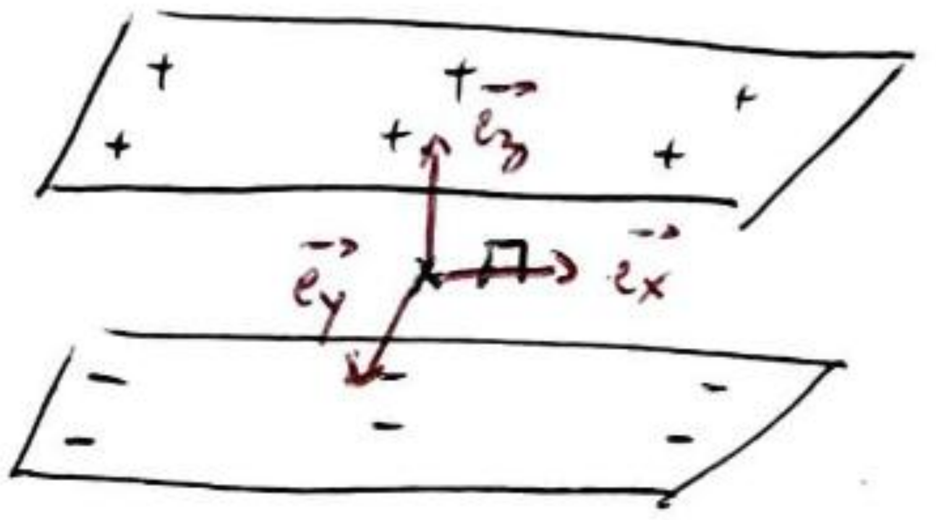
# OMPP

# TD2 - Correction

## Ex 1 : Condensateur plan

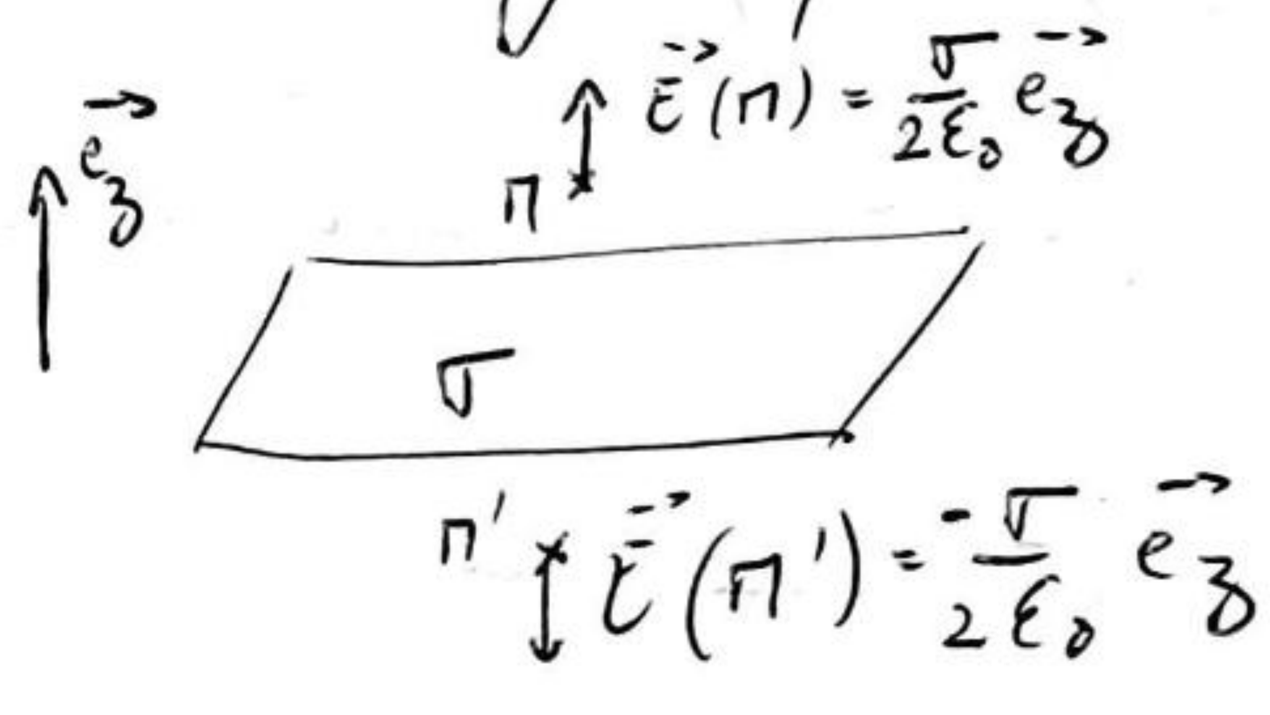
1)



