

TRAVAUX DIRIGÉS SUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

Introduction

L'évolution dans le temps de nombreux systèmes de la vie courante, qu'ils soient mécaniques ou autres, peut être modélisée par un système d'équations différentielles. L'intégration de ces équations du mouvement est un problème classique auquel l'ingénieur est couramment confronté. En effet, la résolution exacte de ces équations n'est pratiquement jamais possible de par la complexité des équations à résoudre : généralement des équations différentielles non linéaires à coefficients non constants. Pour connaître l'évolution dans le temps des systèmes considérés, il est donc souvent nécessaire de mettre en place des schémas d'intégration temporelle afin d'obtenir une solution numérique. L'objectif du travail que vous allez effectuer au cours de ces séances est de mettre en évidence certaines difficultés liées à l'intégration numérique dans le domaine temporel.

- La première partie de ce travail concerne la résolution dans le temps d'équations régissant les mouvements d'oscillateurs linéaires à un ou plusieurs degrés de liberté, avec ou sans amortissement. Dans le cas d'un oscillateur à un degré de liberté, cette équation du mouvement est aussi celle d'un pendule simple dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements. L'équation du mouvement à résoudre est une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants dont la solution exacte est connue. Cette solution exacte sera comparée aux solutions obtenues à l'aide de quatre schémas d'intégration différents : schéma d'EULER explicite, schéma d'EULER implicite, schéma de RUNGE-KUTTA et schémas de NEWMARK.
- La deuxième partie de ce travail porte sur la résolution numérique d'équations régissant les mouvements d'oscillateurs non linéaires. Les équations du mouvement sont donc des équations différentielles du second ordre non linéaires qui sont résolues à l'aide de deux méthodes différentes : la première consiste à transformer l'équation du mouvement en une équation du premier ordre et à utiliser un schéma d'intégration adapté aux systèmes du premier ordre, le schéma de RUNGE-KUTTA ; la seconde méthode consiste à résoudre directement l'équation du mouvement à l'aide d'un schéma d'intégration de NEWMARK, schéma plus adapté au système différentiel du second ordre. Pour les deux méthodes, on envisagera un paramétrage cinématiquement admissible et un paramétrage non cinématiquement admissible qui nécessite la prise en compte d'une équation de liaison.

L'ensemble de ce travail sera réalisé avec l'un des deux logiciels MATLAB ou SCILAB.

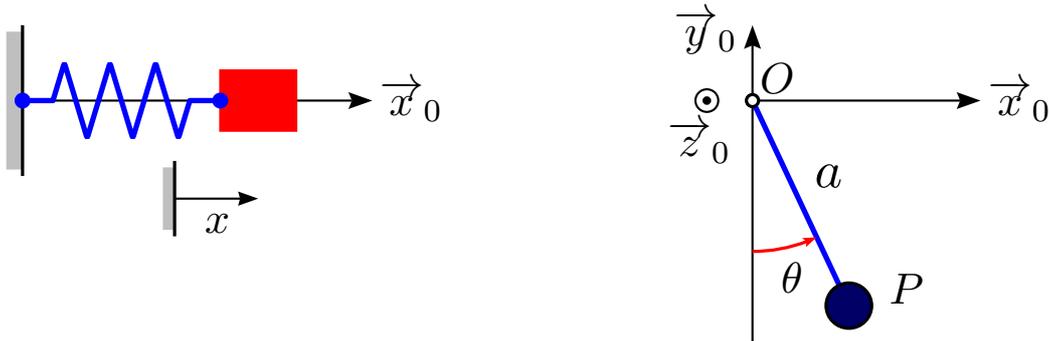
Oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté

Rappels et notations

L'oscillateur conservatif linéaire à un degré de liberté, caractérisé par l'équation

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1)$$

permet de représenter les mouvements d'une masse en translation soumise à l'action d'un ressort de rappel linéaire ou ceux d'un pendule simple dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements.



Pour la masse en translation, si on note m la valeur de la masse, k la raideur du ressort linéaire de rappel et x la position de la masse (x étant nul lorsque le ressort est non contraint), on obtient :

$$E_c(m / \mathcal{R}_0) = \frac{m \dot{x}^2}{2}$$

$$E_p(m / \mathcal{R}_0) = \frac{k x^2}{2} + \text{Cte}$$

En absence de forces extérieures, toutes les liaisons étant parfaites, l'équation régissant les mouvements de la masse m s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \implies \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

En posant

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

l'équation du mouvement précédente peut être mise sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Pour le pendule simple soumis à l'action de la pesanteur, si θ définit la position du pendule, on a :

$$E_c(m / \mathcal{R}_0) = \frac{m a^2 \dot{\theta}^2}{2}$$

$$E_p(m / \mathcal{R}_0) = -m g a \cos \theta + \text{Cte}$$

Le paramétrage étant cinématiquement admissible et les liaisons parfaites, en absence de forces extérieures supplémentaires, le travail virtuel des efforts ne dérivant pas d'un potentiel est nul. On en déduit l'équation du mouvement suivante :

$$m a^2 \ddot{\theta} + m g a \sin \theta = 0 \quad \implies \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin \theta = 0$$

En posant

$$\omega_0^2 = \frac{g}{a}$$

on obtient l'équation régissant les mouvements d'un pendule simple :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (2)$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements, on cherche un développement limité au premier ordre de la solution de l'équation (2) en faisant l'hypothèse que θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ sont des infiniment petits d'ordre 1. Sous ces hypothèses, l'équation du mouvement (2) devient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

On notera E^* la quantité définie par la relation (3)

$$E^* = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) \quad (3)$$

E^* est proportionnelle à l'énergie mécanique de l'oscillateur.

∴

On cherche à déterminer une solution numérique de l'équation (1) sur l'intervalle $[0, T_0]$. On note q_0 et \dot{q}_0 les valeurs initiales de q et \dot{q} à l'instant initial. Pour les applications numériques, on prendra

$$\omega_0 = 2\pi \text{ rad.s}^{-1} \quad q_0 = 1 \quad \dot{q}_0 = 0 \quad T_0 = 3 \text{ s} \quad (4)$$

Notations : Dans toute cette étude, on notera q_j , \dot{q}_j , \ddot{q}_j les valeurs de q , \dot{q} , \ddot{q} à l'instant $t_j = j \Delta t$.

1. Solution analytique de l'équation (1)

1.1 Déterminez la solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions initiales (4) et programmez cette solution. Cette solution servira de référence pour comparer les solutions obtenues à l'aide des différents schémas d'intégration.

1.2 Calculez numériquement la quantité E^* associée à cette solution exacte. Que trouve-t-on ?

2. Résolution de l'équation (1) avec un schéma d'EULER explicite

Pour un schéma d'EULER explicite, les quantités q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} sont liées aux quantités q_j , \dot{q}_j , \ddot{q}_j par la relation (5) :

$$\begin{cases} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{cases} = \begin{cases} q_j \\ \dot{q}_j \end{cases} + \Delta t \times \begin{cases} \ddot{q}_j \end{cases} \quad (5)$$

2.1 Montrez qu'en tenant compte des relations (1) et (5), le schéma d'EULER explicite conduit à la relation (6) entre les quantités q_j , \dot{q}_j , q_{j+1} et \dot{q}_{j+1} :

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\omega_0^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} \quad (6)$$

La matrice intervenant dans cette relation (6) s'appelle la matrice d'amplification. Cette matrice d'amplification est essentielle dès lors qu'on s'intéresse à la stabilité du schéma d'intégration et à la manière dont se propagent les erreurs numériques.

2.2 Programmez la résolution de l'équation (1) à l'aide d'un schéma d'EULER explicite. On remarquera que deux méthodes sont possibles.

a) Méthode 1 :

La programmation directe des trois relations suivantes qui permettent de déduire les valeurs de q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} à partir de celles de q_j , \dot{q}_j , \ddot{q}_j

$$\begin{aligned} q_{j+1} &= q_j + \Delta t \times \dot{q}_j \\ \dot{q}_{j+1} &= \dot{q}_j + \Delta t \times \ddot{q}_j \\ \ddot{q}_{j+1} &= -\omega_0^2 q_{j+1} \end{aligned}$$

b) Méthode 2 :

En appelant U_j le vecteur d'état de l'oscillateur à l'instant t_j avec

$$U_j = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix}$$

on obtient

$$U_{j+1} = [A] U_j$$

où $[A]$ est la matrice d'amplification définie par la relation (6), ce qui permet de définir une relation de récurrence simple entre les valeurs du vecteur d'état aux instants t_j et t_{j+1} .

2.3 On résoud l'équation du mouvement sur l'intervalle $[0, T_0]$. En testant différents pas de temps, mettez en évidence que la solution numérique obtenue avec ce schéma d'intégration est divergente. On remarquera cependant que plus le pas de temps Δt est petit, plus la divergence est lente.

2.4 Calculez la quantité E^* associée au schéma d'EULER explicite et comparez les valeurs obtenues avec celles calculées à partir de la solution exacte. Que met-on en évidence ? Comment évolue ce résultat lorsqu'on fait varier Δt ?

2.5 En déterminant numériquement les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps Δt , mettez en évidence le caractère inconditionnellement instable du schéma d'EULER explicite.

3. Résolution de l'équation (1) avec un schéma d'EULER implicite

Pour un schéma d'EULER implicite, les quantités q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} sont liées aux quantités q_j , \dot{q}_j , \ddot{q}_j par la relation (7) :

$$\begin{pmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{pmatrix} + \Delta t \times \begin{pmatrix} \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

3.1 Programmez la résolution de l'équation (1) à l'aide d'un schéma d'EULER implicite. Comme dans le cas de la résolution avec un schéma d'EULER explicite, on remarque que deux

méthodes sont possibles.

soit en utilisant les trois relations suivantes

$$\begin{aligned} q_{j+1} &= q_j + \Delta t \times [\dot{q}_j + \Delta t \times q_{j+1} (-\omega_0^2)] \\ \ddot{q}_{j+1} &= -\omega_0^2 q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} &= \dot{q}_j + \Delta t \times \ddot{q}_{j+1} \end{aligned}$$

soit en utilisant la matrice d'amplification associée au schéma d'EULER implicite qui permet d'écrire une relation de récurrence entre les valeurs du vecteur d'état aux instants t_j et t_{j+1} .

- 3.2 Comparez les valeurs de q fournies par les trois solutions (solution exacte, EULER explicite et EULER implicite) sur l'intervalle $[0s, T_0]$. On prendra comme pas de temps

$$\Delta t = 0.01s$$

- 3.3 En testant différents pas de temps, mettez en évidence que le schéma d'intégration d'EULER implicite introduit un amortissement numérique. On pourra remarquer cependant que plus le pas de temps Δt est petit, plus l'atténuation des oscillations est faible.

- 3.4 Calculez la quantité E^* associée au schéma d'EULER implicite et comparez les valeurs obtenues avec celles calculées précédemment à l'aide de la solution exacte et d'un schéma d'EULER explicite. Que met-on en évidence ? Comment évolue ce résultat lorsqu'on fait varier Δt ?

