Chapitre 4 Étudier une fonction

4.1 Les fonctions

Soient deux réels a et b tels que $a \leq b$. Voici des intervalles de $\mathbb{R}$:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ est un intervalle **fermé** ;

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ est un intervalle **ouvert** ;

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ est un intervalle ouvert à gauche et fermé à droite ;

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ est un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite.

Voici encore des intervalles :

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\} \ , \ ]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} | x < b\} \ , \cdots , \ [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\} \text{ et }]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

Soient E et F deux ensembles. Voici **une fonction** \映射\ de E vers F :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Soit f de E dans F qui à x associe f de x

\f是E到F的函数\

E est **l'ensemble de définition de** f\函数f的定义域\, $f(x_0)$ est **l'image** \像或值\ de x_0 et x_0 est **un antécédent** \原像\ de $f(x_0)$.

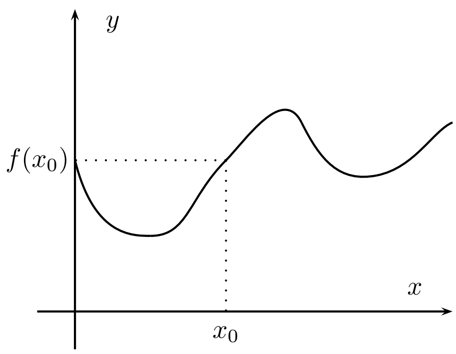


Figure 4.1 – Courbe d'une fonction f.

On lit x_0 sur l'axe des **abscisses** et $f(x_0)$ sur l'axe des **ordonnées**. Une équation de la courbe de f est : $y = f(x)$.

Exemple 1 — *La fonction exponentielle est notée* exp. *Cette fonction est définie sur* $\mathbb{R}$. *L'image de* 0 *est* 1 *et le nombre* e *est l'image de* 1.

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$

Soit g de R dans R plus étoile qui à x associe exponentielle de x

\$g$是从$R$到$R$加星的函数，定义$gx$等于$e$ 的 x 次方\

Définition 2 (opérations sur les fonctions)
Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On peut

— *additionner f et g :*

$$f + g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x). \end{array}$$

— *multiplier f et g :*

$$fg : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)g(x). \end{array}$$

— *multiplier f par un réel λ :*

$$\lambda f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x). \end{array}$$

— *diviser f par g si g ne s'annule pas :*

$$\frac{f}{g} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)}. \end{array}$$

Soient $f : K \to L$ et $g : I \to J$. Si J est inclus dans K ($J \subset K$), alors on peut ***composer*** *f et g, c'est-à-dire définir une nouvelle fonction*

$$f \circ g : \begin{array}{ccc} I & \to L & \\ x & \mapsto & f(g(x)). \end{array}$$

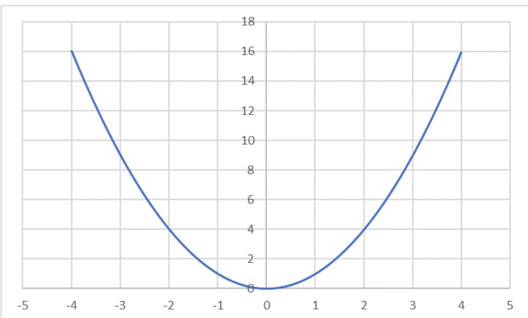
4.2 Les symétries

Définition 3
Soit $E \subset \mathbb{R}$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que :

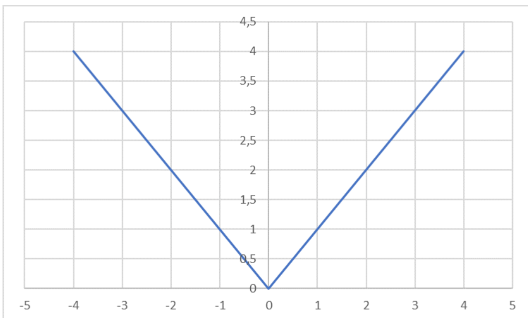
1. *f est une* ***fonction paire*** \偶函数\ *si $\forall x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$;*
2. *f est une* ***fonction impaire*** \奇函数\ *si $\forall x \in E$, $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.*

Si une fonction est paire, alors **l'axe des ordonnées est un axe de symétrie**.