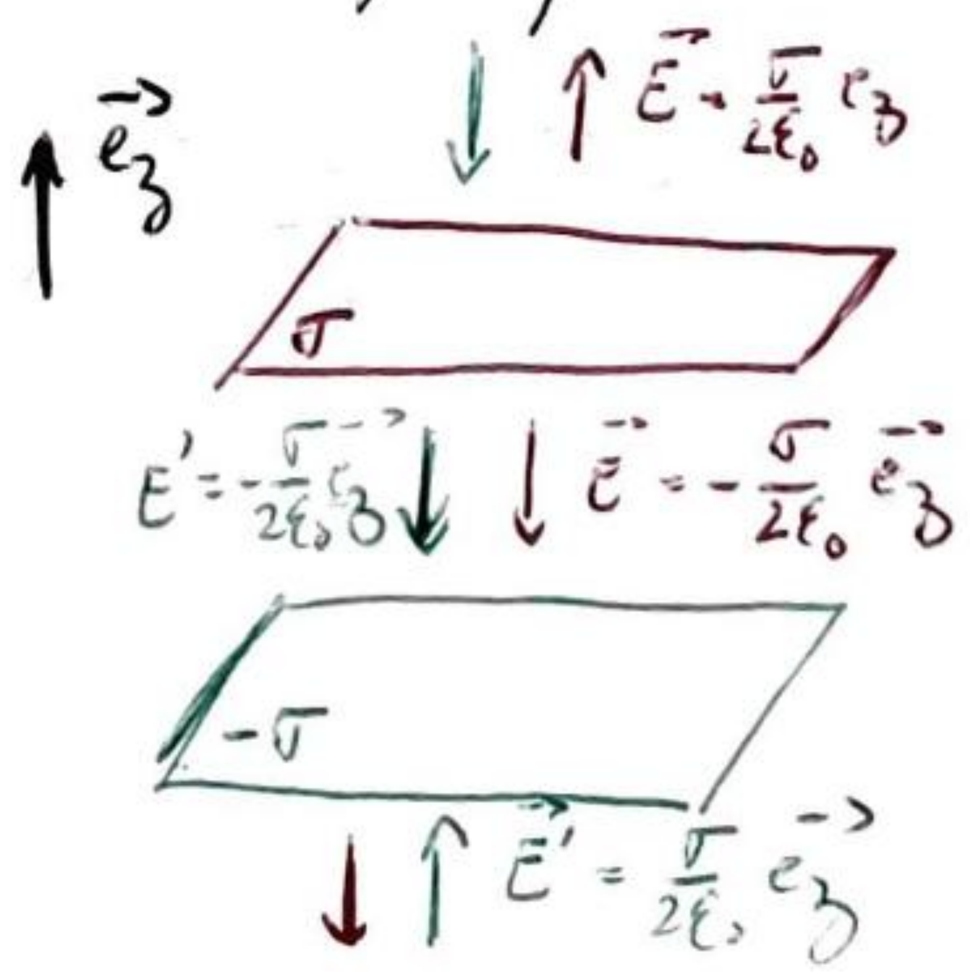

Le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est un d'antisymétrie des charges donc $\vec{E}$ lui est perpendiculaire