- 3.5 En déterminant numériquement les valeurs propres de la matrice d'amplification en fonction du pas de temps Δt , mettez en évidence le caractère inconditionnellement stable du schéma d'EULER implicite.

4. Résolution de l'équation (1) avec un schéma de RUNGE KUTTA

Les schémas de RUNGE KUTTA sont des schémas du premier ordre dont l'utilisation est générale. En tant que schéma du premier ordre, ils permettent donc de résoudre une équation différentielle de la forme (8) :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t) \quad (8)$$

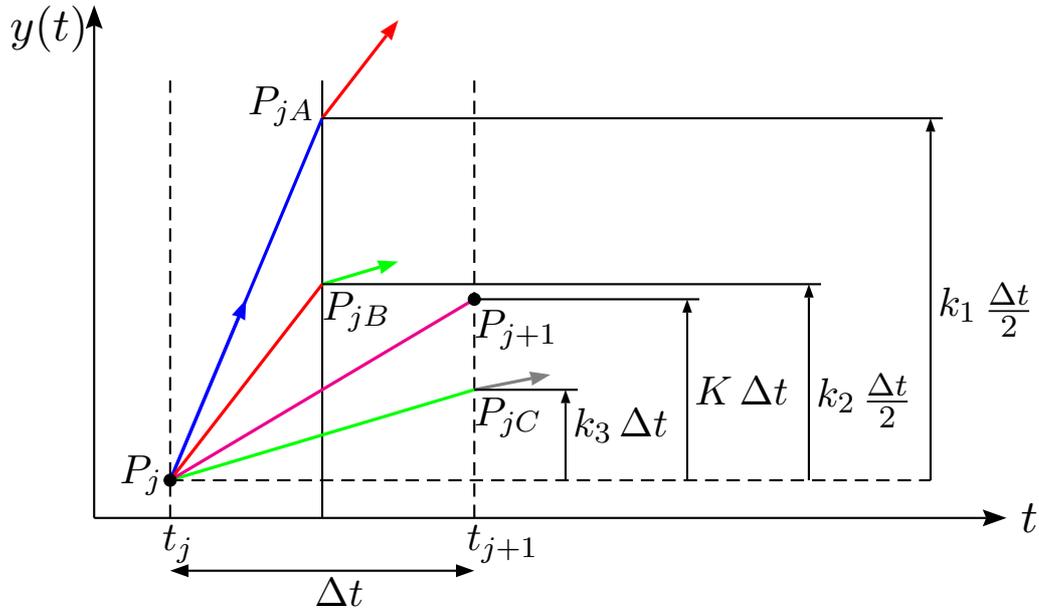
Avec un schéma de RUNGE KUTTA d'ordre 4-5, si y_j est la valeur de la fonction $y(t)$ à l'instant t_j , la valeur y_{j+1} de la fonction $y(t)$ à l'instant t_{j+1} s'obtient en faisant

$$y_{j+1} = y_j + K \Delta t \quad (9)$$

$$\text{avec } K = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad (10)$$

k_1 , k_2 , k_3 et k_4 , les valeurs de la fonction $f(y(t), t)$ aux points P_j , P_{jA} , P_{jB} et P_{jC} , s'obtiennent en faisant

$$\left\{ \begin{aligned} k_1 &= f(y_j, t_j) \\ k_2 &= f\left(y_j + k_1 \frac{\Delta t}{2}, t_j + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(y_j + k_2 \frac{\Delta t}{2}, t_j + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_4 &= f(y_j + k_3 \Delta t, t_j + \Delta t) \end{aligned} \right. \quad (11)$$



- 4.1 Transformez l'équation du mouvement (1) afin d'obtenir une formulation adaptée aux schémas du premier ordre.
- 4.2 Programmez la résolution de l'équation du mouvement que vous avez obtenue à la question 4.1 à l'aide d'un schéma de RUNGE KUTTA.
- 4.3 Comparez les valeurs de la solution $q(t)$ obtenues avec un schéma de RUNGE KUTTA avec celles calculées précédemment (solution exacte, schéma d'EULER explicite et schéma d'EULER implicite). Que peut-on conclure ? On prendra

$$\Delta t = 0.01s$$

- 4.4 Calculez la quantité E^* associée au schéma de RUNGE KUTTA et comparez les valeurs obtenues avec celles calculées à l'aide de la solution exacte, d'un schéma d'EULER explicite et d'un schéma d'EULER implicite. Quelles conclusions pouvez-vous tirer de l'utilisation de ce schéma ? On prendra également

$$\Delta t = 0.01s$$

5. Résolution de l'équation (1) avec un schéma de NEWMARK

Les schémas de NEWMARK sont des schémas d'intégration adaptés aux équations différentielles du second ordre. Pour ces schémas d'intégration, les quantités q_{j+1} \dot{q}_{j+1} \ddot{q}_{j+1} sont reliées aux quantités q_j \dot{q}_j \ddot{q}_j par les deux relations suivantes :

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + (0.5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{q}_j + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{j+1} \quad (12)$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_j + \gamma \Delta t \ddot{q}_{j+1} \quad (13)$$

où β et γ sont deux constantes positives. Les relations (12) et (13) définissent donc une famille de schémas d'intégration caractérisée par ces deux constantes. Le cas $\gamma = 0.5$ $\beta = 0.25$ correspond à la méthode des trapèzes, le cas $\gamma = 0.5$ $\beta = 0$ correspond au schéma des différences finies centrées.

Pour évaluer numériquement la solution de l'équation (1) à l'aide d'un schéma de NEWMARK, on peut déduire les valeurs de q_{j+1} \dot{q}_{j+1} \ddot{q}_{j+1} de celles de q_j \dot{q}_j \ddot{q}_j à l'aide des relations (14) , (15) et de la relation (13) :

$$(1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2) q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + (0.5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{q}_j \quad (14)$$

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1} \quad (15)$$

En utilisant l'équation (1) aux instants t_j et t_{j+1} , on peut également écrire

$$\begin{bmatrix} 1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 & 0 \\ \gamma \Delta t \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (0.5 - \beta) \Delta t^2 \omega_0^2 & \Delta t \\ -(1 - \gamma) \Delta t \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} \quad (16)$$

relation qui peut se mettre sous la forme

$$[B] \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} \quad (17)$$

avec

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 & 0 \\ \gamma \Delta t \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 - (0.5 - \beta) \Delta t^2 \omega_0^2 & \Delta t \\ -(1 - \gamma) \Delta t \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Ces deux dernières relations montrent que de façon très générale, pour les schémas de NEWMARK, on peut relier les vecteurs d'état pris aux instants t_j et t_{j+1} par une relation de récurrence de la forme

$$\begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

la matrice d'amplification $[A]$ étant donné par

$$[A] = [B]^{-1} \times [C] \quad (19)$$

Les matrices $[B]$ et $[C]$ qui interviennent dans cette dernière relation (19) sont celles définies par la relation (18).

5.1 *Résolution avec un schéma de NEWMARK* $\gamma = 0.5$ $\beta = 0.25$

5.1.1 Programmez la résolution de l'équation (1) avec un schéma de NEWMARK dans le cas où $\gamma = 0.5$ $\beta = 0.25$. On pourra utiliser les trois relations (13), (14) et (15) ou bien utiliser la relation de récurrence entre les valeurs du vecteurs d'état aux instants t_j et t_{j+1} et faire intervenir la matrice d'amplification.

5.1.2 Comparez les cinq solutions (solution exacte, EULER explicite, EULER implicite, RUNGE KUTTA et NEWMARK $\gamma = 0.5$ $\beta = 0.25$) sur l'intervalle de temps $[0, T_0]$. On prendra :

$$\Delta t = 0.01s$$

5.1.3 Comparez les valeurs de E^* pour les cinq méthodes (même pas de temps Δt que pour la question précédente). Que concluez-vous ?

5.1.4 Calculez les valeurs propres de la matrice d'amplification pour des valeurs de Δt comprises entre 0s et 1s. Qu'en concluez-vous ?

5.2 *Résolution avec un schéma de NEWMARK* $\gamma = 0.5$ $\beta = 0$

5.2.1 Programmez la résolution de l'équation (1) avec un schéma de NEWMARK dans le cas où $\gamma = 0.5$ $\beta = 0$. On pourra remarquer que dans ce cas, les trois relations (13), (14) et (15) deviennent

$$\begin{aligned} q_{j+1} &= q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j \\ \ddot{q}_{j+1} &= -\omega_0^2 q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} &= \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_j + \ddot{q}_{j+1}) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une formulation explicite de ce schéma d'intégration couramment utilisée dans les logiciels de calculs en Dynamique des Structures.

5.2.2 Comparez la solution obtenue avec le schéma de NEWMARK $\gamma = 0.5$ $\beta = 0$ avec les cinq solutions obtenues précédemment. On prendra :

$$\Delta t = 0.01s$$

Que pouvez-vous conclure ?

5.2.3 Comparez les trois solutions (solution exacte - NEWMARK $\gamma = 0.5$ $\beta = 0.25$ et NEWMARK $\gamma = 0.5$ $\beta = 0$) pour les valeurs suivantes du pas de temps :

$$\Delta t = 0.2s \quad \Delta t = 0.5s$$

Qu'en concluez-vous ?

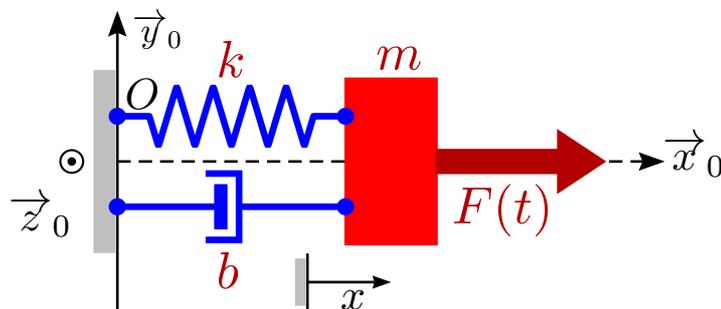
5.2.4 Déterminez numériquement le pas de temps critique associé au schéma de NEWMARK $\gamma = 0.5$ $\beta = 0$. Ce pas de temps critique pourra être obtenu soit par dichotomie, soit en faisant une étude des valeurs propres de la matrice d'amplification associée à ce schéma d'intégration. Le pas de temps critique sera exprimé sous la forme

$$\Delta t = \alpha \times \frac{2}{\omega_0}$$

où α sera un coefficient à déterminer.

Etude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté

On considère l'oscillateur amorti défini par la figure ci-dessous.



De manière classique, cet oscillateur est caractérisé par un ressort linéaire de raideur k , un amortisseur visqueux de coefficient caractéristique b et une masse m pouvant se déplacer selon la direction \vec{x}_0 . Le déplacement de la masse m est repéré par la variable x . Pour $x = 0$, le ressort est non contraint.

