OMPP 3
Courants et champ magnétostatique

École Centrale Pékin

2019-2020

Table des matières

6 Calcul direct de champ magnétique

6.1 Méthode

La démarche à suivre pour déterminer un champ magnétique est la suivante :

1. L'étude des plans de (anti)symétrie de la distribution de courants contenant le point M considéré, permet de déterminer la direction du champ en M : $\vec{B}(M)$.
2. L'étude des invariances de la distribution de courants, permet de déterminer de quelles coordonnées **les composantes** du champ magnétique dépendent.
3. On peut alors déterminer complètement le champ magnétique :

- Soit par l'utilisation du théorème d'Ampère si le champ magnétique est de **«haute symétrie»** (cf 5.) :
  a) on choisit un contour «mathématique» fermé (Γ) passant par le point M où l'on cherche à déterminer le champ. Ce choix respecte en général la symétrie et on se trouve souvent dans deux cas de figure :
  — ou bien $d\vec{\ell}(P)$ et $\vec{B}(P)$ sont colinéaires,
  — ou bien ils sont orthogonaux.
  Dans les deux cas $\overrightarrow{B}(P).d\ell(P)$ s'évalue aisément.
  b) On calcule $\oint_{P\in(\Gamma)} \overrightarrow{B}(P).d\overrightarrow{\ell}$ ce qui se fait sans difficulté comme on l'a évoqué au point 3a.
  c) On calcule $\mu_0 \underbrace{\iint_{P\in(S)} \overrightarrow{j}(P).d\overrightarrow{S}(P)}_{\triangleq I_{enl}}$.
  d) On «rabiboche» les bouts. On en déduit le champ magnétique.

- Soit par un calcul direct (loi de Biot et Savart).

$$\boxed{d\overrightarrow{B}_P(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\overrightarrow{C}(P)\wedge\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}}$$

— si la distribution est linéique : $d\vec{C}(P) = I(P)d\vec{\ell}$ (le sens de $d\vec{\ell}$ est imposé par la flèche d'orientation de I) ;
— si la distribution est surfacique : $d\vec{C}(P) = \vec{j}_s(P)dS(P)$;
— si la distribution est volumique : $d\vec{C}(P) = \vec{j}(P)d\tau(P)$.

6.2 Exemples de calculs par la loi de Biot et Savart

6.2.1 Champ magnétique créé sur l'axe d'une spire circulaire

On considère une spire de rayon R parcourue par un courant stationnaire d'intensité I (voir figure 1).

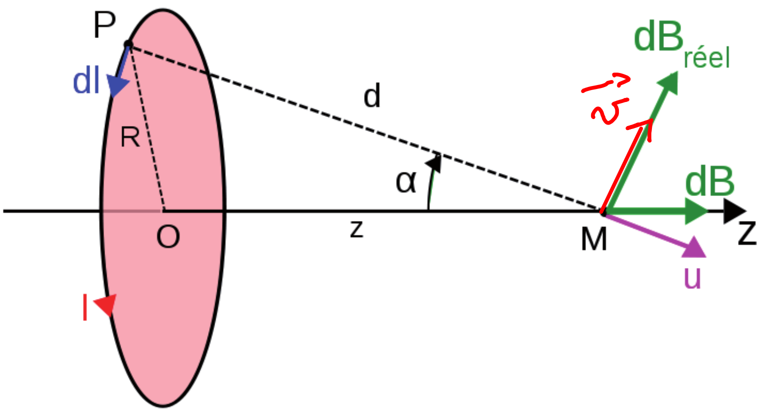

Figure 1 – Spire parcourue par un courant : notations

✎ Montrer que le champ magnétique en tout point $M(z)$ de l'axe de révolution de la spire s'écrit $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \, \vec{u}_z$.

Tout plan contenant Oz est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant donc $\vec{B} \propto \vec{u}_z$

Le système est invariant par rotation autour de l'axe Oz donc $B(M) = B(r, z)$

En particulier sur l'axe $\boxed{\vec{B}(M) = B(z)\,\vec{u}_z}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, \vec{dl} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{PM^2} \vec{v}$$

Seul la composante selon $\vec{u}_z$ est non nulle après intégration donc $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin\alpha}{PM^2} \vec{u}_z$

On a $PM = \frac{R}{\sin\alpha}$ d'où $\frac{1}{PM^2} = \frac{\sin^2\alpha}{R^2}$

Finalement $\vec{B} = \frac{\mu_0 I \sin^3\alpha}{4\pi R^2} \int dl \, \vec{u}_z = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\alpha \, \vec{u}_z}$

✎ Comment est modifié le résultat si la spire est remplacée par un bobinage de N spires d'extension spatiale similaire à celle d'une spire ?

Dans ce cas, d'après le théorème de superposition on obtient le résultat en remplaçant I par NI dans le résultat précédent

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2 R^2} \sin^3\alpha \, \vec{u}_z}$$

6.2.2 Champ magnétique créé par un segment de courant

On dispose d'un segment parallèle à laxe z parcouru par un courant i.