Ainsi $\boxed{\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_z}$

2) Soit le champ créé par une plaque chargée de densité surfacique de charge $\sigma$

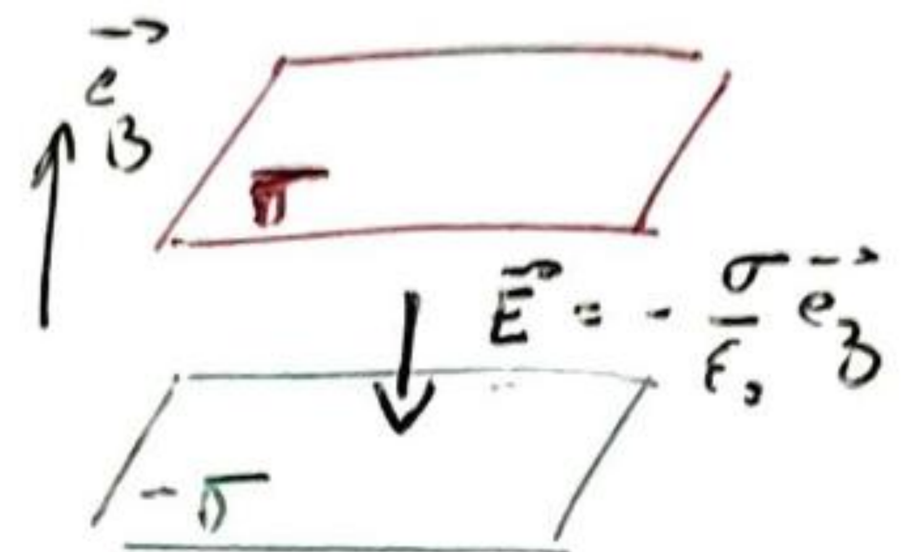



Un condensateur est la superposition de deux plaques de charges opposées :