Avec ces hypothèses, les mouvements de la masse m sont régis par l'équation :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) \quad (20)$$

On rappelle que l'équation (20) peut être mise sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F(t)}{m} \quad (21)$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad b = 2\varepsilon\omega_0 m$$

Dans le cas où $F(t) = 0$, lorsque $0 < \varepsilon < 1$, la solution de l'équation (21) s'écrit :

$$x(t) = e^{-\varepsilon\omega_0 t} \left(x_0 \cos \Omega t + \frac{\varepsilon\omega_0 x_0 + \dot{x}_0}{\Omega} \sin \Omega t \right) \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (22)$$

où

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Applications numériques : on prendra

$$T_0 = 1 \text{ s} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\varepsilon = 0.02 \quad \text{avec} \quad b = 2\varepsilon\omega_0 m$$

$$\text{pour les conditions initiales} \quad x_0 = 0.01 \text{ m} \quad \dot{x}_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$$

On cherche à déterminer numériquement aux instants $t_n = (n-1)\Delta t$ la solution de l'équation du mouvement (21).

Δt représente le pas de temps utilisé pour évaluer la solution de l'équation (21), c'est-à-dire l'intervalle de temps entre deux instants consécutifs t_n et t_{n+1} pour lesquels la solution de l'équation (21) est évaluée. A ces instants t_n , on note :

$$x(t_n) = x_n \quad \dot{x}(t_n) = \dot{x}_n \quad \ddot{x}(t_n) = \ddot{x}_n$$

1.1) Résolution avec un schéma d'EULER explicite

On évalue numériquement la solution de l'équation (21) sur l'intervalle de temps $[0 \ 10T_0]$ avec un schéma d'EULER explicite.

1.1.a) Que se passe-t-il si on choisit

$$\frac{2\varepsilon}{\omega_0} < \Delta t$$

1.1.b) Que se passe-t-il si on choisit

$$\Delta t = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

1.1.c) Que se passe-t-il si on choisit

$$\Delta t = 0.8 \times \frac{2\varepsilon}{\omega_0}$$

1.1.d) Etude de la précision

- Quels sont les critères permettant d'étudier la précision de la solution ?
- A partir de quelle valeur du rapport

$$\frac{\Delta t}{\frac{2\varepsilon}{\omega_0}}$$

la solution calculée présente-t-elle une précision suffisante ?

1.2) Résolution avec un schéma d'EULER implicite

Calculer le pas de temps critique.

1.3) Résolution avec un schéma de RUNGE KUTTA

On évalue numériquement la solution de l'équation (21) sur l'intervalle de temps $[0 \quad 100T_0]$ avec un schéma de RUNGE KUTTA. On pose :

$$\Delta t = h \times \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0}$$

1.3.a) Calculer la solution obtenue pour les trois valeurs suivantes du coefficient h :

$$h = 0.04 \qquad h = 0.96 \qquad h = 1.04$$

Quelles conclusions pouvez-vous tirer des résultats de ces trois calculs concernant la stabilité et la précision de ce schéma d'intégration ?

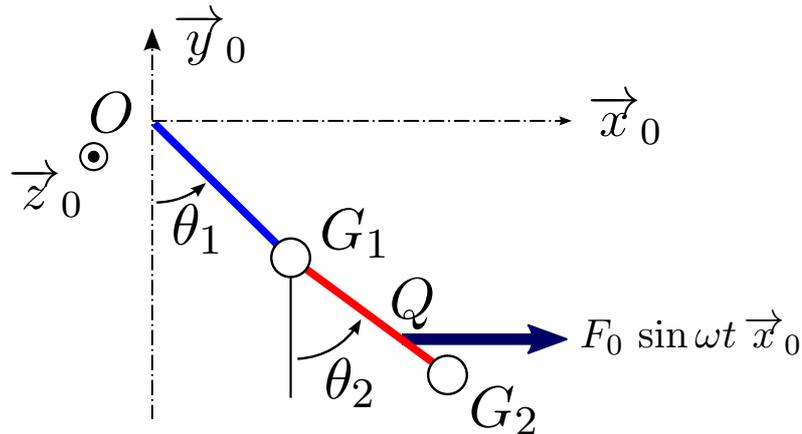
1.3.b) Donner une valeur approximative du pas de temps critique Δt_c . Cette valeur sera donnée sous la forme

$$\Delta t_c = h_c \times \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \quad \text{où} \quad h_{min} < h_c < h_{max} \quad \text{avec} \quad |h_{max} - h_{min}| \leq 0.001$$

Etude d'un double pendule avec l'hypothèse des petits mouvements

Rappels et notations

Dans le repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on considère le double pendule suivant.



Les deux pendules sont de masse identique notée m . Ils sont reliés par deux barres identiques de masse négligeable et de longueur a . Au point Q de la barre $G_1 G_2$, on applique la force harmonique \vec{F} définie par

$$\vec{F} = F_0 \sin \omega t \vec{x}_0$$

On a :

$$\overrightarrow{G_1 Q} = \frac{\overrightarrow{G_1 G_2}}{\sqrt{2}}$$

L'ensemble est soumis au champ de pesanteur $-g \vec{y}_0$. Les positions des deux pendules sont définies par les deux angles θ_1 et θ_2 :

$$\theta_1 = \left(-\vec{y}_0, \overrightarrow{O G_1} \right) \qquad \theta_2 = \left(-\vec{y}_0, \overrightarrow{G_1 G_2} \right)$$

On se place dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements. L'équation du mouvement s'écrit :

$$m a^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{vmatrix} + m g a \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{vmatrix} = F_0 \sin \omega t \begin{vmatrix} a \\ a/\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Pour les applications numériques, on prendra

$$m = 2 \text{ kg} \quad a = 0.5 \text{ m} \quad g = 9.81 \text{ m.s}^{-2} \quad F_0 = 20 \text{ N} \quad \omega = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\theta_1(0) = 0 \text{ rad} \quad \theta_2(0) = 0 \text{ rad} \quad \dot{\theta}_1(0) = -1.31519275 \text{ rad.s}^{-1} \quad \dot{\theta}_2(0) = -1.85996342 \text{ rad.s}^{-1}$$

Remarque : toutes ces valeurs numériques ainsi que la définition des matrices masse et raideur, notées respectivement xm et xk sont définies dans le fichier *ExoNum12_vs.sce* disponible sur le serveur pédagogique.

On cherche à évaluer numériquement la solution de l'équation (1) avec un schéma de NEWMARK entre 0 s et T_0 avec $T_0 = 8$ s. On rappelle que pour un schéma de NEWMARK, les relations entre les variables aux instants t_n et t_{n+1} sont données par

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} \quad (2)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_n + \Delta t \gamma \ddot{q}_{n+1} \quad (3)$$

où q_j , \dot{q}_j et \ddot{q}_j représentent le vecteur paramètre ainsi que ses dérivées par rapport au temps d'ordre 1 et 2 à l'instant t_j .

1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

Pour un schéma de NEWMARK explicite, les coefficients β et γ sont donnés par :

$$\beta = 0 \quad \gamma = 0.5$$

1.1) Ecrivez la matrice d'amplification.

1.2) A partir de cette matrice d'amplification, déterminez numériquement le pas de temps critique.

1.3) Donnez la relation entre q_0 , \dot{q}_0 et \ddot{q}_0 .

1.4) En présence d'une force dépendant du temps, déterminez les trois relations du schéma de NEWMARK entre les variables q_n , \dot{q}_n , \ddot{q}_n , q_{n+1} , \dot{q}_{n+1} et \ddot{q}_{n+1} .

Indication : Ces trois relations font également intervenir les valeurs de la force aux instants t_n et t_{n+1} .

1.5) A l'aide des trois relations précédentes, programmez la résolution en temps du problème.

1.6) On choisit comme pas de temps $\Delta t = 0.02$ s (valeur inférieure au pas de temps critique). Donnez les valeurs numériques de $q(t)$, $\dot{q}(t)$ et $\ddot{q}(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s, Δt , $2\Delta t$ et 0.5 s. Ces valeurs seront données avec trois chiffres significatifs.

2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

Pour un schéma de NEWMARK implicite, les coefficients β et γ sont donnés par :

$$\beta = 0.25 \quad \gamma = 0.5$$

2.1) Ecrivez la matrice d'amplification.

2.2) A partir de cette matrice d'amplification, représentez sur un graphique l'allure de l'évolution de la plus grande valeur propre de cette matrice en fonction du pas de temps Δt , pour des valeurs du pas de temps comprises entre 0 s et 1 s.

Qu'en concluez-vous ?

2.3) Donnez la relation entre q_0 , \dot{q}_0 et \ddot{q}_0 .

2.4) En utilisant la matrice d'amplification précédente, déterminez la relation entre les vecteurs d'état du système aux instants t_n et t_{n+1} .

2.5) A l'aide de cette relation, programmez la résolution en temps du problème.

2.6) On choisit comme pas de temps $\Delta t = 0.02$ s. Donnez les valeurs numériques de $q(t)$ et $\dot{q}(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s, Δt , $2\Delta t$ et 0.5 s. Ces valeurs seront données avec trois chiffres significatifs.

Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 4

On souhaite intégrer en temps l'équation différentielle (1) sur l'intervalle $[0, T_0]$:

$$q^{(4)}(t) + \omega_0 q^{(3)}(t) + 5.16\omega_0^2 q^{(2)}(t) + 1.6\omega_0^3 q^{(1)}(t) + 4\omega_0^4 q(t) = 0 \quad (1)$$

où $q^{(k)}(t)$ représente la dérivée à l'ordre k par rapport au temps de la fonction $q(t)$. Les conditions initiales sont les suivantes :

$$q(0) = 1 \quad q^{(1)}(0) = 0 \quad q^{(2)}(0) = 0 \quad q^{(3)}(0) = 0 \quad (2)$$

Pour les applications numériques, on prendra :

$$\omega_0 = 2\pi \text{ rad.s}^{-1} \quad T_0 = 4 \text{ s} \quad (3)$$

1. Résolution avec un schéma de RUNGE-KUTTA

Les schémas de RUNGE-KUTTA sont des schémas adaptés aux systèmes différentiels du premier ordre. Il est donc nécessaire de transformer l'équation différentielle (1) en une équation différentielle du premier ordre.

- 1.1 Comment est défini le vecteur d'état $U(t)$ pour cette équation différentielle ?
- 1.2 Quelle équation différentielle du premier ordre faisant intervenir $U(t)$ et $U^{(1)}(t)$ doit-on considérer ? $U^{(1)}(t)$ représente la dérivée à l'ordre 1 par rapport au temps du vecteur d'état $U(t)$.
- 1.3 Programmez la résolution de cette équation différentielle par la méthode de RUNGE-KUTTA.
- 1.4 On choisit $\Delta t = 0.02 \text{ s}$. Donnez les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s , Δt , $2\Delta t$ et T_0 .

