

# OMPP 3

## Courants et champ magnétostatique

École Centrale Pékin

2019-2020

### Table des matières

<b>1 Distributions de courant électrique</b>	<b>2</b>
1.1 Densité volumique de courant . . . . .	2
1.2 Densité surfacique de courant . . . . .	4
<b>2 Champ magnétostatique</b>	<b>5</b>
2.1 Loi de BIOT et SAVART . . . . .	5
2.2 Analogie magnétostatique/électrostatique . . . . .	6
2.3 Ordres de grandeur . . . . .	6
<b>3 Symétrie des sources : symétrie des champs</b>	<b>6</b>
3.1 Plan de symétrie . . . . .	6
3.2 Plan d'antisymétrie . . . . .	7
3.3 Invariance d'une distribution de courants . . . . .	8

# 1 Distributions de courant électrique

## 1.1 Densité volumique de courant

### 1.1.1 Définition

#### ■ Cas d'un seul porteur de charge $q$

On définit la *densité volumique de courant*  $\vec{j}(M, t)$  en un point  $M$  à la date  $t$  par :

$$\vec{j} = \underbrace{n(M, t)q}_{\rho(M, t)} \vec{v}(M, t) \quad (\text{unité : } \text{A} \cdot \text{m}^{-2})$$

où  $n(M, t)$  est la *densité volumique de particules*  $q$  et  $\vec{v}(M, t)$  leur vitesse.

#### ■ Cas de plusieurs porteurs de charges $q_k$

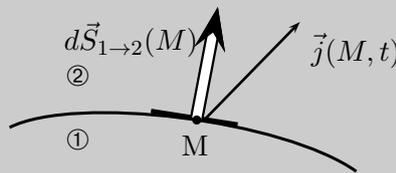
On définit alors la *densité volumique de courant*  $\vec{j}(M, t)$  en un point  $M$  à la date  $t$  par :

$$\vec{j}(M, t) \triangleq \sum_{\text{espèces } k=1}^{k=N} \underbrace{n_k(M, t)q_k}_{\rho_k(M, t)} \vec{v}_k(M, t) \quad (\text{unité : } \text{A} \cdot \text{m}^{-2})$$

### 1.1.2 Propriétés

- On démontre alors que la charge algébrique  $\delta q_{1 \rightarrow 2}(M, t)$  traversant pendant  $dt$  l'élément de surface  $d\vec{S}_{1 \rightarrow 2}(M) = dS(M) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  centré sur  $M$  et dirigé de ① vers ② s'écrit :

$$\delta q_{1 \rightarrow 2}(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_{1 \rightarrow 2}(M) dt$$



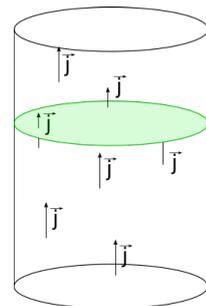
- Il s'en suit que le courant  $I_{\Sigma, 1 \rightarrow 2}(t)$  qui traverse la surface  $\Sigma$  à l'instant  $t$  dans le sens ① vers ② est :

$$I_{\Sigma, 1 \rightarrow 2}(t) = \iint_{M \in \Sigma} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_{1 \rightarrow 2}(M)$$

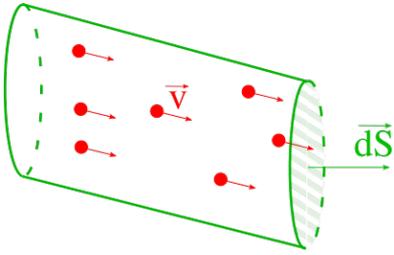
**Le courant est égal au flux de la densité volumique de courant**

Cette dernière relation rappelle bien que l'unité de  $\vec{j}(M, t)$  est  $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$  (alors que  $\vec{j}(M, t)$  se nomme vecteur densité **volumique** de courant).

$\vec{j}(M, t)$  correspond au courant qui traverse une surface.



 Démontrer l'expression de  $\delta q_{1 \rightarrow 2}(M, t)$  en fonction de  $\vec{j}(M, t)$  puis en déduire l'expression de  $I_{\Sigma, 1 \rightarrow 2}(t)$



- $\delta q_{1 \rightarrow 2}$  correspond à la charge qui traverse  $d\vec{S}$  pendant  $dt$
- Soit  $\vec{v}$  la vitesse des particules chargées

Les particules qui traversent  $d\vec{S}$  pendant  $dt$  sont les particules dans le tube dessiné.

