

# OMPP 3

## Courants et champ magnétostatique

École Centrale Pékin

2019-2020

### Table des matières

<b>4</b>	<b>Topographie du champ magnétostatique</b>	<b>2</b>
4.1	Flux du champ magnétique . . . . .	2
4.2	Propriétés des lignes de champ . . . . .	3
4.3	Exemples . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Théorème d'Ampère</b>	<b>5</b>
5.1	Circulation d'un champ de vecteurs . . . . .	5
5.2	Enoncé . . . . .	5
5.3	Applications du théorème d'Ampère . . . . .	6

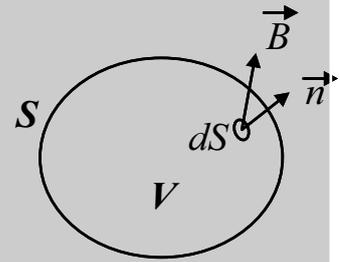
## 4 Topographie du champ magnétostatique

### 4.1 Flux du champ magnétique

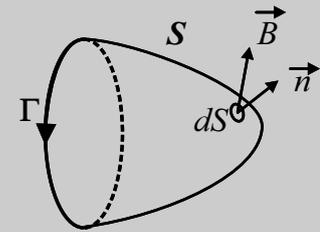
■ Le champ magnétique est à flux conservatif

Soit une surface  $S$  fermée décrivant un volume  $V$ , on a alors :

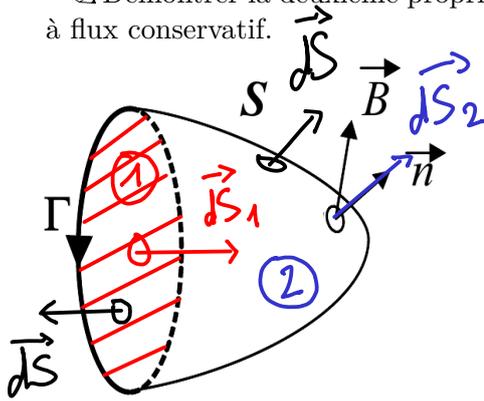
$$\oint_{M \in S} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) = 0$$



■ Le flux de  $\vec{B}(M, t)$  à travers  $S$  ne dépend pas de  $S$  mais uniquement du contour  $\Gamma$  sur lequel s'appuie  $S$ .



 Démontrer la deuxième propriété du champ magnétique en utilisant que le champ magnétique est à flux conservatif.



Soit les 2 surfaces ① et ② toutes les 2 s'appuyant sur le contour  $\Gamma$   
Soit la surface fermée  $S = \overline{S_1} + \overline{S_2}$

$$\text{On a } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Or  $S$  est une surface fermée orientée par convention vers l'extérieur donc

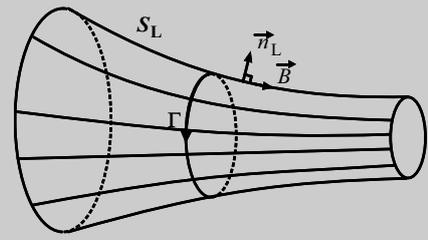
$$\vec{dS}_1 = -d\vec{S} \text{ et } \vec{dS}_2 = d\vec{S}$$

Ainsi  $\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$  puis  $\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2$

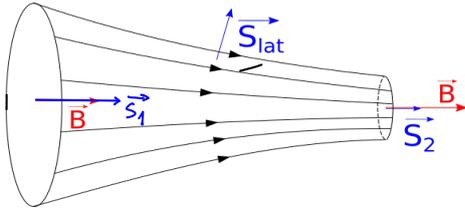
Le flux de  $\vec{B}$  ne dépend que du contour sur lequel s'appuie la surface.

■ Soit le champ vectoriel  $\vec{B}(M, t)$  à flux conservatif. Soit une surface  $S_{lat}$  engendrée par un ensemble de lignes de champ de  $\vec{B}$  passant par les points d'un contour fermé. On obtient ainsi un tube de champ.

À travers une section quelconque du tube de champ, le flux de  $\vec{B}$  se conserve.



✎ Démontrer la propriété précédente en utilisant le fait que  $\vec{B}$  soit à flux conservatif.