2. Résolution avec un schéma d'EULER explicite

- 2.1 Comment s'écrit le schéma d'EULER explicite pour cette équation différentielle ?
- 2.2 Programmez la résolution de l'équation différentielle (1) avec un schéma d'EULER explicite.
- 2.3 On choisit $\Delta t = 0.02 \text{ s}$. Donnez les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s , Δt , $2\Delta t$ et T_0 .
- 2.4 On choisit désormais $\Delta t = 0.04 \text{ s}$. Qu'observez-vous ? Que pouvez-vous conclure de ce calcul ?
- 2.5 Pour étudier la stabilité de ce schéma d'intégration, quelle matrice $[A]$ faut-il considérer ?
Indications : On exprimera cette matrice $[A]$ en fonction des coefficients intervenant dans l'équation différentielle (1) et du pas de temps Δt .
- 2.6 Pour cette matrice $[A]$, que doit-on rechercher ?
- 2.7 Déterminez le pas de temps critique associé au schéma d'EULER explicite pour cette équation différentielle. Vous détaillerez la méthode utilisée ainsi que l'algorithme programmé pour obtenir ce pas de temps critique.
Indication : Si vous recherchez le pas de temps critique en étudiant les valeurs propres de la matrice d'amplification, avec SCILAB, vous obtiendrez les valeurs propres d'une matrice A avec l'instruction

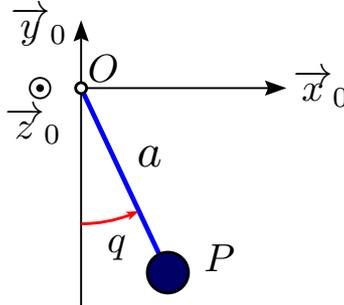
$$v = \text{spec}(A)$$

Les valeurs propres de la matrice A seront stockées dans le vecteur v .

Pendule simple

Etude avec un paramétrage cinématiquement admissible

On considère le pendule simple suivant.



La position du pendule étant définie par l'angle q , on a :

$$\begin{aligned} E_c(m / \mathcal{R}_0) &= \frac{m a^2 \dot{q}^2}{2} \\ E_p(m / \mathcal{R}_0) &= -m g a \cos q + \text{Cte} \end{aligned}$$

Le paramétrage étant cinématiquement admissible et les liaisons parfaites, en absence de forces extérieures supplémentaires, le travail virtuel des efforts ne dérivant pas d'un potentiel est nul. On en déduit l'équation régissant les mouvements d'oscillations libres du pendule :

$$m a^2 \ddot{q} + m g a \sin q = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{q} + \frac{g}{a} \sin q = 0$$

En posant

$$\omega_0^2 = \frac{g}{a}$$

on obtient l'équation de mouvement suivante :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0 \quad (1)$$

On notera E^* la quantité définie par la relation (2)

$$E^* = \frac{\dot{q}^2}{2} - \omega_0^2 \cos q \quad (2)$$

E^* est proportionnelle à l'énergie mécanique du pendule.

∴

On cherche à déterminer une solution numérique de l'équation (1) sur l'intervalle $[0, T_0]$. On note q_0 et \dot{q}_0 les valeurs initiales de q et \dot{q} à l'instant initial. Pour les applications numériques, on prendra

$$\omega_0 = 2 \pi \text{ rad.s}^{-1} \quad q_0 = \frac{\pi}{3} \quad \dot{q}_0 = 0 \quad (3)$$

Notations : Dans toute cette étude, on notera q_j \dot{q}_j \ddot{q}_j les valeurs de q \dot{q} \ddot{q} à l'instant $t_j = j \Delta t$.

1. Résolution de l'équation (1) avec un schéma de RUNGE KUTTA

Les schémas de RUNGE KUTTA sont des schémas du premier ordre dont l'utilisation est générale. En tant que schéma du premier ordre, ils permettent donc de résoudre une équation différentielle de la forme (4) :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t) \quad (4)$$

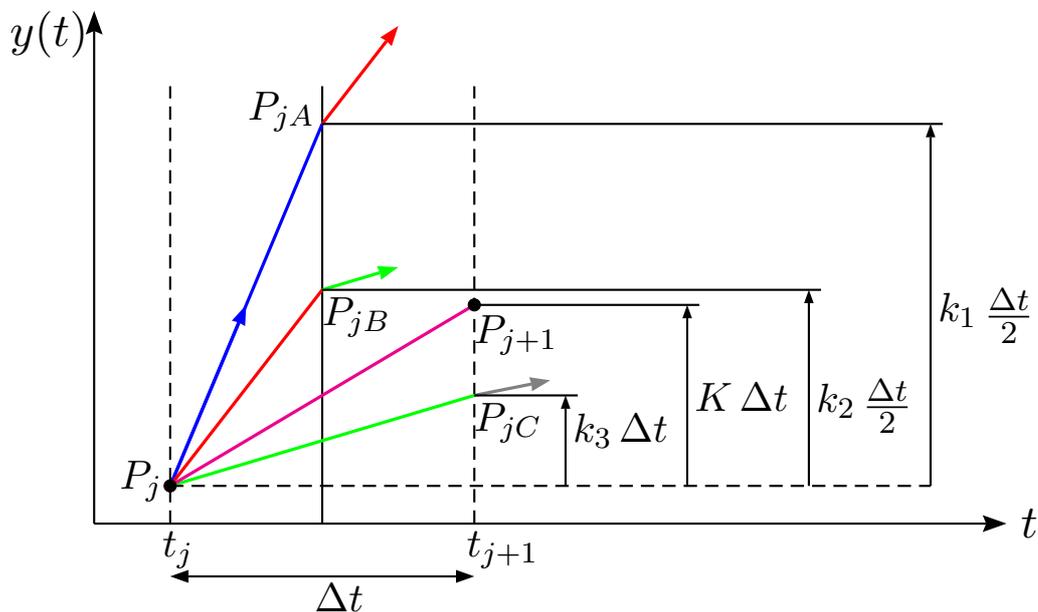
Avec un schéma de RUNGE KUTTA d'ordre 4-5, si y_j est la valeur de la fonction $y(t)$ à l'instant t_j , la valeur y_{j+1} de la fonction $y(t)$ à l'instant t_{j+1} s'obtient en faisant

$$y_{j+1} = y_j + K \Delta t \quad (5)$$

$$\text{avec } K = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad (6)$$

k_1 , k_2 , k_3 et k_4 , les valeurs de la fonction $f(y(t), t)$ aux points P_j , P_{jA} , P_{jB} et P_{jC} , s'obtiennent en faisant

$$\begin{cases} k_1 = f(y_j, t_j) \\ k_2 = f\left(y_j + k_1 \frac{\Delta t}{2}, t_j + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_3 = f\left(y_j + k_2 \frac{\Delta t}{2}, t_j + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_4 = f(y_j + k_3 \Delta t, t_j + \Delta t) \end{cases} \quad (7)$$



- 1.1 Transformez l'équation du mouvement (1) afin d'obtenir une formulation adaptée aux schémas du premier ordre.
- 1.2 Programmez la résolution de l'équation du mouvement que vous avez obtenue à la question précédente à l'aide d'un schéma de RUNGE KUTTA. Pour valider votre programme, vous pourrez remarquer que si vous choisissez q_0 suffisamment petit, la solution obtenue doit coïncider avec la solution obtenue avec l'hypothèse des petits mouvements.

1.3 Calculez la quantité E^* associée au schéma de RUNGE KUTTA. On prend :

$$T_0 = 6 \text{ s} \quad \Delta t = 0.02 \text{ s}$$

Obtient-on une énergie mécanique constante ?

2. Résolution de l'équation (1) avec un schéma de NEWMARK explicite ($\gamma = 0.5$, $\beta = 0$)

Les schémas de NEWMARK sont des schémas d'intégration en temps d'ordre 2. Ce sont donc généralement des formulations bien adaptées à l'intégration en temps des équations du mouvement. Ils sont définis par les deux relations (8) et (9)

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{j+1} \quad (8)$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \gamma \Delta t \ddot{q}_{j+1} \quad (9)$$

γ et β sont deux constantes caractéristiques qui permettent de définir ces schémas. Le schéma de NEWMARK explicite, également appelé schéma des différences finies centrées, est défini par

$$\gamma = 0.5 \quad \beta = 0$$

Avec ces deux valeurs des paramètres γ et β , les relations (8) et (9) deviennent :

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j \quad (10)$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_j + \ddot{q}_{j+1}) \quad (11)$$

Si l'équation du mouvement est de la forme

$$[M(q)]\ddot{q} + f(q, t) = 0 \quad (12)$$

l'intégration en temps de l'équation (12) avec un schéma de NEWMARK explicite revient à implémenter les trois relations suivantes :

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j \quad (13)$$

$$[M(q_{j+1})]\ddot{q}_{j+1} = -f(q_{j+1}, t_{j+1}) \quad (14)$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_j + \ddot{q}_{j+1}) \quad (15)$$

Si l'équation du mouvement est de la forme

$$[M(q)]\ddot{q} + f(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (16)$$

la relation (13) reste valable et permet d'obtenir la valeur de q_{j+1} . Les relations (14) et (15) deviennent

$$[M(q_{j+1})]\ddot{q}_{j+1} = -f(q_{j+1}, \dot{q}_{j+1}, t_{j+1})$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_j + \ddot{q}_{j+1})$$

Suivant la nature de la fonction $f(q, \dot{q}, t)$, la détermination de \dot{q}_{j+1} et de \ddot{q}_{j+1} à partir de ces deux dernières équations peut nécessiter la mise en place d'un schéma itératif de résolution.

2.1 On souhaite déterminer numériquement la solution de l'équation (1) avec un schéma de NEWMARK explicite. Si q_j , \dot{q}_j , \ddot{q}_j désignent les valeurs des fonctions $q(t)$, $\dot{q}(t)$ et $\ddot{q}(t)$ à l'instant t_j et q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} les valeurs de ces trois fonctions à l'instant t_{j+1} , quelles relations permettent de déterminer q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} lorsque q_j , \dot{q}_j , \ddot{q}_j sont des quantités connues ?

2.3 Programmez la résolution de l'équation différentielle (1) ainsi que le calcul de E^* avec un schéma de NEWMARK explicite . Comme précédemment avec la résolution de l'équation (1) avec un schéma de RUNGE KUTTA, vous pourrez remarquer que si vous choisissez q_0 suffisamment petit, la solution obtenue doit coïncider avec la solution obtenue avec l'hypothèse des petits mouvements.

2.4 On prend :

$$T_0 = 6 \text{ s} \quad \Delta t = 0.02 \text{ s}$$

Qu'observez-vous ?