Le volume du tube est  $V = d\vec{S} \cdot \vec{v} dt$  distance parcourue par une particule en  $dt$

La charge qui traverse est donc  $\delta q_{1 \rightarrow 2} = n q V = \underbrace{nq \vec{v}}_{\vec{j}} d\vec{S} dt$

Ainsi  $\delta q_{1 \rightarrow 2} = \vec{j} \cdot d\vec{S}_{1 \rightarrow 2} dt$

## 1.2 Densité surfacique de courant

### 1.2.1 Définition

■ Dans le cas où une dimension du problème est très petite devant les deux autres dimensions, on peut être amené à définir un *vecteur densité surfacique de courant*  $\vec{j}_s(M, t)$  tel que :

$$\vec{j}_s(M, t) = \int_{\text{«é.l.»}} \vec{j}(M, t) dz$$

où  $z$  désigne la dimension négligeable et «é.l.» signifie «épaisseur locale».

■ Le vecteur densité de courant surfacique  $\vec{j}_s(M, t)$  s'exprime en  $A \cdot m^{-1}$ .

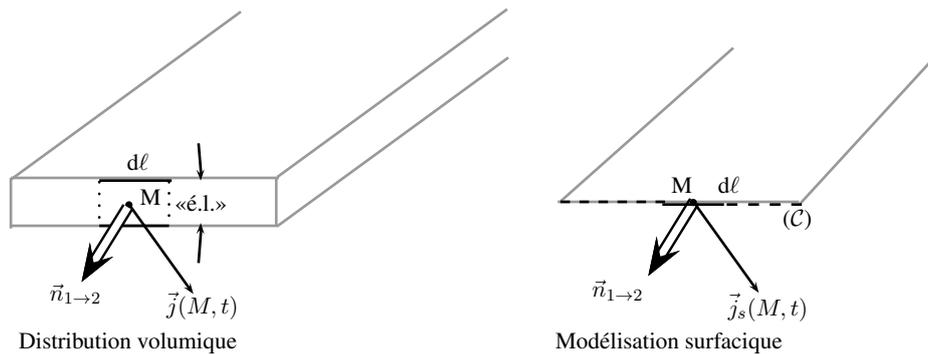


FIGURE 1 – Modélisation surfacique

### 1.2.2 Propriétés

• On adopte une modélisation surfacique (voir figure 1 à droite). Le vecteur  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  est le vecteur normal à la portion de longueur  $dl$  de la courbe  $(C)$  et dirigé de ① vers ②.

La charge algébrique  $\delta q_{1 \rightarrow 2}(M, t)$  traversant (de ① vers ②) pendant  $dt$  l'élément de longueur  $dl$  centré sur  $M$  est :

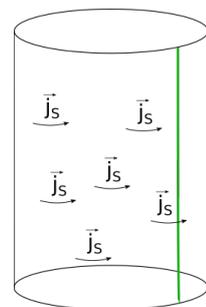
$$\delta q_{1 \rightarrow 2}(M, t) = \vec{j}_s(M, t) \cdot \underbrace{dl \vec{n}_{1 \rightarrow 2}}_{\neq dl \vec{e}_z} dt$$

• Le courant  $I_{C,1 \rightarrow 2}(t)$  traversant la courbe  $C$  à l'instant  $t$  de ① vers ② est :

$$I_{C,1 \rightarrow 2}(t) = \int_{M \in C} \vec{j}_s(M, t) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} dl$$

Cette dernière relation rappelle bien que l'unité de  $\vec{j}_s(M, t)$  est  $A \cdot m^{-1}$  (alors que  $\vec{j}(M, t)$  se nomme vecteur densité **surf**acique de courant).

$\vec{j}(M, t)$  correspond au courant qui traverse une longueur.



**Remarque :** Beaucoup d'élèves confondent  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} dl$  avec  $d\vec{l} \triangleq d\vec{M}$ . C'est une fâcheuse erreur...et bien évitable en faisant un petit dessin pour se rappeler de la géométrie du problème.

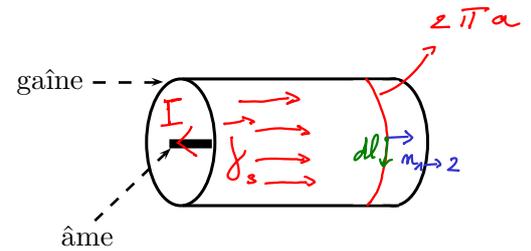
 La tresse située dans la gaine d'un câble coaxial (cylindre d'axe Oz, de rayon  $a$ ) est parcourue par des courants surfaciques de densité uniforme  $\vec{j}_s = j_0 \vec{u}_z$  engendrant un courant  $I$ . Exprimer le lien entre  $j_0$ ,  $I$  et  $a$ .