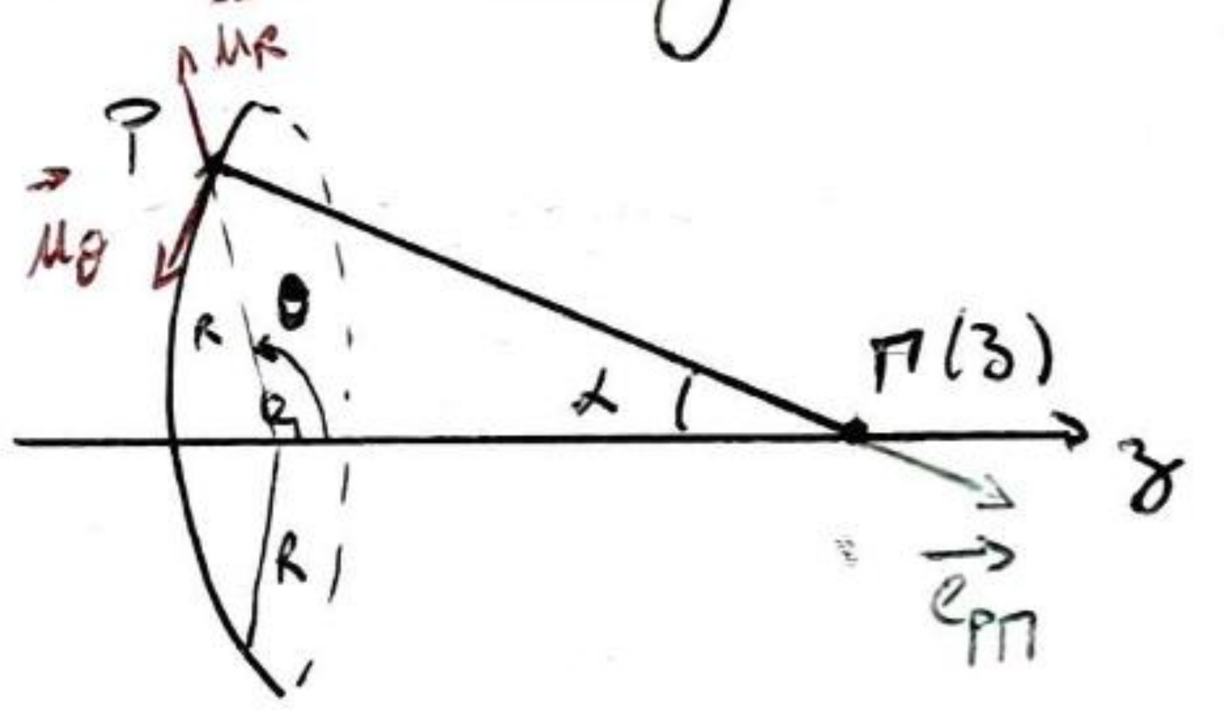


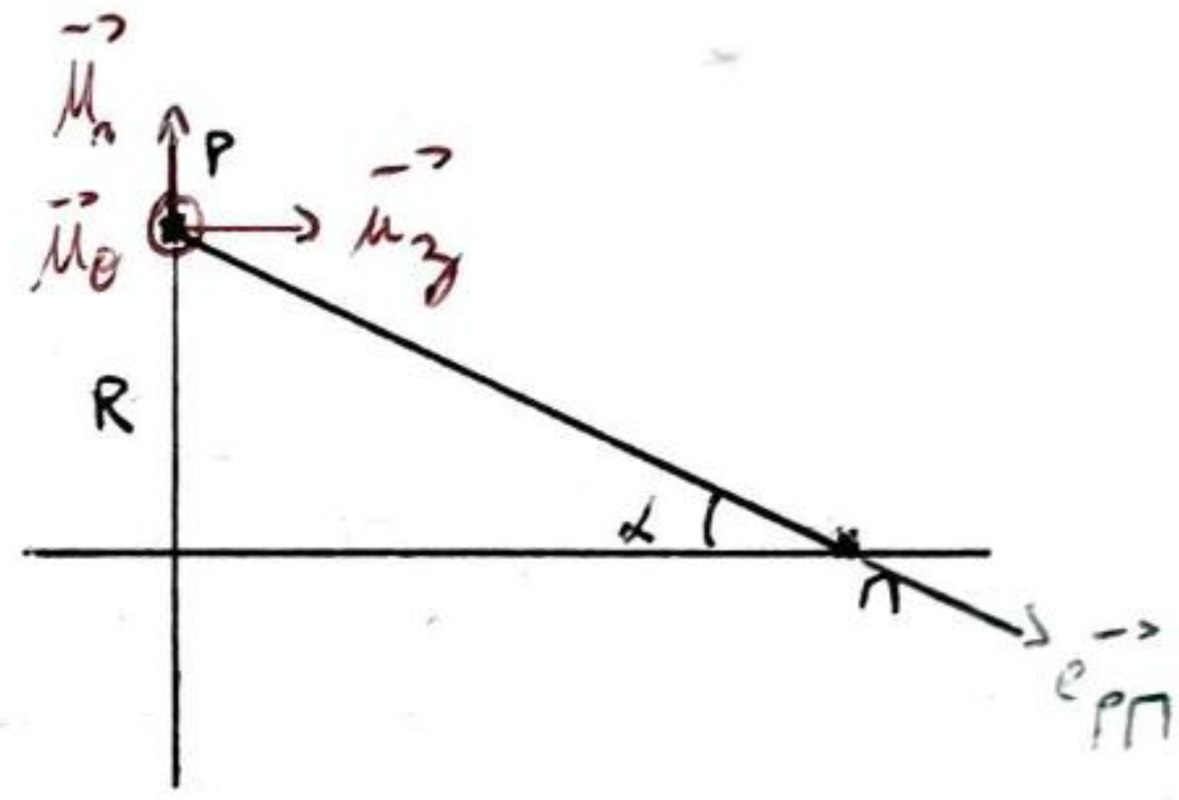
Le champ est nul seulement entre les deux plaques d'après le théorème de superposition.