3. Résolution de l'équation (1) avec un schéma de NEWMARK implicite ($\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$)
Lorsque $\gamma = 0.5$ et $\beta = 0.25$, on ne peut pas déterminer analytiquement les valeurs de q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} à partir des trois équations

$$\begin{aligned} q_{j+1} &= q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} &= \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \gamma \Delta t \ddot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} &= -\omega_0^2 \sin q_{j+1} \end{aligned}$$

En effet, la détermination de q_{j+1} nécessite la résolution de l'équation

$$q_{j+1} + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 \sin q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j$$

équation dont la solution n'admet pas une expression analytique explicite. A l'instant t_{j+1} , on appelle résidu la quantité

$$\ddot{q}_{j+1} + \omega_0^2 \sin q_{j+1} \quad (17)$$

A partir d'une première estimation des quantités q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} , la méthode consiste donc à calculer des corrections Δq_{j+1} , $\Delta \dot{q}_{j+1}$, $\Delta \ddot{q}_{j+1}$ jusqu'à ce que la norme du résidu soit inférieure à la précision voulue, ce qui revient à minimiser l'erreur sur l'équation du mouvement. La méthode est donc itérative. Pratiquement, à partir des valeurs estimées que l'on note q_{j+1}^* , \dot{q}_{j+1}^* , \ddot{q}_{j+1}^* , on définit les valeurs corrigées

$$q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1} \quad \dot{q}_{j+1}^* + \Delta \dot{q}_{j+1} \quad \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1}$$

Les valeurs des trois corrections Δq_{j+1} , $\Delta \dot{q}_{j+1}$, $\Delta \ddot{q}_{j+1}$ sont déterminées en résolvant un système linéaire de trois équations. Les deux premières équations de ce système s'obtiennent en écrivant que les valeurs estimées et corrigées des variables q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} satisfont les relations (8) et (9). Pour les valeurs estimées, les relations (8) et (9) s'écrivent

$$q_{j+1}^* = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{j+1}^* \quad (18)$$

$$\dot{q}_{j+1}^* = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \gamma \Delta t \ddot{q}_{j+1}^* \quad (19)$$

Pour les valeurs corrigées, les relations (8) et (9) s'écrivent

$$q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \beta \Delta t^2 (\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1}) \quad (20)$$

$$\dot{q}_{j+1}^* + \Delta \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \gamma \Delta t (\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1}) \quad (21)$$

A partir des relations (18) et (20), on obtient une relation entre les corrections Δq_{j+1} et $\Delta \ddot{q}_{j+1}$:

$$\Delta q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{q}_{j+1} \quad (22)$$

A partir des relations (19) et (21), on obtient une relation entre les corrections $\Delta \dot{q}_{j+1}$ et $\Delta \ddot{q}_{j+1}$:

$$\Delta \dot{q}_{j+1} = \gamma \Delta t \Delta \ddot{q}_{j+1} \quad (23)$$

La troisième équation correspond au développement limité au premier ordre par rapport aux corrections de la relation

$$\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta\ddot{q}_{j+1} + \omega_0^2 \sin(q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) = 0$$

Le développement limité au premier ordre par rapport aux corrections de cette dernière relation est licite dans la mesure où les corrections doivent être petites si le pas de temps est suffisamment petit. On a donc :

$$\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta\ddot{q}_{j+1} + \omega_0^2 (\sin q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1} \times \cos q_{j+1}^*) = 0$$

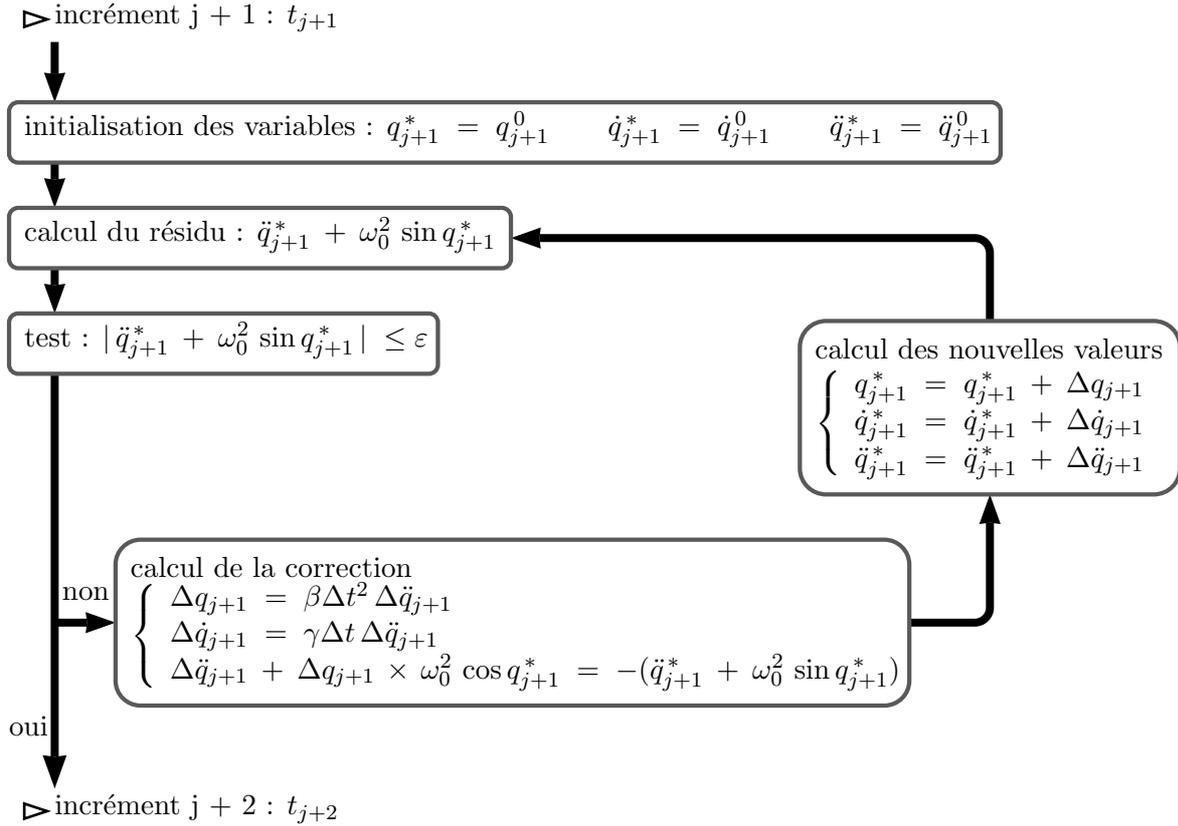
ce qui permet d'écrire

$$\Delta\ddot{q}_{j+1} + \Delta q_{j+1} \times \omega_0^2 \cos q_{j+1}^* = -(\ddot{q}_{j+1}^* + \omega_0^2 \sin q_{j+1}^*) \quad (24)$$

On obtient finalement que les trois corrections Δq_{j+1} $\Delta\dot{q}_{j+1}$ $\Delta\ddot{q}_{j+1}$ sont solution du système linéaire

$$\begin{cases} \Delta q_{j+1} &= \beta \Delta t^2 \Delta\ddot{q}_{j+1} \\ \Delta\dot{q}_{j+1} &= \gamma \Delta t \Delta\ddot{q}_{j+1} \\ \Delta\ddot{q}_{j+1} + \Delta q_{j+1} \times \omega_0^2 \cos q_{j+1}^* &= -(\ddot{q}_{j+1}^* + \omega_0^2 \sin q_{j+1}^*) \end{cases} \quad (25)$$

L'algorithme de résolution est donc le suivant :



Comme il a été dit précédemment, le processus d'obtention des valeurs de q_{j+1} \dot{q}_{j+1} \ddot{q}_{j+1} est un processus itératif. On note :

- q_{j+1}^k \dot{q}_{j+1}^k \ddot{q}_{j+1}^k les valeurs des variables q_{j+1} \dot{q}_{j+1} \ddot{q}_{j+1} à l'itération k ;
- q_{j+1}^{k+1} \dot{q}_{j+1}^{k+1} \ddot{q}_{j+1}^{k+1} les valeurs des variables q_{j+1} \dot{q}_{j+1} \ddot{q}_{j+1} à l'itération $k + 1$.

On a :

$$\begin{cases} q_{j+1}^{k+1} &= q_{j+1}^k + \Delta q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1}^{k+1} &= \dot{q}_{j+1}^k + \Delta \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1}^{k+1} &= \ddot{q}_{j+1}^k + \Delta \ddot{q}_{j+1} \end{cases}$$

où Δq_{j+1} $\Delta \dot{q}_{j+1}$ $\Delta \ddot{q}_{j+1}$ correspondent aux corrections calculées à l'itération $k + 1$.

3.1 A l'itération $k+1$, quelles relations permettent d'obtenir les corrections Δq_{j+1} $\Delta \dot{q}_{j+1}$ $\Delta \ddot{q}_{j+1}$ à partir des valeurs de q_{j+1}^k \dot{q}_{j+1}^k \ddot{q}_{j+1}^k ?

3.2 Ecrivez l'algorithme qui permet de calculer une solution numérique de l'équation du mouvement (1) avec un schéma de NEWMARK implicite. Au début de l'incrément $j + 1$, pour initialiser les valeurs de q \dot{q} \ddot{q} , on prendra :

$$\begin{cases} \ddot{q}_{j+1}^0 &= 0 \\ \dot{q}_{j+1}^0 &= \dot{q}_j + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{q}_j \\ q_{j+1}^0 &= q_j + \Delta t \dot{q}_j + (0.5 - \beta)\Delta t^2 \ddot{q}_j \end{cases} \quad (26)$$

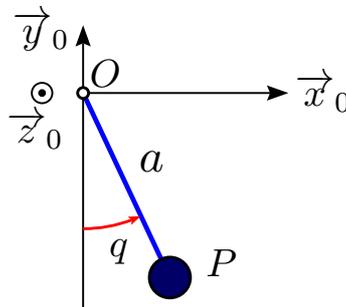
3.3 Programmez cet algorithme et comparez la solution obtenue avec celles obtenues précédemment.

La comparaison portera sur les valeurs de q ainsi que sur celles de E^* . Les valeurs numériques sont celles définies par la relation (3). On prend :

$$T_0 = 6 \text{ s} \quad \Delta t = 0.02 \text{ s}$$

Etude avec un paramétrage non cinématiquement admissible

Pour étudier le pendule simple, on considère désormais le paramétrage non cinématiquement admissible défini par les coordonnées cartésiennes du point P .



L'équation de liaison entre les deux variables s'écrit :

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (27)$$

L'énergie cinétique du pendule est donnée par :

$$\begin{aligned} E_c(m / \mathcal{R}_0) &= \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} \\ &= \frac{1}{2} [\dot{x} \ \dot{y}] \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'énergie potentielle du pendule s'écrit :

$$\begin{aligned} E_p(m / \mathcal{R}_0) &= mgy + \text{Cte} \\ &= [x \ y] \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} + \text{Cte} \end{aligned}$$

D'après l'équation de liaison (27), lorsque le paramétrage est cinématiquement admissible, les coordonnées cartésiennes du point P vérifient :

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

Par conséquent, dans le cas d'un paramétrage cinématiquement admissible, les déplacements virtuels δx et δy vérifient :

$$2x\delta x + 2y\delta y = 0$$

L'expression du travail des efforts permettant d'imposer cette liaison s'obtient, dans le cas d'un paramétrage non cinématiquement admissible, à partir de cette dernière relation en introduisant un multiplicateur de LAGRANGE. On trouve :

$$\begin{aligned}\delta W_\ell &= -\lambda(2x\delta x + 2y\delta y) \\ &= -[x \ y] \begin{vmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \end{vmatrix}\end{aligned}$$

On obtient ainsi le système d'équations à résoudre lorsqu'on prend pour paramétrage les coordonnées cartésiennes du point P :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 2x \\ 2y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 \\ mg \end{vmatrix} \\ x^2 + y^2 - a^2 = 0 \end{cases} \quad (28)$$

4. Résolution de l'équation (28) avec un schéma de RUNGE KUTTA

Le système d'équations (28) ne peut pas être résolu directement avec un schéma de RUNGE KUTTA car il ne peut pas être mis sous la forme

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t)$$

Au lieu de résoudre

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

On cherche à satisfaire la condition

$$\frac{d^2}{dt^2}(x^2 + y^2 - a^2) = 0$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 - a^2) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ \implies \frac{d^2}{dt^2}(x^2 + y^2 - a^2) &= 2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} + 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2\end{aligned}$$

\ddot{x} , \ddot{y} et λ sont donc les solutions du système (29)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 2x \\ 2y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 \\ mg \end{vmatrix} \\ 2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} = -(2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2) \end{cases} \quad (29)$$

Numériquement, la formulation (29) soulève des difficultés et on préfère résoudre

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 2x \\ 2y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 \\ mg \end{vmatrix} \\ 2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} = -(2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2) - 2\alpha(2x\dot{x} + 2y\dot{y}) - \alpha^2(x^2 + y^2 - a^2) \end{cases} \quad (30)$$

où α est une constante positive. Ainsi, au lieu de résoudre

$$\frac{d^2}{dt^2}(x^2 + y^2 - a^2) = 0$$

on satisfait donc

$$\frac{d^2}{dt^2}(x^2 + y^2 - a^2) + 2\alpha \frac{d}{dt}(x^2 + y^2 - a^2) + \alpha^2(x^2 + y^2 - a^2) = 0$$

Le passage du système (29) au système (30) correspond à une stabilisation de BAUGMARTE.

