FRANCAIS DES SCIENCES - PHYSIQUE 2

Grandeurs physiques, unités et analyse dimensionnelle

École Centrale Pékin

Année 1

Table des matières

4 Construire une loi à partir de l'analyse dimensionnelle

4.1 L'analyse dimensionnelle

4.1.1 Définition

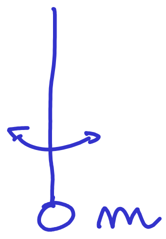
L'analyse dimensionnelle est une méthode qualitative (定性的) d'investigation qui consiste à :

- identifier l'ensemble des grandeurs physiques intervenant dans un phénomène ;
- en déduire la dépendance d'une de ces grandeurs en fonction des autres.

Cette analyse ne permet pas de déterminer les **facteurs numériques** que seule une **étude quantitative** (定量的) ou **expérimentale** (实验性的) peut fournir.

4.1.2 Premier exemple : période d'un pendule simple

Soit un pendule simple constitué d'une masse m et d'un fil de longueur l. Le champ de pesanteur est uniforme et de norme g. On observe expérimentalement l'existence de petites oscillations.
Déterminer, par analyse dimensionnelle, la période T des oscillations à un facteur multiplicatif près.



$[T] = T \quad [l] = L \quad [g] = L.T^{-2}$

$[m] = M$ et $T = m^{\alpha} l^{\beta} g^{\gamma}$

l'équation aux dimensions donne :

$$T = M^{\alpha} L^{\beta} (L.T^{-2})^{\gamma}$$

$$T = M^{\alpha} L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma}$$

Ainsi par identification : $\begin{cases} -2\gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$

On obtient $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$

Donc $\boxed{T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}}$ "Proportionnel"

Le résultat ne dépend pas de la masse

4.1.3 Deuxième exemple : Les grandeurs de Planck

On donne les constantes fondamentales suivantes :

- constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
- vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \times 10^8$ m.s^{-1}
- constante de PLANCK réduite $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34}$ J.s
- constante de BOLTZMANN $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}

À partir des constantes $\hbar$, $\mathcal{G}$, c et k_B, construire 3 nouvelles constantes et donner leur valeur :

1. une longueur l_p (longueur de PLANCK)
2. une masse m_p (masse de PLANCK)
3. une durée τ_p (durée de PLANCK)

$[\mathcal{G}] = L^3 . M^{-1} . T^{-2}$

$[c] = L . T^{-1}$

$[\hbar] = [E] . T = M L^2 . T^{-1}$

$[k_B] = [E] . \theta^{-1} = M L^2 T^{-2} \theta^{-1}$

- $l_p = \mathcal{G}^{\alpha} c^{\beta} \hbar^{\gamma} k_B^{\delta}$

$$L = (L^3 . M^{-1} . T^{-2})^{\alpha} (L . T^{-1})^{\beta} (M . L^2 . T^{-1})^{\gamma} (M . L^2 . T^{-2} \theta^{-1})^{\delta}$$

$$L = L^{3\alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta} M^{-\alpha + \gamma + \delta} T^{-2\alpha - \beta - \gamma - 2\delta} \theta^{-\delta}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta = 1 \\ -\alpha + \gamma + \delta = 0 \\ -2\alpha - \beta - \gamma - 2\delta = 0 \\ -\delta = 0 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \delta = 0 \\ \beta = -3/2 \\ \alpha = 1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{cases}$$

Finalement $\boxed{l_p \propto \sqrt{\dfrac{\mathcal{G} \hbar}{c^3}}}$

De même on montre $\boxed{m_p = \sqrt{\dfrac{\hbar c}{\mathcal{G}}}}$ et $\boxed{T_p = \sqrt{\dfrac{\hbar c^5}{\mathcal{G} k_B^2}}}$

4.2 Le théorème Π

4.2.1 Énoncé du théorème

Les exemples précédents ne posent aucune difficulté car les équations portant sur les exposants dimensionnels mènent à une unique solution. Lorsque ce n'est pas le cas, le théorème Π peut nous permettre de conclure.

Théorème de Π :

Considérons n grandeurs physiques $G_1, G_2, .., G_N$ qui décrivent le problème et qui sont liées par une unique relation :

$$F(G_1, G_2, .., G_N) = 0$$

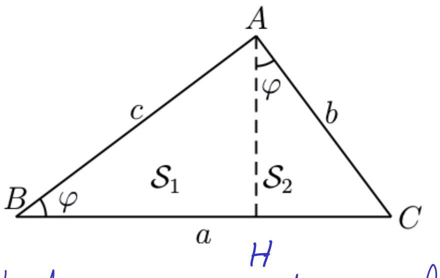
Parmi ces n grandeurs, k dimensions sont présentes.