Ainsi $\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_z}}$




## Ex 2 : Cercle chargé




Suivons la méthode du cours

1) Le problème est invariant par rotation d'angle $\theta$
les coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ semblent adaptées

2) La distribution de charge est linéique

$\boxed{dq = \lambda\, dl}$ avec $\boxed{dl = R\, d\theta}$

4) $PM = \sqrt{R^2 + z^2}$ donc $\frac{1}{PM^2} = \frac{1}{R^2+z^2}$

5) $\vec{e_{PM}} = \cos\alpha\, \vec{u_z} - \sin\alpha\, \vec{u_r}$

6) $d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda R\,d\theta}{R^2+z^2}\left(\cos\alpha\,\vec{u_z} - \sin\alpha\,u_R\right)\right)$

7) Tout plan contenant l'axe $Oz$ est un plan de symétrie de la distribution de charges donc $\vec{E}$ apartient à tous ces plans donc à $Oz$.

Les composantes selon $\vec{u_R}$ vont s'annuler, il n'est pas nécessaire de les intégrer

8) $\vec{E} = \int_{P\in D} \frac{\lambda R\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos\alpha}{R^2+z^2}\,\vec{u_z}$ or $\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$

Donc $\vec{E} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,d\theta\,\vec{u_z}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\,\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{u_z}}$$

## Ex 3 : Flux de champ électrostatique

La surface cylindrique est fermée, on peut appliquer le théorème de Gauss. Il n'y a pas de charges dans le volume donc :

$$\boxed{\phi = \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0}$$

Scanned by TapScanner

# Ex 4 : Boule chargée

1) Le problème est à symetrie sphérique donc $\vec{E}$ est radial : $\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}}$

(Tous plan contenant $\vec{e_r}$ est plan de symetrie donc $\vec{E} \propto \vec{e_r}$)
+ Invariance par rotation selon $\theta$ ou $\varphi$

2) Nous devons déterminer le volume de la partie chargée car $q = \iiint \rho_0 \, d\tau = \rho_0 \iiint d\tau = \rho_0 V$

Ainsi $V = \int_{\theta = -\pi}^{\pi} \int_{\varphi = 0}^{2\pi} \int_{r = R}^{R+a} d\tau$

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{R}^{R+a} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{R}^{R+a} r^2 \, dr$$ car les variables sont indépendantes

$$V = \left[-\cos\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \times 2\pi \times \left[\frac{r^3}{3}\right]_{R}^{R+a}$$

$$V = 4\pi \left(\frac{(R+a)^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right)$$

Ainsi $\boxed{Q = \rho_0 \, 4\pi \left(\frac{(R+a)^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right)}$

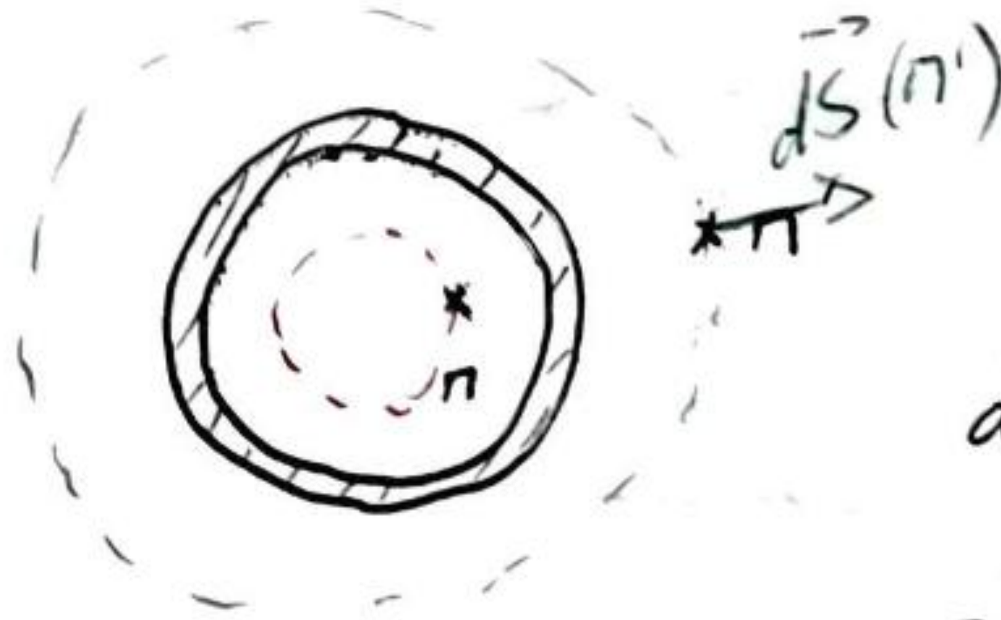
3) Dans le cas où $a \ll R$ on peut faire un développement limité : $(R+a)^3 = R^3\left(1+\frac{a}{R}\right)^3$