4.1 Programmez le schéma de RUNGE KUTTA correspondant au paramétrage associé aux coordonnées cartésiennes. On prend :

$$T_0 = 40 \text{ s} \quad \Delta t = 0.02 \text{ s} \quad \alpha = 0 \quad m = 2 \text{ kg}$$

Que constate-t-on ? Pour interpréter les résultats, on représentera sur une même figure les deux variables θ obtenues avec un schéma d'intégration de RUNGE KUTTA : la valeur de θ calculée avec un paramétrage cinématiquement admissible et celle déduite de x et y lorsqu'on utilise les coordonnées cartésiennes comme paramétrage. On tracera également l'évolution de la quantité

$$\left| \frac{x^2 + y^2 - a^2}{a^2} \right|$$

lorsque les coordonnées cartésiennes sont les variables qui constituent le paramétrage.

4.2 On choisit désormais $\alpha = 5$, les valeurs de T_0 et Δt étant inchangées. Qu'observe-t-on ?

5. Résolution de l'équation (28) avec un schéma de NEWMARK implicite ($\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$) De façon analogue à ce qui a été fait pour la résolution de l'équation (1) avec un paramétrage cinématiquement admissible, la méthode consiste à déterminer les valeurs des variables cinématiques et de leurs dérivées ainsi que celle du multiplicateur de LAGRANGE λ en minimisant le résidu suivant

$$\left| \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} m & \\ & m \end{array} \right] \begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{array} + \lambda \begin{array}{l} 2x \\ 2y \end{array} + \begin{array}{l} 0 \\ mg \end{array} \\ x^2 + y^2 - a^2 \end{array} \right| \quad (31)$$

À l'instant t_{j+1} , on pose :

$$q_{j+1} = \begin{array}{l} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{array} \quad \dot{q}_{j+1} = \begin{array}{l} \dot{x}_{j+1} \\ \dot{y}_{j+1} \end{array} \quad \ddot{q}_{j+1} = \begin{array}{l} \ddot{x}_{j+1} \\ \ddot{y}_{j+1} \end{array}$$

À partir d'une première estimation des quantités q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} , λ_{j+1} , la méthode consiste donc à calculer des corrections Δq_{j+1} , $\Delta \dot{q}_{j+1}$, $\Delta \ddot{q}_{j+1}$, $\Delta \lambda_{j+1}$ jusqu'à ce que la norme du résidu défini par la relation (31) soit inférieure à la précision voulue, ce qui revient à minimiser l'erreur sur l'équation du mouvement et sur l'équation de liaison. La méthode est donc itérative. Pratiquement, à partir des valeurs estimées que l'on note q_{j+1}^* , \dot{q}_{j+1}^* , \ddot{q}_{j+1}^* , λ_{j+1}^* , on définit les valeurs corrigées

$$q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1} \quad \dot{q}_{j+1}^* + \Delta \dot{q}_{j+1} \quad \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1} \quad \lambda_{j+1}^* + \Delta \lambda_{j+1}$$

Les valeurs des corrections Δq_{j+1} , $\Delta \dot{q}_{j+1}$, $\Delta \ddot{q}_{j+1}$, $\Delta \lambda_{j+1}$ sont déterminées en résolvant un système linéaire de sept équations, puisqu'il y a sept inconnues à calculer. Comme dans le cas du paramétrage cinématiquement admissible, quatre équations sont obtenues en écrivant que les

valeurs estimées et corrigées des variables q_{j+1} \dot{q}_{j+1} \ddot{q}_{j+1} satisfont les relations (8) et (9), ce qui conduit aux relations (22) et (23)

$$\begin{aligned}\Delta q_{j+1} &= \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{q}_{j+1} \\ \Delta \dot{q}_{j+1} &= \gamma \Delta t \Delta \ddot{q}_{j+1}\end{aligned}$$

Deux autres équations sont fournies par le développement limité au premier ordre par rapport aux corrections de l'équation du mouvement. On obtient ainsi :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{j+1}^* + \Delta \ddot{x}_{j+1} \\ \ddot{y}_{j+1}^* + \Delta \ddot{y}_{j+1} \end{bmatrix} + (\lambda_{j+1}^* + \Delta \lambda_{j+1}) \begin{bmatrix} 2(x_{j+1}^* + \Delta x_{j+1}) \\ 2(y_{j+1}^* + \Delta y_{j+1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m g \end{bmatrix} = 0$$

Soit

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{x}_{j+1} \\ \Delta \ddot{y}_{j+1} \end{bmatrix} + 2\lambda_{j+1}^* \begin{bmatrix} \Delta x_{j+1} \\ \Delta y_{j+1} \end{bmatrix} + 2\Delta \lambda_{j+1} \begin{bmatrix} x_{j+1}^* \\ y_{j+1}^* \end{bmatrix} = - \left(\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_{j+1}^* \\ \ddot{y}_{j+1}^* \end{bmatrix} + \lambda_{j+1}^* \begin{bmatrix} 2x_{j+1}^* \\ 2y_{j+1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m g \end{bmatrix} \right)$$

ce qui peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \Delta \ddot{q}_{j+1} + 2\lambda_{j+1}^* \Delta q_{j+1} + 2q_{j+1}^* \Delta \lambda_{j+1} &= \\ &- \left(\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \ddot{q}_{j+1}^* + 2\lambda_{j+1}^* q_{j+1}^* + \begin{bmatrix} 0 \\ m g \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

La dernière équation provient de l'équation de liaison écrite pour les valeurs corrigées des inconnues cinématiques et développée au premier ordre par rapport aux corrections, ce qui donne :

$$\begin{aligned} (x_{j+1}^* + \Delta x_{j+1})^2 + (y_{j+1}^* + \Delta y_{j+1})^2 - a^2 &= 0 \\ \implies 2x_{j+1}^* \Delta x_{j+1} + 2y_{j+1}^* \Delta y_{j+1} &= - \left([x_{j+1}^* \ y_{j+1}^*] \begin{bmatrix} x_{j+1}^* \\ y_{j+1}^* \end{bmatrix} - a^2 \right) \end{aligned}$$

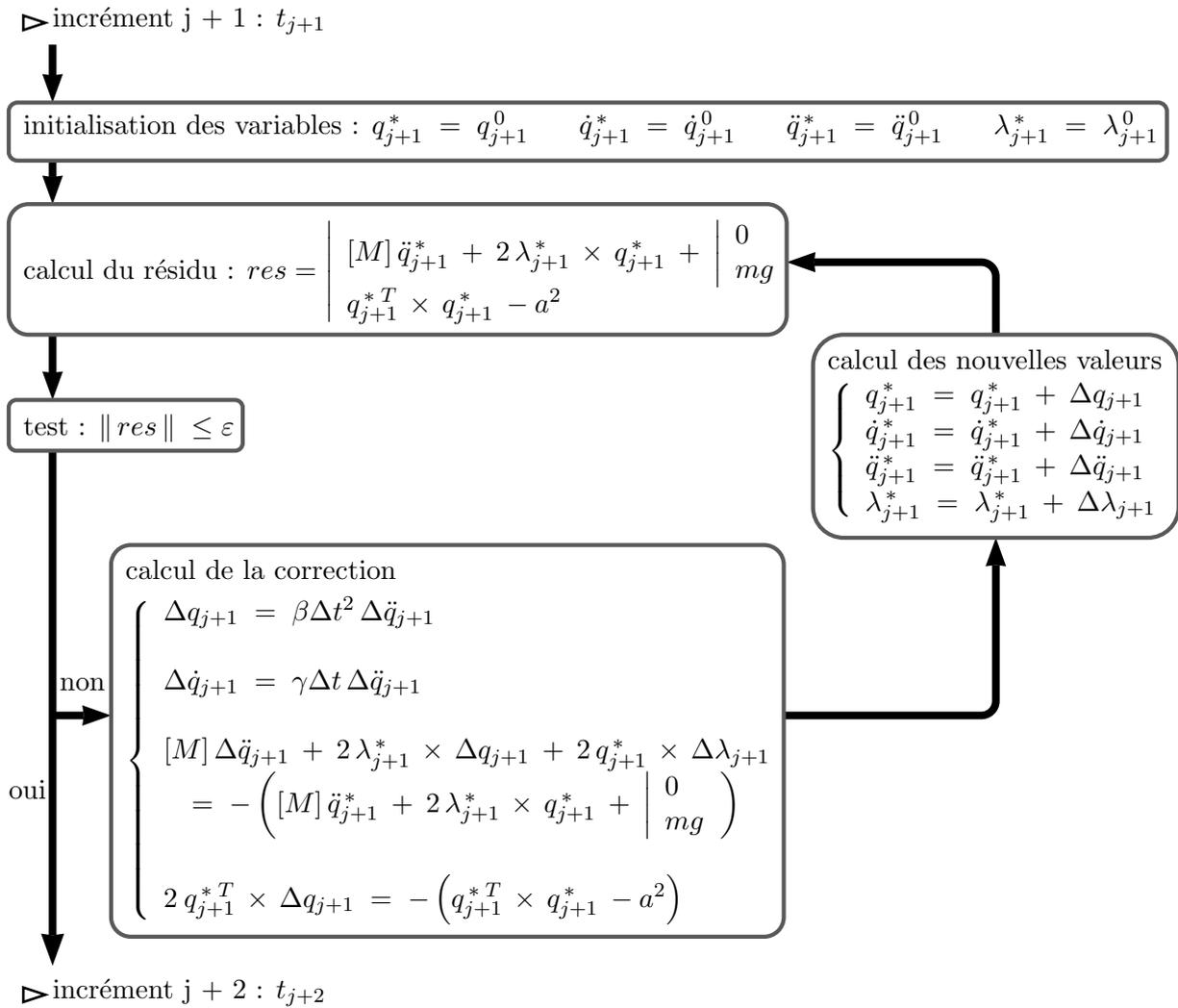
Cette dernière relation peut être mis sous la forme

$$2q_{j+1}^{*T} \times \Delta q_{j+1} = - (q_{j+1}^{*T} \times q_{j+1}^* - a^2) \quad (33)$$

Au début de l'incrément $j+1$ qui permet de déterminer les valeurs des variables q \dot{q} \ddot{q} λ à l'instant t_{j+1} , on choisit :

$$\begin{cases} \ddot{q}_{j+1}^0 &= 0 \\ \dot{q}_{j+1}^0 &= \dot{q}_j + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{q}_j \\ q_{j+1}^0 &= q_j + \Delta t \dot{q}_j + (0.5 - \beta)\Delta t^2 \ddot{q}_j \\ \lambda_{j+1}^0 &= \lambda_j \end{cases} \quad (34)$$

relations qui généralisent les relations (26).