Le tube de champ forme une surface fermée  $S = S_1 + S_2 + S_{lat}$

$$\text{donc } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$0 = -\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_{lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{lat}$$

0 car  $\vec{B} \perp d\vec{S}_{lat}$   
pour un tube de champ

Ainsi  $\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2$ , le flux se conserve

De plus, si  $\vec{B}$  est uniforme sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  on a :

$$B_1 S_1 = B_2 S_2 \text{ donc } S_1 \gg S_2 \Rightarrow B_1 \ll B_2$$

Conséquence qualitative : quand la section d'un tube de champ diminue, la norme de  $\vec{B}$  augmente.

## 4.2 Propriétés des lignes de champ

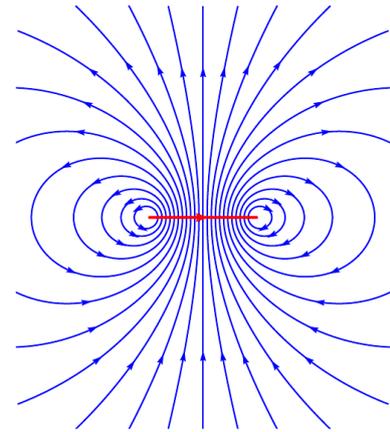
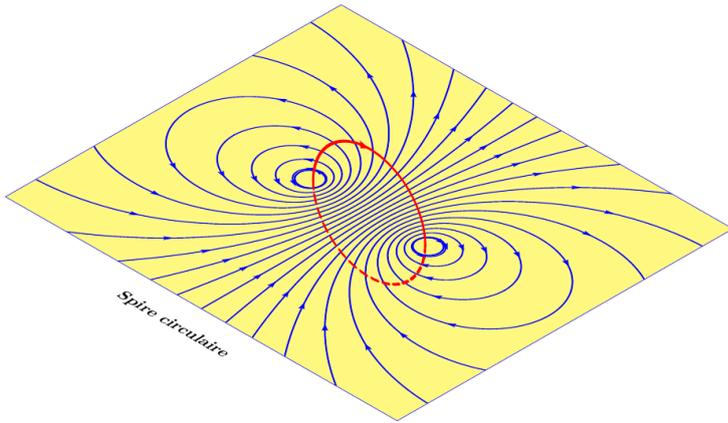
1. Les lignes de champ magnétostatique sont symétriques par rapport à un plan de symétrie ou d'antisymétrie des sources.
2. Les lignes de champ magnétostatique coupent orthogonalement un plan de symétrie des sources.
3. La valeur du champ magnétostatique varie le long d'un tube de champ de section variable : il s'accroît lorsque les lignes de champ se resserrent.
4. Alors que les lignes de champ électrostatique sont toujours ouvertes<sup>a</sup> au contraire les lignes de champ magnétostatique sont toujours fermées<sup>b</sup>.
5. Les lignes de champ entourent les sources du champ et sont orientées par la règle de la main droite

a. Cette propriété vient du fait que  $\oint_{M \in (\Gamma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell} = 0$

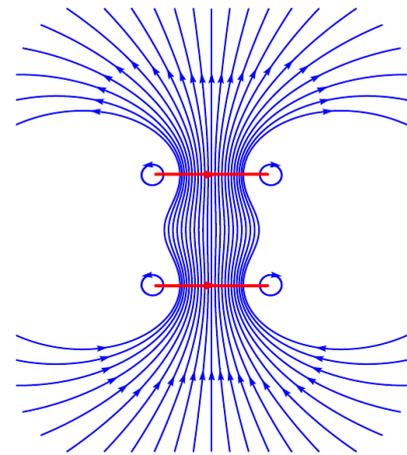
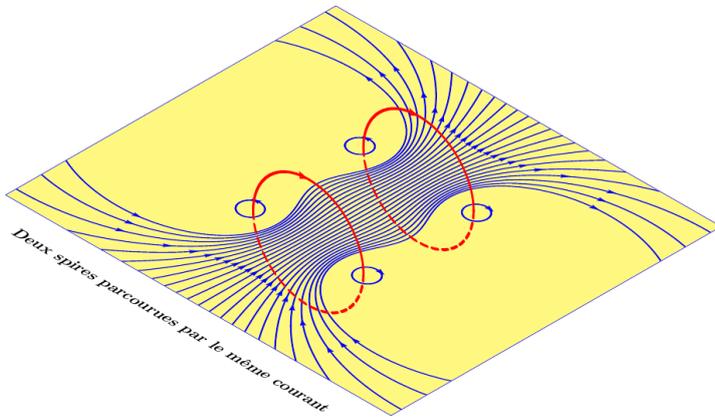
b. Cette propriété vient du fait que  $\oint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0$