Exemple 4 — *Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ sont paires.*



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

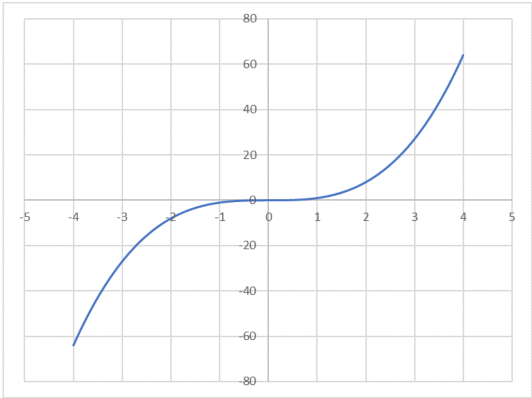


$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

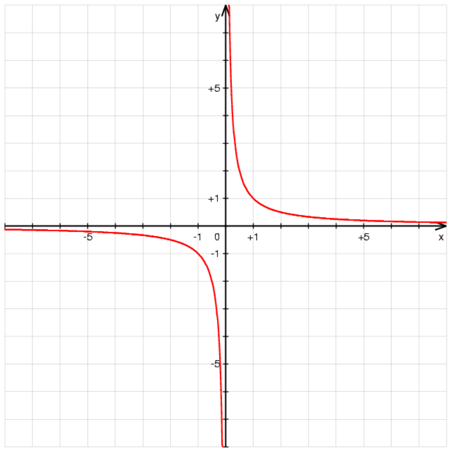
Si une fonction est impaire, alors :

le point (0,0) est un centre de symétrie \点(0,0)是对称中心\ .

EXEMPLE 5 — *Les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ *et* $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ *sont impaires.*



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$

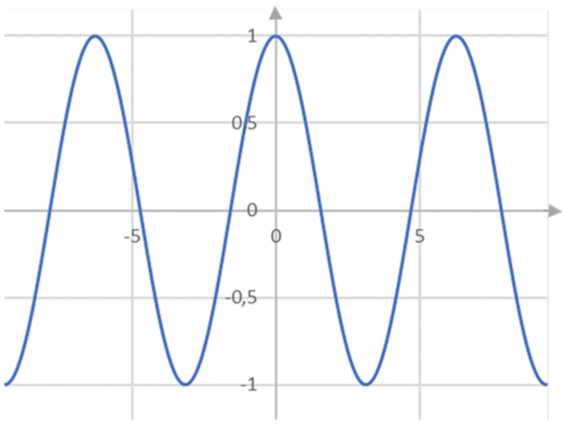


$g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

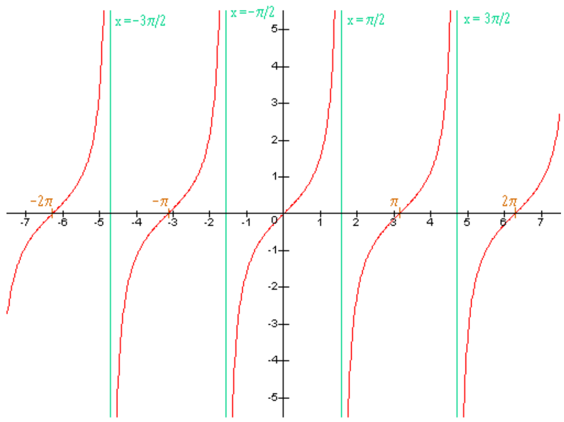
DÉFINITION 6
Soit $E \subset \mathbb{R}$*. Soit* $T \in \mathbb{R}_+^*$*. On dit qu'une fonction* $f : E \to \mathbb{R}$ *est :*

1. T***-périodique*** *si* $\forall x \in E,\ x + T \in E$ *et* $f(x+T) = f(x)$ *;*
2. ***périodique*** *s'il existe* $T > 0$ *tel que* f *est* T*-périodique.*

EXEMPLE 7 — *La fonction* tan *est* $\pi-$*périodique. Les fonctions* cos *et* tan *sont* $2\pi-$*périodiques.*



$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x$



$\tan : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan x$

EXERCICE 8 — *Montrer que la fonction*

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est périodique. Déterminer toutes ses périodes.

PROPOSITION 9
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions* T*-périodiques. Les fonctions* $f+g$*,* fg *et* λf *sont* T*-périodiques.*

4.3 Les limites

Exemple 10 —

$-2x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *moins deux x tend vers moins l'infini quand x tend vers plus l'infini*

\ 当x趋于正无穷大时，负二x趋于负无穷\

$\lim\limits_{+\infty}(\frac{1}{x}) = 0^+$ *limite de un sur x en plus l'infini égale zéro plus*

\$x$分之一在正无穷大处从零的右侧趋于零\

L'ensemble des limites est $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Proposition 11 **(opérations sur les limites)**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

1. *$(f+g)(x)$ tend vers $\ell + \ell'$ quand x tend vers a ;*
2. *$(\lambda f)(x)$ tend vers $\lambda\ell$ quand x tend vers a ;*
3. *$(fg)(x)$ tend vers $\ell\ell'$ quand x tend vers a ;*
4. *Si $\ell' \neq 0$, alors $\frac{f}{g}(x)$ tend vers ℓ/ℓ' quand x tend vers a.*

Certaines limites sont des **formes indéterminées** : $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, ∞^0, 1^∞.

