j)\,\dot{\lambda}_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\dot{\lambda}_i.(\rho\psi_i,\psi_j)\,\delta\dot{\lambda}_j$$

$$= {}^T[\dot{\lambda}_i][M_{ij}][\delta\dot{\lambda}_j]$$

$$\delta V = \delta V_{ext} + \delta V_{int}$$

$$= {}^T[\lambda_i][K_{ij}][\delta\lambda_j] - {}^T[f_i][\delta\lambda_j]$$

$$\delta W_{ext} = {}^T[F_i][\delta\lambda_j]$$

II – Mise en œuvre

II-4- Application du principe de Hamilton (suite)

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} {}^T[\dot{\lambda}_i][M_{ij}][\delta\dot{\lambda}_j] - {}^T[\lambda_i][K_{ij}][\delta\lambda_j] + {}^T[f_i][\delta\lambda_j] + {}^T[F_i][\delta\lambda_j]\,dt$$

$$= \left[{}^T[\dot{\lambda}_i][M_{ij}][\delta\lambda_j]\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left\{{}^T[\ddot{\lambda}_i][M_{ij}] + {}^T[\lambda_i][K_{ij}] - {}^T[f_i] - {}^T[F_i]\right\}}[\delta\lambda_j]\,dt$$

$\forall\delta\lambda_i$ cinématiquement admissible

avec $\delta\lambda_i\big|_{t_1} = 0$ et $\delta\lambda_i\big|_{t_2} = 0$

$$\boxed{[M_{ij}][\ddot{\lambda}_i] + [K_{ij}][\lambda_i] = [f_i] + [F_i]}$$

III – Calcul modal sous forme discrète

III-1- Modes discrets

$$u \longrightarrow \overline{u} \longrightarrow$$

$$\phi_n \longrightarrow [X_i]_n \equiv [\lambda_i]_n$$

$[\lambda_i]$ solution d'un problème du type $[M_{ij}][\ddot{\lambda}_i]+[K_{ij}][\lambda_i]=[f_i]+[F_i]$

$[X_i]_n$ solution d'un problème du type $\left(-\overline{\omega}_n^2[M_{ij}]+[K_{ij}]\right)[X_i]_n=[0]$

III-2- Propriétés : orthogonalité et normalisation

$\det\left([K_{ij}]-\omega^2[M_{ij}]\right)=0$ solution différente de $[X_i]=[0]$

Mais la solution n'est pas unique : elle est définie à un coefficient multiplicatif près.

$${}^T[X_i]_n[M_{ij}][X_j]_m=\delta_{nm}$$

$${}^T[X_i]_n[K_{ij}][X_j]_m=\overline{\omega}_n\overline{\omega}_m\delta_{nm}$$

analogue à

$$(\rho\phi_n,\phi_m)=\delta_{nm}$$

$$a(\phi_n,\phi_m)=\omega_n\omega_m\delta_{nm}$$

III – Calcul modal sous forme discrète

III-3- Synthèse des modes approchés

$$[X_i]_n \longrightarrow \overline{\phi}_n$$

fonction continue, solution approchée du mode propre ϕ_n

$$\overline{\phi}_n = {}^T[X_i][\psi_i(\vec{x})]$$

vecteur des fonctions ψ_i

$$\overline{u} = \sum \lambda_i \psi_i$$

Remarque : $(\rho\overline{\phi}_n, \overline{\phi}_m) = \delta_{nm}$

$$a(\overline{\phi}_n, \overline{\phi}_m) = \overline{\omega}_n \overline{\omega}_m \delta_{nm}$$

$$\lim_{N \to +\infty} (\overline{\omega}_n) = \omega_n$$

$$\lim_{N \to +\infty} (\overline{\phi}_n) = \phi_n$$

$$\lim_{N \to +\infty} a(\overline{\phi}_n - \phi_n, \overline{\phi}_m - \phi_m) = 0$$

III – Calcul modal sous forme discrète

III-4- Base modale

Les vecteurs propres sont une base orthogonale (voire orthonormée) de l'espace des solutions.

Changement de base :

$$[\lambda_i] \longrightarrow [q_i]$$

$$\bar{u} = \sum \lambda_i \psi_i \longrightarrow [\lambda_i] = [[X_i]][q_i] \qquad \lambda = Xq$$

$[[X_i]] \longrightarrow$ matrice de vecteurs propres

Calcul dans la base modale :

$$[M]\ddot{\lambda} + [K]\lambda = [f] + [F]$$

Les indices ont été omis pour alléger l'écriture.

$$[M]X\ddot{q} + [K]Xq = [f] + [F]$$

$${}^{T}X[M]X\ddot{q} + {}^{T}X[K]Xq = {}^{T}X[f] + {}^{T}X[F]$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \vdots \\ \tilde{F}_N \end{bmatrix}$$

III – Calcul modal sous forme discrète

III-4- Base modale (suite)

On obtient alors N équations différentielles du second ordre indépendantes.

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \tilde{f}_i + \tilde{F}_i$$

Les conditions initiales sont obtenues à partir de $u_0 = \sum \lambda_i(0)\psi_i$

$$\dot{u}_0 = \sum \dot{\lambda}_i(0)\psi_i$$

Sachant que $\lambda_0 = \sum X_i q_{i,0}$ alors $q_{i,0} = {}^T X_i [M] \lambda_0$

$$\dot{\lambda}_0 = \sum X_i \dot{q}_{i,0} \qquad \dot{q}_{i,0} = {}^T X_i [M] \dot{\lambda}_0$$

$q_i(t) = A_i \cos(\omega_{d,i} t) + B_i \sin(\omega_{d,i} t)$ + solution particulière

Amortissement : hypothèse de Basile, amortissement modal

$$P_{dissipation} = {}^T \dot{\lambda} C \dot{\lambda} \qquad {}^T XCX = R$$

$$F_{dissipation} = -C\dot{\lambda} \qquad R_{ij} = C_{ij}\delta_{ij}$$

$$\ddot{q} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{matrice diagonale}}}{R}\dot{q} + \Omega^2 q_i = \tilde{f} + \tilde{F}$$