### 4.3 Exemples

#### ■ Spire circulaire parcourue par un courant stationnaire



#### ■ Deux spires circulaires parcourues par des courants stationnaires de même intensité



#### ■ Solénoïde cylindrique de longueur finie parcouru par un courant stationnaire

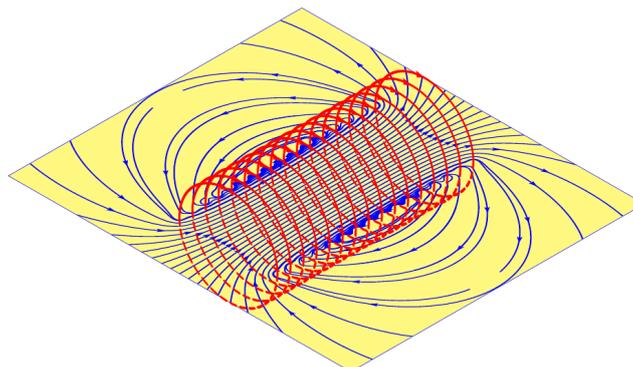
Un solénoïde est un enroulement de spires circulaires (rayon  $R$ ) jointive (cf. figure 2) ou non (cf. figure 1) parcourues par un courant d'intensité  $I$ . On note en général  $L$  sa longueur et  $n$  le nombre de spires par mètre.



FIGURE 1 – Solénoïde à spires non jointives



FIGURE 2 – Solénoïde à spires jointives



## 5 Théorème d'Ampère

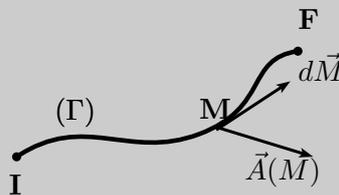
### 5.1 Circulation d'un champ de vecteurs

■ On définit la *circulation élémentaire* au point  $M$  notée  $\delta\mathcal{C}(M)$  du champ de vecteurs permanent  $\{\vec{A}(M) \text{ où } M \in \mathcal{D}\}$  par :

$$\delta\mathcal{C}(M) \triangleq \vec{A}(M) \cdot d\vec{M}$$

■ Soit  $(\Gamma)$  une courbe reliant deux points  $I$  et  $F$  (et située dans  $\mathcal{D}$ ). On nomme *circulation du champ de vecteurs*  $\{\vec{A}(M) \text{ où } M \in \mathcal{D}\}$  de  $I$  à  $F$  le long de  $(\Gamma)$ , l'intégrale de la circulation élémentaire  $\delta\mathcal{C}(M)$  lorsque  $M$  va de  $I$  à  $F$  :

$$\mathcal{C}_{I(\Gamma)}^F \triangleq \int_{I \text{ } M \in (\Gamma)}^F \delta\mathcal{C}(M) = \int_{I \text{ } M \in (\Gamma)}^F \vec{A}(M) \cdot d\vec{M}$$



A priori, la circulation  $\mathcal{C}_{I(\Gamma)}^F$  du champ de vecteurs *dépend du chemin*  $(\Gamma)$  emprunté pour aller de  $I$  à  $F$ .

■ Un champ  $\vec{A}(M)$  est dit à *circulation conservative* lorsque sa circulation est indépendante du chemin suivi pour aller de  $I$  à  $F$ .

En particulier pour un champ à circulation conservative le long d'un contour *fermé* :

$$\mathcal{C}_{(\Gamma)} = \oint_{(\Gamma)} \vec{A}(M) \cdot d\vec{M} = 0$$

Le champ électrostatique est un exemple de champ à circulation conservative.