Exemple 12 — $\lim\limits_{0}(\frac{sin(x)}{x}) = 1$ *la limite de sinus x sur x en zéro égale un*

\ sin x除以x在零处的极限是一\

Voici d'autres formes indéterminées :

$$\frac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x \cdot \ln(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0 \qquad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e.$$

Voici encore des limites (elles ne sont pas des formes indéterminées) :

$$\frac{sin(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

Exercice 13 — 1. *Étudier la limite en $+\infty$ et en 0 de $\dfrac{x + 2x^2 + 3x^3}{3x + 2x^2 + x^3}$.*

2. *Étudier la limite en $+\infty$ de $x^3 - 2x + x + 5$, de $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et de $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.*

4.4 La continuité

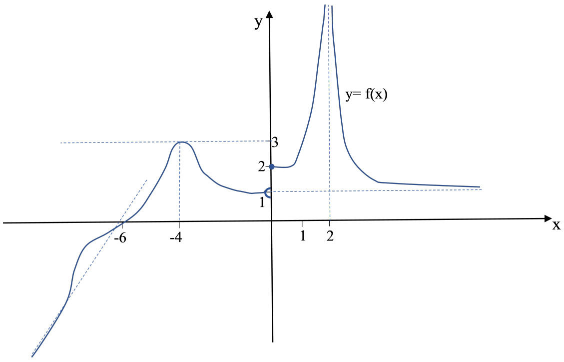
Définition 14
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que :

1. *f **est continue en** a si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ *limite de f de x quand x tend vers a égale f de a*

   \ f在a处连续：当x趋近于a时，$f(x)$趋近于$f(a)$\
2. *f **est continue** si f est continue en a pour tout $a \in I$.*

Exemple 15 —

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$ sont continues.*
2.



f n'est pas continue en zéro : limite de f en zéro plus égale deux et limite de f en zéro moins égale un
\f在零处不连续：f在零处的右极限等于二\
\f在零处的左极限等于一\

Proposition 16 (continuité et opérations)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f+g$, fg et λf sont continues en x_0.

Exemple 17 — *Soient n un entier et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La fonction*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \end{array}$$

*est un **polynôme*** \多项式\. *Elle est continue.*

4.5 La dérivée

Définition 18
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Si

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} b,\ b \in \mathbb{R}$ *f de x moins f de a sur, x moins a tend vers b un réel quand x tend vers a*
\f在a处可微：f(x)减f(a)除以x减a无限趋近于实数b\

*alors f **est dérivable** en a et **la dérivée de** f en a est $f'(a) = b$* *f prime de a égal b*
\f在a处可微：f a 一撇等于b\

On dit aussi : $f'(a) = \dfrac{df}{dx}(a)$ f prime de a égale d f sur d x en a
\ f a撇等于在a点处 df 除以dx\

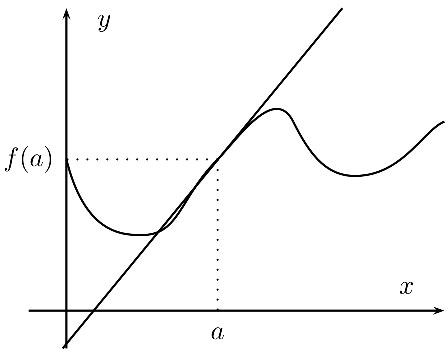


FIGURE 4.2 – Une droite tangente

L'équation de la courbe est $y = f(x)$. L'équation de **la droite tangente** au point $(a, f(a))$ est :

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

f	f'
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \exp(x)$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto 1/x$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$

PROPOSITION 19 (dérivée et opérations)

$(f+g)' = f' + g'$ *f plus g prime égale f prime plus g prime*
\f加g撇等f撇加g撇\

$(fg)' = f'g + fg'$ *f g prime égale f prime g plus f g prime*
\fg撇等于f撇g加fg撇\

$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ *f sur g prime égale f prime g moins f g prime sur g carré*
\f除以g的导数等于f撇g减fg撇除以g的平方\

$(fog)'(x) = g'(x)(f'og)(x)$ *f rond g prime de x égale g prime de x fois f prime rond g de x*
\f复合g关于x的导数等于g撇x乘以f撇gx\

4.6 VARIATIONS

DÉFINITION 20
Soit $E \subset \mathbb{R}$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