1. il existe alors $n-k$ grandeurs adimensionnées Π_i où $i \in [1, n-k]$. Chaque grandeur adimensionnée Π_i est un produit de quelques grandeurs parmi $G_1, G_2, .., G_N$
2. il existe une relation $\Phi(\Pi_1, \Pi_2, .., \Pi_{n-k}) = 0$ entre ces grandeurs adimensionnées

4.2.2 Première application : retrouvons le théorème de PYTHAGORE

On se propose de «démontrer» le théorème de Pythagore par analyse dimensionnelle. La figure à droite représente un triangle ABC rectangle en A. Ce triangle est complètement déterminé par la donnée de a et de φ. Sa surface $\mathcal{S}$ est donc uniquement fonction de a et de φ :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(a, \varphi)$$



• Etape 1 : Quels sont les paramètres et dimensions du problème ?

-> Surface S : $[S] = L^2$
-> longueur a : $[a] = L$
-> Angle φ : $[\varphi] = 1$

1 dimension et 3 paramètres

• Etape 2 : Combien de grandeurs adimensionnées sont possibles

=> il y a donc 3 - 1 = 2 grandeurs adimensionnées : φ et $\frac{S}{a^2}$ (ou $\frac{a^2}{S}$)

• Etape 3 : Relation entre les grandeurs adimensionnées

il existe une relation entre ces deux grandeurs : $\boxed{\frac{S}{a^2} = g(\varphi) \text{ ou } S = a^2 g(\varphi)}$

Si on considère les triangles ABH et ACH
on peut écrire aussi $S_1 = c^2 g(\varphi)$ et $S_2 = b^2 g(\varphi)$

• Étape 4 : Relation entre les grandeurs dimensionnées

$S = S_1 + S_2$ donc $a^2 g(\varphi) = b^2 g(\varphi) + c^2 g(\varphi)$

puis $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

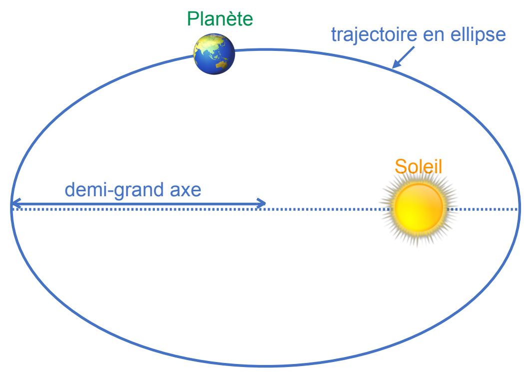
4.2.3 Seconde application : la troisième loi de Kepler

On se propose de retrouver par analyse dimensionnelle une des trois lois que Kepler a énoncé en 1619 :

> *«le carré de la durée d'une révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube de la longueur du demi-grand axe de l'orbite elliptique de cette planète»*

Les paramètres physiques à considérer sont :

- la masse m de la planète
- la masse m_S du Soleil
- le demi-grand axe a de l'orbite elliptique
- la période de rotation T
- la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$



Etape 1 : masse planète $[m] = M$

masse soleil $[m_s] = M$

demi-grand axe $[a] = L$

Période $[T] = T$

Constante de gravitation $[\mathcal{G}] = L^3 M^{-1} T^{-2}$

Etape 2 : 5 paramètres, 3 dimensions

=> 2 grandeurs adimensionnées

$$\boxed{\Pi_1 = \frac{m}{m_s}} \qquad \Pi_2 = a^\alpha m_s^\beta T^\gamma \mathcal{G}^\delta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\delta = 0 \\ \beta - \delta = 0 \\ \gamma - 2\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\delta \\ \beta = \delta \\ \gamma = 2\delta \end{cases}$$

$$\Pi_2 = (a^{-3} m_s T^2 \mathcal{G})^\delta$$

On peut définir $\boxed{\Pi_3 = \Pi_2^{1/\delta} = a^{-3} m_s T^2 \mathcal{G}}$

Etape 3 : $\Pi_3 = f(\Pi_1) \Rightarrow a^{-3} m_s T^2 \mathcal{G} = f\left(\frac{m}{m_s}\right)$

Etape 4 : $T^2 = f\left(\frac{m}{m_s}\right) \frac{a^3}{m_s \mathcal{G}}$ donc $T^2 \propto a^3$

On retrouve la 3ème loi de Kepler $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = cst}$