Le courant  $I$  passe dans un sens par l'âme et dans l'autre par la gaine. Le contour de la gaine est  $2\pi a$

$$\text{Ainsi } I = \int \vec{j}_s \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} dl = j_0 2\pi a$$

Donc

$$I = 2\pi a j_0$$



## 2 Champ magnétostatique

### 2.1 Loi de Biot et Savart

■ La définition de l'élément de courant  $d\vec{C}(P)$  au point P dépend de la nature de la distribution :

- si la distribution est linéique :  $d\vec{C}(P) = I(P)d\vec{\ell}$  (le sens de  $d\vec{\ell}$  est imposé par la flèche d'orientation de I) ;
- si la distribution est surfacique :  $d\vec{C}(P) = \vec{j}_s(P)dS(P)$  ;
- si la distribution est volumique :  $d\vec{C}(P) = \vec{j}(P)d\tau(P)$ .

■ Chaque élément de courant  $d\vec{C}(P)$  crée en M le champ magnétostatique élémentaire :

$$d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

■ Le champ magnétique résultant en M est la somme des champs élémentaires créés par chaque élément de courant lorsque P parcourt la distribution. Ainsi pour une distribution linéique ( $\Gamma$ ) de courants, on obtient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in (\Gamma)} \frac{I(P)d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

■ Le champ magnétique est *défini* et *continu* si la distribution de courants est *volumique*. En revanche, il peut présenter une *discontinuité* et *ne pas être défini* en des points d'une *distribution surfacique* ou *linéique* de courants.

■ La relation entre la cause  $d\vec{C}(P)$  et l'effet  $\vec{B}(M)$  est linéaire ce qui permet d'utiliser le *théorème de superposition*.

## 2.2 Analogie magnétostatique/électrostatique

La forte analogie entre l'écriture de la loi de BIOT et SAVART et celle de COULOMB permet de diminuer l'effort de mémoire, la mémorisation de l'une entraînant celle de l'autre :

Magnétostatique	Électrostatique
$d\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{\ \overrightarrow{PM}\ ^3}$	$d\vec{E}_P(M) = \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\ \overrightarrow{PM}\ ^3}$
Élément de courant $d\vec{C}(P)$	Élément de charges $dq(P)$
Perméabilité du vide $\mu_0$	Permittivité du vide $\frac{1}{\epsilon_0}$
Produit vectoriel $\wedge$	Produit classique $\cdot$

On donne :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  et on admettra que  $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$ .

## 2.3 Ordres de grandeur

- A Paris, la composante horizontale du champ magnétique terrestre a pour valeur  $B_{\parallel} = 0,3 \text{ G}$  tandis que la composante verticale a pour valeur  $B_{\perp} = 0,4 \text{ G}$  où  $1 \text{ G} \triangleq 10^{-4} \text{ T}$ .
- Un aimant permanent peut créer des champs de l'ordre du mT mais on trouve désormais des «super aimants» destinés au grand public (allez faire un tour sur internet!) qui produisent un champ permanent de l'ordre du tesla!
- Des bobines supraconductrices peuvent créer des champs magnétiques de l'ordre de 20 T.
- Dans les étoiles à neutrons, on prédit l'existence de champs magnétiques de l'ordre de  $10^8 \text{ T}$ .

## 3 Symétrie des sources : symétrie des champs

### 3.1 Plan de symétrie

#### 3.1.1 Définition

Un plan  $\pi$  constitue un plan de symétrie d'une distribution de courants  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

$$\forall P \in \mathcal{D}, \quad d\vec{C}(P, t) = d\vec{C}(P', t) \text{ où } P' = \mathcal{S}_{\pi}(P)$$

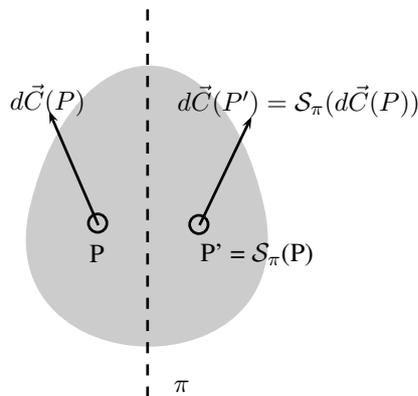


FIGURE 2 – Exemple d'un plan  $\Pi$  constituant un plan de symétrie des courants

### 3.1.2 Théorème relatif au champ magnétique

Soit  $\pi$  un plan de symétrie de la distribution de courants.