$$\simeq R^3\left(1+\frac{3a}{R}\right)$$

Ainsi $Q = \rho_0 4\pi \left(\frac{R^3}{3} + \frac{a}{R}R^3 - \frac{R^3}{3}\right)$

$$\boxed{Q = 4\pi a R^2 \rho_0}$$

On peut modéliser la boule comme une boule chargée en surface de densité surfacique de charge $\sigma$, on a alors $\boxed{Q = 4\pi R^2 \sigma}$ donc $\boxed{\sigma = a\rho_0}$ par analogie

4) 


En appliquant le théorème de Gauss à une sphère passant par le point où l'on veut calculer le champ on a :

• Pour $M$ (à l'intérieur)

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = 0 \quad \text{donc} \quad \vec{E}(M) = \vec{0}$$

• Pour $M'$ (à l'extérieur)

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \rho_0 a}{\varepsilon_0}$$

Comme $\vec{dS}$ est radial pour une sphère :

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint E\cdot dS = E \oiint dS = E\cdot 4\pi r^2$$

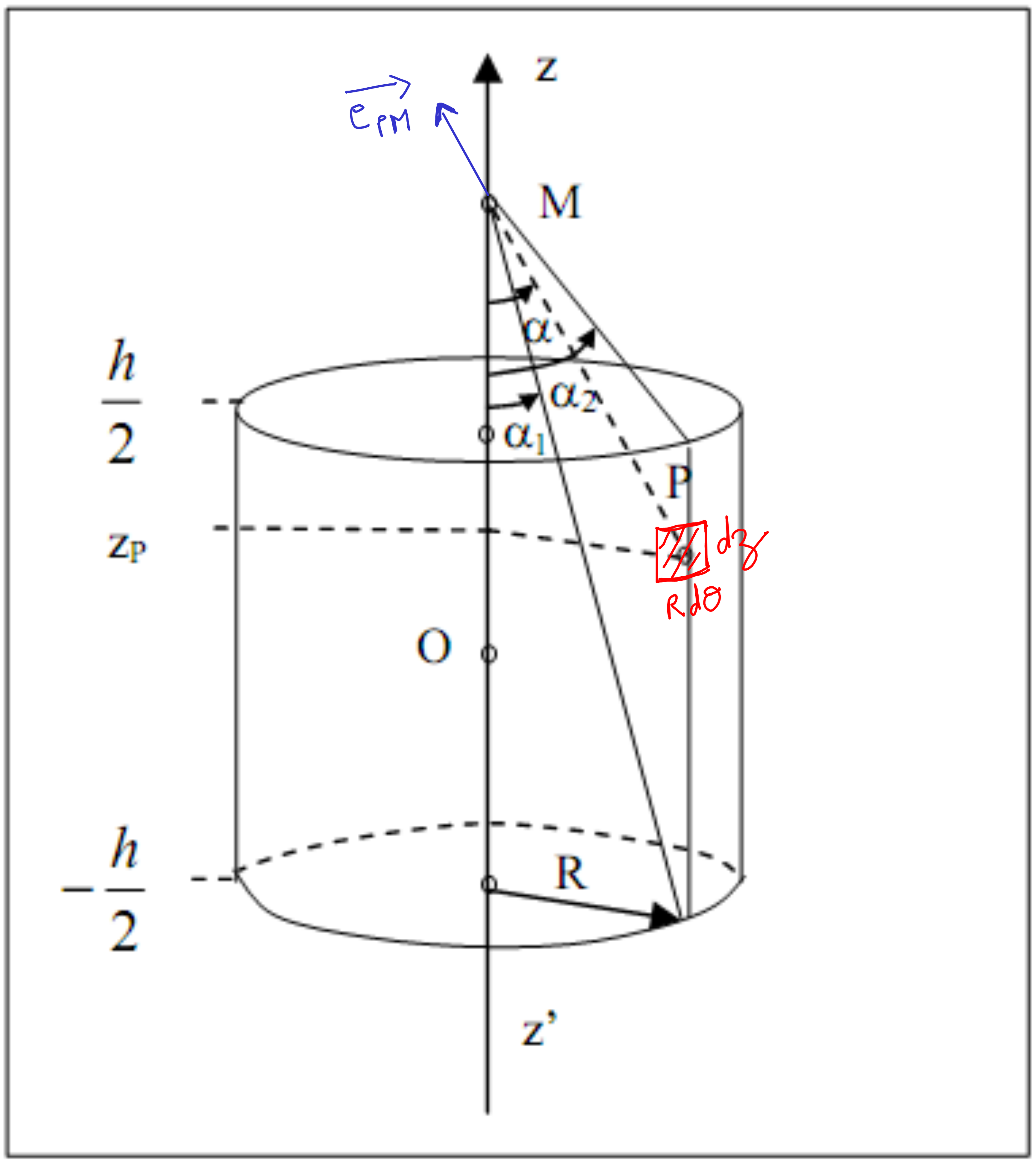
$\vec{E}$ est constant pour $r$ fixe

Ainsi $E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{4\pi a R^2 \rho_0}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{a\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E}(M') = \frac{a\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \vec{e_r}}$$

## Ex 5 : Cylindre chargé

1) Nous allons utiliser le repère cylindrique




2) Ici la surface est chargée, un élément de surface est $dS = R\,d\theta\, dz_P$