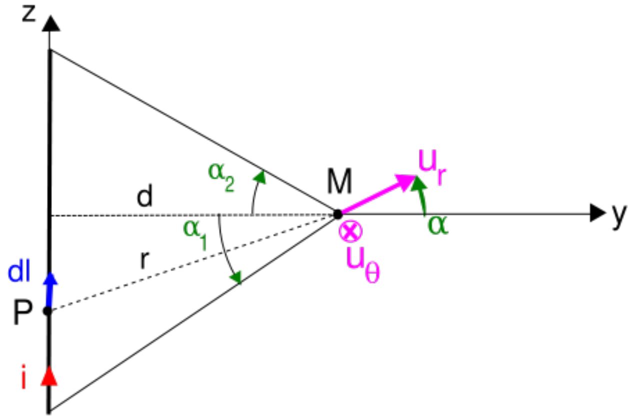

Figure 2 – Schéma du segment

✎ Montrer que le champ magnétique en un point M situé à une distance d du segment s'écrit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi d}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\vec{u}_\theta$$

La plan de la figure est un plan de symétrie des courants donc $\boxed{\vec{B} \propto \vec{u}_\theta}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\vec{dl} \wedge \vec{u_r}}{PM^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dz\cos\alpha}{PM^2} \quad (\text{car } \vec{dl} = dz\,\vec{u_z})$$

Or $\tan\alpha = \frac{z}{d}$ d'où $dz = d\,\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$

De plus $\cos\alpha = \frac{d}{PM}$ donc $\frac{1}{PM^2} = \frac{\cos^2\alpha}{d^2}$

Finalement $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha\,d\alpha$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\vec{u_\theta}}$$

(⚠ $\alpha_1 < 0$ ici)

✎ Que devient ce résultat lorsque le fil est infini. Commenter

Pour un fil infini $\alpha_2 \to +\frac{\pi}{2}$ et $\alpha_1 \to -\frac{\pi}{2}$

donc $\boxed{\vec{B}(M) \to \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{u_\theta}}$

On retrouve le résultat du fil infini obtenu avec le théorème d'Ampère

6.2.3 Champ magnétique créé sur l'axe d'un solénoïde cylindrique de longueur finie

Un solénoïde est un enroulement de spires circulaires (rayon R) jointives ou non parcourues par un courant d'intensité I. On notera L sa longueur et n le nombre de spires par mètre.

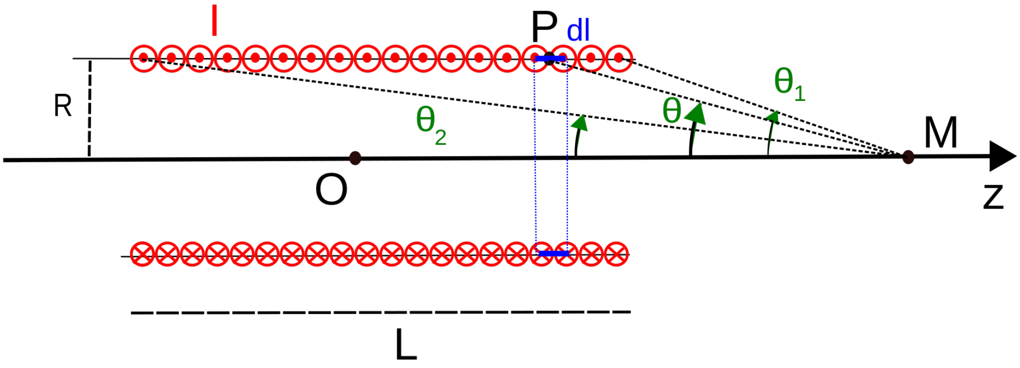

Figure 3 – schéma d'un solénoïde

✎ Montrer que le champ magnétique créé par le solénoïde en tout point M de l'axe de révolution s'écrit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)\vec{u}_z$$

Nous allons utiliser le résultat du 6.2.1

Pour N spires compactes on a vu $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\theta \, \vec{u}_z$

le segment dl du schéma précédent comporte $dN = n\,dl$ spires donc le champ élementaire qu'il crée est $\boxed{\vec{dB} = \frac{\mu_0 n I}{2R} \cdot dl \sin^3\theta \, \vec{u}_z}$

Or $z_M - z_P = \frac{R}{\tan\theta}$ donc $dl = dz_P = -\frac{R}{\sin^2\theta} d\theta$

Ainsi $B = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, d\theta = \boxed{\frac{\mu_0 n I}{2}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)}$

✎ Que devient ce résultat lorsque le solénoïde est infini ?

Pour le solénoïde infini $\theta_1 \to \pi$ et $\theta_2 \to 0$

Donc $\boxed{\vec{B}(M) \to \mu_0 n I \, \vec{u}_z}$

On retrouve le résultat obtenu avec le théorème d'Ampère