Le processus d'obtention des valeurs de $q_{j+1} \quad \dot{q}_{j+1} \quad \ddot{q}_{j+1} \quad \lambda_{j+1}$ étant un processus itératif, on note :

- $q_{j+1}^k \quad \dot{q}_{j+1}^k \quad \ddot{q}_{j+1}^k \quad \lambda_{j+1}^k$ les valeurs des variables $q_{j+1} \quad \dot{q}_{j+1} \quad \ddot{q}_{j+1} \quad \lambda_{j+1}$ à l'itération k ;
- $q_{j+1}^{k+1} \quad \dot{q}_{j+1}^{k+1} \quad \ddot{q}_{j+1}^{k+1} \quad \lambda_{j+1}^{k+1}$ les valeurs des variables $q_{j+1} \quad \dot{q}_{j+1} \quad \ddot{q}_{j+1} \quad \lambda_{j+1}$ à l'itération $k + 1$.

5.1 Comment obtient-on les valeurs de $q_0 \quad \dot{q}_0 \quad \ddot{q}_0 \quad \lambda_0$?

5.2 On a :

$$\begin{cases} q_{j+1}^{k+1} & = q_{j+1}^k + \Delta q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1}^{k+1} & = \dot{q}_{j+1}^k + \Delta \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1}^{k+1} & = \ddot{q}_{j+1}^k + \Delta \ddot{q}_{j+1} \\ \lambda_{j+1}^{k+1} & = \lambda_{j+1}^k + \Delta \lambda_{j+1} \end{cases}$$

où $\Delta q_{j+1} \quad \Delta \dot{q}_{j+1} \quad \Delta \ddot{q}_{j+1} \quad \Delta \lambda_{j+1}$ correspondent aux corrections calculées à l'itération $k + 1$. Comment sont déterminées ces corrections ?

5.3 Programmez l'intégration en temps du système d'équations (28) avec schéma de NEWMARK implicite.

5.4 On prend :

$$T_0 = 6 \text{ s} \quad \Delta t = 0.01 \text{ s} \quad m = 2 \text{ kg}$$

Qu'observez-vous ?

5.5 Les difficultés numériques qui apparaissent peuvent être éliminées en introduisant un amortissement numérique de la façon suivante :

$$\gamma = 0.5 + \alpha \quad \beta = 0.25 \times (0.5 + \gamma)^2 \quad \alpha \geq 0 \quad (35)$$

Lorsque α est nul, on retrouve le schéma de NEWMARK implicite classique. Qu'observez-vous désormais ? Pour répondre à cette question, on comparera les valeurs de θ et de E^* calculées avec un paramétrage cinématiquement admissible et avec les coordonnées cartésiennes.

6. Comparaison des différentes méthodes d'intégration

On choisit désormais

$$T_0 = 400 \text{ s} \quad \Delta t = 0.05 \text{ s} \quad m = 2 \text{ kg}$$

Comparez les valeurs de E^* obtenues avec

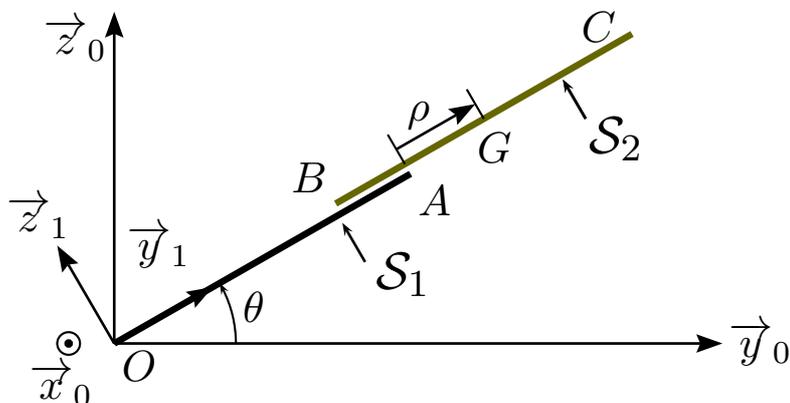
- RUNGE KUTTA et un paramétrage cinématiquement admissible ;
- RUNGE KUTTA et un paramétrage non cinématiquement admissible ; on prendra $\alpha = 5$ pour le paramètre de stabilisation ;
- NEWMARK et un paramétrage cinématiquement admissible avec $\gamma = 0.5 \quad \beta = 0$;
- NEWMARK et un paramétrage cinématiquement admissible avec $\gamma = 0.5 \quad \beta = 0.25$;
- NEWMARK et un paramétrage non cinématiquement admissible avec $\gamma = 0.5 \quad \beta = 0.25$; on prendra $\alpha = 0.06$ pour le coefficient définissant l'amortissement numérique.

6.1 Que pouvez-vous conclure de ce calcul ?

6.2 Pourquoi un schéma d'intégration de NEWMARK avec $\gamma = 0.5 \quad \beta = 0$ n'est pas adapté lorsque le paramétrage n'est pas cinématiquement admissible ?

Etude d'un bras télescopique RT

Un bras télescopique RT (Rotation - Translation) est un système matériel Σ constitué de deux bras \mathcal{S}_1 (modélisé par la tige OA) et \mathcal{S}_2 (modélisé par la tige BC).



Chaque bras \mathcal{S}_i est modélisé par une tige de masse $3m$ et de longueur $2a$. On note G_i son centre de masse, G_i étant situé au milieu de \mathcal{S}_i . Toutes les liaisons entre les solides sont des liaisons parfaites.

Le repère $\mathcal{R}_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ étant lié au bâti, le système matériel Σ peut se déplacer dans le plan $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Les positions des différents solides sont définies de la façon suivante :

- le bras \mathcal{S}_1 est en rotation autour de l'axe (O, \vec{x}_0) . On note θ l'angle défini par :

$$\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$$

- la translation du solide \mathcal{S}_2 par rapport au solide \mathcal{S}_1 est caractérisée par le paramètre ρ avec

$$\overrightarrow{AG_2} = \rho \vec{y}_1$$

Les effets de la pesanteur ne sont pas pris en compte. On suppose qu'il existe deux ressorts s'opposant aux mouvements en ρ et θ . Ces deux ressorts induisent une énergie potentielle élastique de la forme :

$$Ep(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \frac{k_1 \rho^2}{2} + \frac{k_2 \theta^2}{2}$$

Les oscillations libres du système sont régies par les équations suivantes

$$3m \ddot{\rho} - 3m(2a + \rho) \dot{\theta}^2 + k_1 \rho = 0 \quad (1)$$

$$[5ma^2 + 3m(2a + \rho)^2] \ddot{\theta} + 6m(2a + \rho) \dot{\rho} \dot{\theta} + k_2 \theta = 0 \quad (2)$$

Notations

- On note q , \dot{q} et \ddot{q} les vecteurs

$$q = \begin{vmatrix} \rho \\ \theta \end{vmatrix} \quad \dot{q} = \begin{vmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} \quad \ddot{q} = \begin{vmatrix} \ddot{\rho} \\ \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

- Dans le cadre d'une résolution numérique, on cherchera à déterminer les valeurs des vecteurs q , \dot{q} et \ddot{q} aux instants $t_n = n\Delta t$

- Aux instants t_n , les valeurs des variables q , \dot{q} , \ddot{q} , ρ , $\dot{\rho}$, $\ddot{\rho}$, θ , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ seront notées

$$q_n \quad \dot{q}_n \quad \ddot{q}_n \quad \rho_n \quad \dot{\rho}_n \quad \ddot{\rho}_n \quad \theta_n \quad \dot{\theta}_n \quad \ddot{\theta}_n$$

- Valeurs numériques

Pour les différentes applications numériques, on prendra

$$\begin{aligned} m &= 0.5 \text{ kg} & a &= 0.4 \text{ m} & k_1 &= 2 \text{ N.m}^{-1} & k_2 &= 5 \text{ N.m} \\ \rho_0 &= 0.15 \text{ m} & \theta_0 &= 0.05 \text{ rad} & \dot{\rho}_0 &= 0 \text{ m.s}^{-1} & \dot{\theta}_0 &= 0 \text{ rad.s}^{-1} \end{aligned}$$

∴

Résolution dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements

On s'intéresse en premier à la résolution des équations (1) et (2) dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements.

- 1.1) Que deviennent les relations (1) et (2) dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements ?
- 1.2) Comment sont définies les variables \ddot{q}_0 , $\ddot{\rho}_0$ et $\ddot{\theta}_0$?
- 1.3) On choisit d'intégrer les équations du mouvement écrites dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements avec un schéma de NEWMARK explicite défini par

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_n \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1})\end{aligned}$$

Sans utiliser les matrices d'amplification, comment se calculent les valeurs de q_{n+1} , \dot{q}_{n+1} et \ddot{q}_{n+1} à partir des valeurs de q_n , \dot{q}_n et \ddot{q}_n ?

- 1.4) Sans programmer la résolution numérique de ces équations, donnez le pas de temps critique pour une résolution avec un schéma de NEWMARK explicite. Justifiez votre réponse.
- 1.5) Si on intégrait les équations écrites dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements avec un schéma d'EULER explicite, quel résultat obtiendrait-on ?
- 1.6) Si on intégrait les équations écrites dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements avec un schéma d'EULER implicite, quel résultat obtiendrait-on ?

Résolution dans le cas général - schéma d'EULER explicite

On souhaite résoudre les équations (1) et (2) avec un schéma d'EULER explicite défini par

$$\begin{vmatrix} q_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \end{vmatrix} + \Delta t \begin{vmatrix} \dot{q}_n \\ \ddot{q}_n \end{vmatrix}$$

- 2.1) Comment sont définies les variables $\ddot{\rho}_0$ et $\ddot{\theta}_0$?
- 2.2) Comment s'obtiennent les valeurs de q_{n+1} , \dot{q}_{n+1} et \ddot{q}_{n+1} à partir des valeurs de q_n , \dot{q}_n et \ddot{q}_n ?
- 2.3) Programmez sous SCILAB la résolution des équations (1) et (2) avec un schéma d'EULER explicite. Donnez les valeurs numériques de q_n , \dot{q}_n et \ddot{q}_n aux instants t_0 , t_1 et t_2 . On prendra $\Delta t = 0.01$ s .