1. ***croissante** si*

   $\forall (x,y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ *pour tout x y appartenant à E deux si x est strictement inférieur à y alors f de x est inférieur ou égale à f de y*
   \若对于任意的 x y属于E二，x严格小于y蕴含f(x)\
   \小于等于f(y), 则函数是递增的\

2. ***décroissante** si*

   $$\forall (x,y) \in E^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y).$$

3. ***strictement croissante** si*

   $$\forall (x,y) \in E^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

4. ***strictement décroissante*** *si*

$$\forall (x,y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

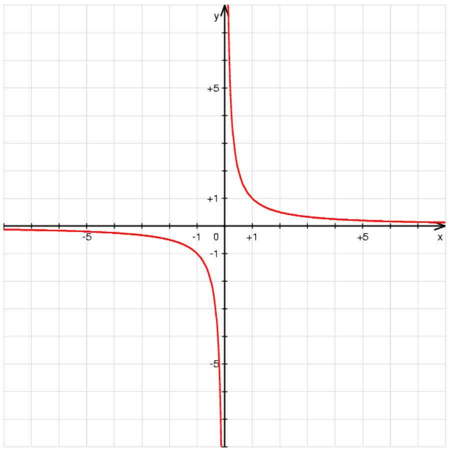
pour tout x y appartenant à E deux, si x est strictement inférieur à y alors f de x est strictement supérieur à f de y

\若对于任意的 x y属于E二，\
\$x$严格小于$y$蕴含$f(x)$严格大于$f(y)$，\
\则函数是严格递减的 \

PROPOSITION 21
Soit I un <u>*intervalle*</u>*. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si la dérivée de f est positive (resp. négative, resp. strictement positive, resp. strictement négative), alors la fonction f est croissante (resp. décroissante, resp. strictement croissante, resp. strictement décroissante).*

REMARQUE 22 — *La propriété n'est pas toujours vraie si I n'est pas un intervalle.*

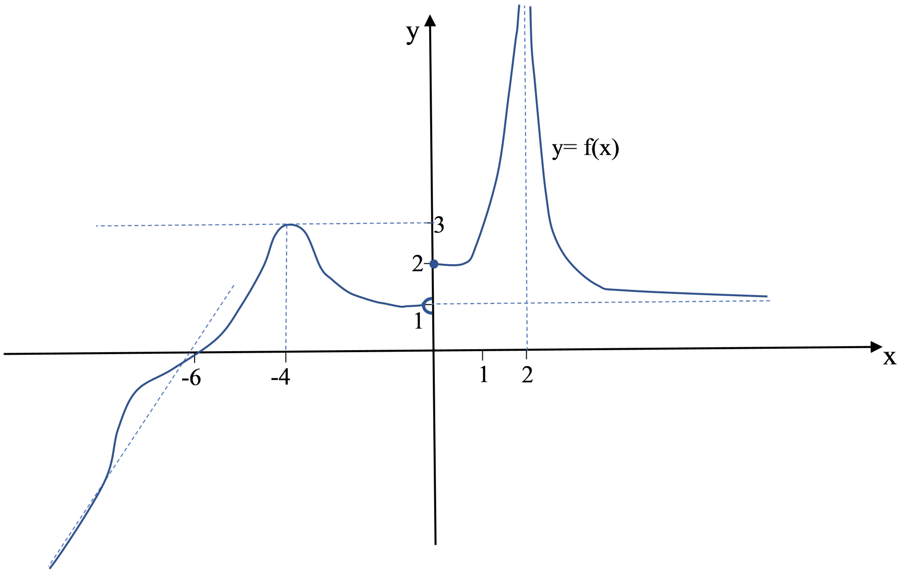
La fonction $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable. Sa dérivée $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ est négative. Mais la fonction n'est pas décroissante. Voici sa courbe et son ***tableau de variations****.*



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0^-	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0^+

DÉFINITION 23
Soit $E \subset \mathbb{R}$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

1. *M est* ***<u>un</u> majorant*** \上界\ *de f si $\forall x \in E,\ f(x) \leq M$.*
2. *f est* ***majorée*** *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) \leq M$.*
3. *m est* ***<u>un</u> minorant*** \下界\ *de f si $\forall x \in E,\ f(x) \geq m$.*
4. *f est* ***minorée*** *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E,\ f(x) \geq m$.*
5. *M est* ***<u>le</u> maximum*** \最大值\ *de f si M est un majorant de f et $\exists a \in E,\ f(a) = M$.*
6. *m est* ***<u>le</u> minimum*** \最小值\ *de f si m est un minorant de f et $\exists a \in E,\ f(a) = m$.*



EXERCICE 24 —

Dresser le tableau des variations de la fonction f. Décrire la fonction.