- Si  $M' = \mathcal{S}_\pi(M)$  alors  $\vec{B}(M') = -\mathcal{S}_\pi(\vec{B}(M))$ .
- Si  $M \in \pi$  alors  $\vec{B}(M) \perp \pi$ .

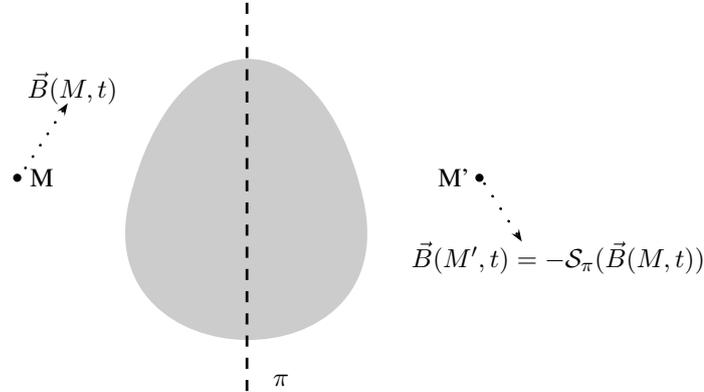


FIGURE 3 – Antisymétrie du champ magnétique par rapport à un plan de symétrie des courants

## 3.2 Plan d'antisymétrie

### 3.2.1 Définition

Un plan  $\pi^*$  constitue un plan d'antisymétrie d'une distribution de courants  $\mathcal{D}$  si et seulement si :

$$\forall P \in \mathcal{D}, d\vec{C}(P, t) = -d\vec{C}(P', t) \text{ où } P' = \mathcal{S}_{\pi^*}(P)$$

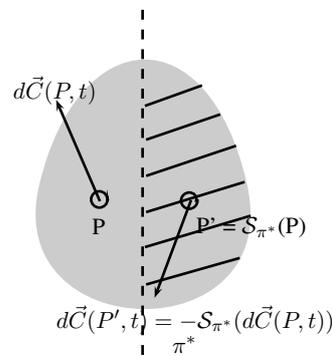


FIGURE 4 – Exemple d'un plan  $\pi^*$  constituant un plan d'antisymétrie des courants

### 3.2.2 Théorème relatif aux champ magnétique

Soit  $\pi^*$  un plan d'antisymétrie de la distribution de courants.

- Si  $M' = \mathcal{S}_{\pi^*}(M)$  alors  $\vec{B}(M', t) = \mathcal{S}_{\pi^*}(\vec{B}(M, t))$ .
- Si  $M \in \pi^*$  alors  $\vec{B}(M, t) \in \pi^*$ .

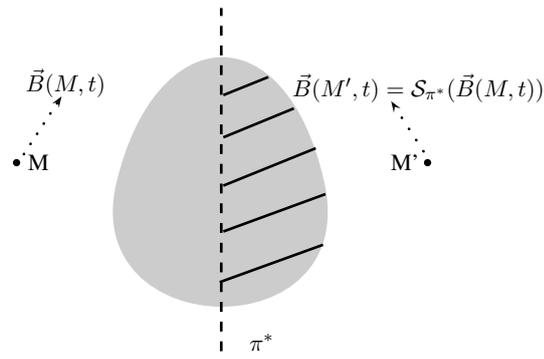


FIGURE 5 – Symétrie du champs magnétique par rapport à un plan d’antisymétrie des courants

### 3.3 Invariance d’une distribution de courants

#### 3.3.1 Définition

On dit d’une distribution de courants  $\{d\vec{C}(\alpha, \beta, \gamma)\}$  qu’elle est invariante selon la coordonnée  $\gamma$  si chacune des composantes de la distribution n’en dépend effectivement pas :  $\{d\vec{C}(\alpha, \beta, \gamma) = dC_\alpha(\alpha, \beta, \gamma)\vec{e}_\alpha + dC_\beta(\alpha, \beta, \gamma)\vec{e}_\beta + dC_\gamma(\alpha, \beta, \gamma)\vec{e}_\gamma\}$ .

#### 3.3.2 Théorème

Si une distribution de courants est invariante selon la coordonnée  $\gamma$ , les **composantes du champ magnétique ne dépendent pas de  $\gamma$**  :

$$\vec{B}(M) = B_\alpha(\alpha, \beta, \gamma)\vec{e}_\alpha + B_\beta(\alpha, \beta, \gamma)\vec{e}_\beta + B_\gamma(\alpha, \beta, \gamma)\vec{e}_\gamma$$