Francais des sciences - PHYSIQUE 2

Grandeurs physiques, unités et analyse dimensionnelle

École Centrale Pékin

Année 1

Table des matières

4 Construire une loi à partir de l'analyse dimensionnelle

4.1 L'analyse dimensionnelle

4.1.1 Définition

L'analyse dimensionnelle est une méthode qualitative (定性的) d'investigation qui consiste à :

- identifier l'ensemble des grandeurs physiques intervenant dans un phénomène ;
- en déduire la dépendance d'une de ces grandeurs en fonction des autres.

Cette analyse ne permet pas de déterminer les **facteurs numériques** que seule une **étude quantitative** (定量的) ou **expérimentale** (实验性的) peut fournir.

4.1.2 Premier exemple : période d'un pendule simple

Soit un pendule simple constitué d'une masse m et d'un fil de longueur l. Le champ de pesanteur est uniforme et de norme g. On observe expérimentalement l'existence de petites oscillations.
Déterminer, par analyse dimensionnelle, la période T des oscillations à un facteur multiplicatif près.

4.1.3 Deuxième exemple : Les grandeurs de Planck

On donne les constantes fondamentales suivantes :

- constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
- vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \times 10^8$ m.s^{-1}
- constante de Planck réduite $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34}$ J.s
- constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}

À partir des constantes $\hbar$, $\mathcal{G}$, c et k_B, construire 3 nouvelles constantes et donner leur valeur :

1. une longueur l_p (longueur de Planck)
2. une masse m_p (masse de Planck)
3. une durée τ_p (durée de Planck)

4.2 Le théorème Π

4.2.1 Énoncé du théorème

Les exemples précédents ne posent aucune difficulté car les équations portant sur les exposants dimensionnels mènent à une unique solution. Lorsque ce n'est pas le cas, le théorème Π peut nous permettre de conclure.

Théorème de Π :

Considérons n grandeurs physiques $G_1, G_2, .., G_N$ qui décrivent le problème et qui sont liées par une unique relation :

$$F(G_1, G_2, .., G_N) = 0$$

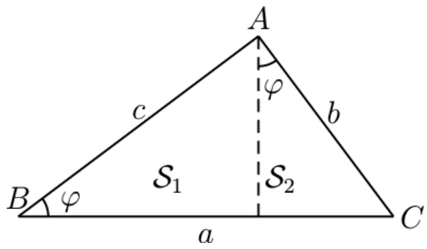
Parmi ces n grandeurs, k dimensions sont présentes.

1. il existe alors $n-k$ grandeurs adimensionnées Π_i où $i \in [1, n-k]$. Chaque grandeur adimensionnée Π_i est un produit de quelques grandeurs parmi $G_1, G_2, .., G_N$
2. il existe une relation $\Phi(\Pi_1, \Pi_2, .., \Pi_{n-k}) = 0$ entre ces grandeurs adimensionnées

4.2.2 Première application : retrouvons le théorème de PYTHAGORE

On se propose de «démontrer» le théorème de Pythagore par analyse dimensionnelle. La figure à droite représente un triangle ABC rectangle en A. Ce triangle est complètement déterminé par la donnée de a et de φ. Sa surface $\mathcal{S}$ est donc uniquement fonction de a et de φ :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(a, \varphi)$$



4.2.3 Seconde application : la troisième loi de Kepler

On se propose de retrouver par analyse dimensionnelle une des trois lois que Kepler a énoncé en 1619 :

> *«le carré de la durée d'une révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube de la longueur du demi-grand axe de l'orbite elliptique de cette planète»*

Les paramètres physiques à considérer sont :

— la masse m de la planète

— la masse m_S du Soleil

— le demi-grand axe a de l'orbite elliptique

— la période de rotation T

— la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$