Résolution dans le cas général - schéma de NEWMARK implicite

On résout désormais les équations (1) et (2) avec un schéma de NEWMARK implicite défini par

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_n + \gamma \Delta t \ddot{q}_{n+1}\end{aligned}$$

On choisit $\gamma = 0.5$ et $\beta = 0.25$.

3.1) Comment sont définies les variables $\ddot{\rho}_0$ et $\ddot{\theta}_0$?

3.2) Le système d'équations à résoudre étant non linéaire et le schéma implicite, à l'instant t_{n+1} , q_{n+1} , \dot{q}_{n+1} et \ddot{q}_{n+1} sont les solutions d'un système d'équations non linéaires que l'on détermine par un calcul itératif. Les valeurs initiales à l'instant t_{n+1} s'obtiennent en faisant

$$\begin{aligned} q_{n+1}^0 &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_n \\ \dot{q}_{n+1}^0 &= \dot{q}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_n \\ \ddot{q}_{n+1}^0 &= 0 \end{aligned}$$

3.2.1) Quelle quantité doivent minimiser les variables ρ_{n+1} , $\dot{\rho}_{n+1}$, $\ddot{\rho}_{n+1}$, θ_{n+1} , $\dot{\theta}_{n+1}$ et $\ddot{\theta}_{n+1}$?

3.2.2) Quelles sont les six relations qui permettent d'obtenir à chaque itération les corrections $\Delta\rho_{n+1}$, $\Delta\dot{\rho}_{n+1}$, $\Delta\ddot{\rho}_{n+1}$, $\Delta\theta_{n+1}$, $\Delta\dot{\theta}_{n+1}$ et $\Delta\ddot{\theta}_{n+1}$?

3.3) Programmez sous SCILAB la résolution des équations (1) et (2) avec un schéma de NEWMARK implicite.

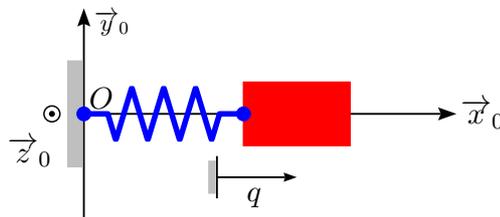
Donnez les valeurs numériques de q_n , \dot{q}_n et \ddot{q}_n aux instants t_0 , t_1 et t_2 .

On prendra $\Delta t = 0.01$ s. On précisera la valeur de la tolérance choisie pour le test d'arrêt sur les itérations.

3.4) Quelle particularité présenterait la résolution des équations (1) et (2) avec un schéma de NEWMARK explicite ?

oscillateur non linéaire à un degré de liberté

On considère l'oscillateur non linéaire de masse m défini par la figure ci-dessous.



Le ressort de rappel de cet oscillateur est non linéaire. La force de rappel qu'il exerce sur la masse m est de la forme

$$\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow m} = -k q (1 + a q^2) \vec{x}_0 \quad (1)$$

où k et a sont deux constantes positives qui caractérisent ce ressort. q représente le déplacement de la masse m . Lorsque ce déplacement est nul, la force de rappel exercée par le ressort sur la masse m est nulle. On note ω_0 la quantité définie par

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Avec ces notations, on obtient que les mouvements d'oscillations libres de la masse m sont solution de l'équation :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q (1 + a q^2) = 0 \quad (2)$$

Pour les applications numériques, on prendra :

$$q_0 = 2 \quad \dot{q}_0 = 0 \quad \omega_0 = 2\pi \text{ rad.s}^{-1} \quad a = 0.1 \text{ m}^{-2} \quad (3)$$

On souhaite intégrer numériquement l'équation (2) sur l'intervalle de temps $[0, T_0]$ avec $T_0 = 6$ s.

1. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

Les schémas de NEWMARK sont des schémas d'intégration en temps adaptés aux équations différentielles d'ordre 2. Ils sont définis par les deux relations (4) et (5)

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{j+1} \quad (4)$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \gamma \Delta t \ddot{q}_{j+1} \quad (5)$$

γ et β sont deux constantes caractéristiques qui permettent de définir ces schémas. Le schéma de NEWMARK explicite est défini par

$$\gamma = 0.5 \quad \beta = 0$$

1.1 Si q_j \dot{q}_j \ddot{q}_j désignent les valeurs des fonctions $q(t)$, $\dot{q}(t)$ et $\ddot{q}(t)$ à l'instant t_j et q_{j+1} \dot{q}_{j+1} \ddot{q}_{j+1} les valeurs de ces trois fonctions à l'instant t_{j+1} , quelles relations permettent de déterminer q_{j+1} \dot{q}_{j+1} \ddot{q}_{j+1} lorsque q_j \dot{q}_j \ddot{q}_j sont des quantités connues ?

1.2 Programmez la résolution de l'équation différentielle (2) avec un schéma de NEWMARK explicite .

1.3 On choisit $\Delta t = 0.02 \text{ s}$. Donnez les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s , Δt , $2 \Delta t$ et T_0 .

2. Résolution avec un schéma de NEWMARK implicite

Le schéma de NEWMARK implicite est défini par

$$\gamma = 0.5 \quad \beta = 0.25$$

L'équation différentielle (2) étant non linéaire et le schéma d'intégration implicite, à chaque instant t_j où on cherche à calculer la solution, il est nécessaire de résoudre de façon itérative un système d'équations.

2.1 Quelle quantité doit-on chercher à minimiser ?

2.2 \ddot{q}_{j+1}^* représentant une valeur estimée de $\ddot{q}(t)$ à l'instant t_{j+1} , donnez l'expression analytique de la correction à appliquer à \ddot{q}_{j+1}^* lorsque la valeur absolue du résidu est supérieure à la précision souhaitée.

2.3 A l'instant t_{j+1} , on définit la première estimation des variables q_{j+1} \dot{q}_{j+1} \ddot{q}_{j+1} par

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{j+1}^0 &= 0 \\ \dot{q}_{j+1}^0 &= \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j \\ q_{j+1}^0 &= q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j \end{aligned}$$

Programmez la résolution de l'équation différentielle (2) avec un schéma de NEWMARK implicite.

2.4 On choisit $\Delta t = 0.02 \text{ s}$. Donnez les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s , Δt , $2 \Delta t$ et T_0 .

3. Energie mécanique

3.1 Comment est définie l'énergie mécanique pour cet oscillateur non linéaire ?

3.2 Programmez le calcul de cette énergie mécanique pour les deux schémas d'intégration.

3.3 Si on prend $\Delta t = 0.02 \text{ s}$, qu'observe-t-on ?

oscillateur non linéaire à un degré de liberté

On considère l'oscillateur non linéaire régi par l'équation ci-dessous :

$$\ddot{q} - \varepsilon \omega_0 \left[1 - \left(\frac{q}{y_0} \right)^2 \right] \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1)$$

où ω_0 , y_0 et ε sont trois constantes positives qui caractérisent cet oscillateur. Pour les applications numériques, on prendra :

$$q_0 = 0.1 \quad \dot{q}_0 = 0 \quad \omega_0 = 2\pi \text{ rad.s}^{-1} \quad y_0 = 2 \quad (2)$$

On souhaite intégrer numériquement l'équation (1) sur l'intervalle de temps $[0, T_0]$ avec $T_0 = 20 \text{ s}$.

Pour $j \in \mathbb{N}$, on note q_j , \dot{q}_j , \ddot{q}_j les valeurs des fonctions $q(t)$, $\dot{q}(t)$ et $\ddot{q}(t)$ à l'instant t_j défini par $t_j = j \Delta t$.

∴

1. Résolution avec un schéma de RUNGE KUTTA d'ordre 4-5

1.1.a Les schémas de RUNGE KUTTA étant des schémas d'intégration en temps adaptés aux équations différentielles d'ordre 1, comment faut-il transformer l'équation différentielle (1) ?

1.1.b Pour cette équation, comment est défini le vecteur d'état ?

1.2 Lorsqu'on utilise un schéma d'intégration de RUNGE KUTTA d'ordre 4-5, indiquez comment s'obtiennent les valeurs de q_{j+1} et \dot{q}_{j+1} à partir de celles de q_j et \dot{q}_j .

1.3 Programmez la résolution de l'équation différentielle (1) avec un schéma de RUNGE KUTTA d'ordre 4-5.

1.4 On choisit $\varepsilon = 4$ et $\Delta t = 0.025 \text{ s}$. Donnez les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s , Δt , $2 \Delta t$ et $5 \Delta t$.

2. Résolution avec un schéma de NEWMARK explicite

Les schémas de NEWMARK sont des schémas d'intégration en temps adaptés aux équations différentielles d'ordre 2. Ils sont définis par les deux relations (3) et (4)

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 (0.5 - \beta) \ddot{q}_j + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{j+1} \quad (3)$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \gamma \Delta t \ddot{q}_{j+1} \quad (4)$$

γ et β sont deux constantes caractéristiques qui permettent de définir ces schémas. Le schéma de NEWMARK explicite est défini par

$$\gamma = 0.5 \quad \beta = 0$$

2.1 Avec un schéma de NEWMARK explicite, comment obtient-on les valeurs de q_{j+1} , \dot{q}_{j+1} , \ddot{q}_{j+1} à partir de celles de q_j , \dot{q}_j , \ddot{q}_j ?

2.2 Programmez la résolution de l'équation différentielle (1) avec un schéma de NEWMARK explicite.

2.3 On choisit $\varepsilon = 4$ et $\Delta t = 0.025 \text{ s}$. Donnez les valeurs numériques de $q(t)$ pour les valeurs de t égales à 0 s , Δt , $2 \Delta t$ et $5 \Delta t$.

3. Comparaison des solutions fournies par les deux schémas d'intégration

On s'intéresse au cas $\varepsilon = 0.1$

3.1.1 Calculez les solutions fournies par les deux schémas d'intégration. On prendra $\Delta t = 0.01$ s pour le schéma de RUNGE KUTTA d'ordre 4-5 et $\Delta t = 0.02$ s pour le schéma de NEWMARK explicite.

3.1.2 Quelle remarque peut-on faire sur la convergence des deux schémas pour ce cas de calcul ?

3.1.3 Représentez la solution obtenue. Vous préciserez l'allure des deux graphes suivants : (t, q) et $\left(q, \frac{\dot{q}}{\omega_0}\right)$

On s'intéresse désormais au cas $\varepsilon = 5$

3.2.1 Calculez les solutions fournies par les deux schémas d'intégration. On utilisera les mêmes valeurs du pas de temps que pour la question 3.1.1 : $\Delta t = 0.01$ s pour le schéma de RUNGE KUTTA d'ordre 4-5 et $\Delta t = 0.02$ s pour le schéma de NEWMARK explicite.

3.2.2 Peut-on dire que les réponses calculées sont correctes ? Justifiez votre réponse.

3.2.3 En faisant varier les pas des temps pour les deux schémas, déterminez les valeurs des pas de temps à utiliser pour évaluer correctement la solution de l'équation (1).

3.2.4 Représentez la solution obtenue. Vous préciserez l'allure des deux graphes suivants : (t, q) et $\left(q, \frac{\dot{q}}{\omega_0}\right)$