### 5.2 Enoncé

Soit un contour fermé et orienté, la circulation du champ magnétostatique le long de ce contour est égale au produit de la perméabilité du vide  $\mu_0$  par l'intensité enlacée  $I_{enl}$  par le contour :

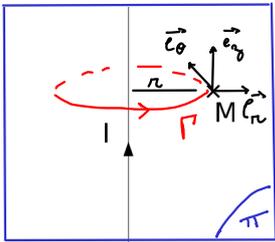
$$\oint_{M \in (\Gamma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \underbrace{\iint_{M \in (S)} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}(M)}_{\triangleq I_{enl}}$$

La surface élémentaire  $d\vec{S}(M)$  est orientée selon la règle de la main droite par rapport au contour fermé.

### 5.3 Applications du théorème d'Ampère

#### ■ Champ magnétique créé par un fil infini

Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace créé par un fil infini parcouru par un courant stationnaire d'intensité  $I$ .



Tous les plans contenant le fil sont des plans de symétrie de la distribution de courant.

donc  $\vec{B}$  leur est perpendiculaire. Ainsi  $\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_\theta$

La distribution de courant est invariante par rotation autour du fil et par translation le long du fil

Ainsi  $\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_\theta$

Nous pouvons appliquer le théorème d'Ampère sur le contour  $\Gamma$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \oint_{\Gamma} B(r) r d\theta \vec{e}_\theta = \mu_0 I \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

Ainsi  $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

#### ■ Champ magnétique créé par un cylindre plein

Un fil conducteur assimilé à un cylindre infini de rayon  $a$  et d'axe  $Oz$  est parcouru par un courant d'intensité  $I$  uniformément répartie sur la section du fil.

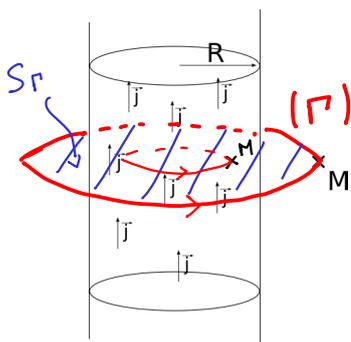
Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace.

Les symétries et invariances de ce problème sont les mêmes que pour le fil infini, donc :

$$\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_\theta$$

On applique le théorème d'Ampère sur le contour  $(\Gamma)$  en séparant 2 cas :

- M à l'intérieur du cylindre



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_r} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{avec } \vec{j} \text{ uniforme sur la surface } S_r$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 \quad \text{d'où} \quad B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} r$$

De plus, comme le courant est réparti uniformément :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \pi R^2$$

Ainsi  $j = \frac{I}{\pi R^2}$  et  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$

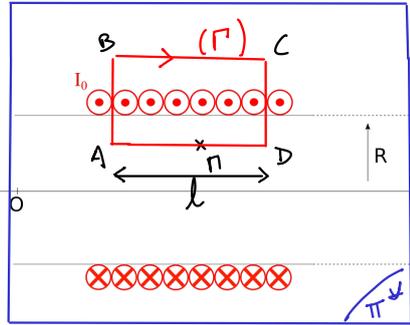
- M à l'extérieur du cylindre

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \text{d'où} \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad \text{puis} \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

■ Champ magnétique créé par un solénoïde cylindrique infini

On considère désormais un solénoïde *infini* de rayon  $R$ . On admet que le champ magnétique est nul en dehors du solénoïde,

✎ Montrer que le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde et vaut :  $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$



Le plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie donc  $\vec{B}(r)$  appartient à ce plan.

Le plan (Oxy) est un plan de symétrie de la distribution de courant, car le solénoïde est infini.

Donc  $\vec{B}(r)$  est perpendiculaire à ce plan, ainsi :

$$\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_z$$

La distribution de courant est invariante par translation selon l'axe z et par rotation autour de l'axe z donc :

$$\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_z$$

On prend comme contour d'Ampère un cadre de largeur AD =  $l$  et on applique le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_D^A B(r) \vec{e}_z \cdot dz \vec{e}_z = -B l$$

$0$  car  $\vec{B} \perp d\vec{l}$  (for segments AB, BC, CD)  
 $0$  car  $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$  (for segment DA)

Ainsi  $-B l = -\mu_0 N I$   $\rightarrow$   $N$  fils de courant  $B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I$

orientation de  $S_{\Gamma}$

où  $n = \frac{N}{l}$  est le nombre de spires par unité de longueur

Cette relation doit retenue car elle est très classique et permet, entre autre, de vérifier la dimension d'expressions du champ magnétique.