donc $dq = \sigma R\, d\theta\, dz_P$

4) $PM = \sqrt{R^2 + (z - z_P)^2}$

donc $\dfrac{1}{PM^2} = \dfrac{1}{R^2 + (z - z_P)^2}$

$\vec{e}_{PM} = \cos\alpha \, \vec{e}_z - \sin\alpha \, \vec{e}_r$

6) $d\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \dfrac{\sigma R \, d\theta \, dz_P}{R^2 + (z - z_P)^2} \left( \cos\alpha \, \vec{e}_z - \sin\alpha \, \vec{e}_r \right) \right)$

7) Tout plan contenant l'axe $zz'$ est plan de symétrie donc $\vec{E} \propto \vec{e}_z$. Seule la composante selon $\vec{e}_z$ mérite d'être intégrée.

8) $\vec{E} = \displaystyle\iint \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R \, d\theta \, dz_P}{R^2 + (z - z_P)^2} \cos\alpha \, \vec{e}_z$

De plus $\cos\alpha = \dfrac{z - z_P}{\sqrt{R^2 + (z - z_P)^2}}$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z_P = -\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(z - z_P) \, dz_P}{\left(R^2 + (z - z_P)^2\right)^{3/2}} \int_{\theta = 0}^{2\pi} d\theta \; \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z_P)^2}} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{e}_z$$

Ainsi $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \left( \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{h}{2})^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{h}{2})^2}} \right) \vec{e}_z}$