Travaux dirigés d'OMPP 2 :
Relations locales de l'électrostatique

École Centrale Pékin

2019-2020

Applications du cours

Exercice 1 : Calcul d'un flux

On adopte un système de *coordonnées sphériques* de centre O. Soit la fonction vectorielle :

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\\&M \mapsto \overrightarrow{E}(M) = \frac{2k\cos\theta}{r^3}\overrightarrow{e_r} + \frac{k\sin\theta}{r^3}\overrightarrow{e_\theta}\end{aligned}$$

Calculer le flux du vecteur $\overrightarrow{E}(M)$ à travers une surface sphérique fermée de centre O et de rayon R.

S'entraîner

Exercice 2 : Est-ce un champ à flux conservatif ?

On dit qu'un champ de vecteurs $\{\overrightarrow{a}(M), M \in \mathcal{D}\}$ est à *flux conservatif* dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace si et seulement si $\forall M \in \mathcal{D}, div\,\overrightarrow{a}(M) = 0$.

1. Montrer qu'un champ de vecteurs $\{\overrightarrow{a}(M), M \in \mathcal{D}\}$ est à *flux conservatif* dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace si et seulement si pour toute surface fermée $\mathcal{S}$ se trouvant dans $\mathcal{D}$
$$\oiint_{M\in(\mathcal{S})} \overrightarrow{a}(M)\cdot d\overrightarrow{S}(M) = 0$$
2. La figure 1 représente, dans un plan $z = cste$, quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme :
$$\vec{a}(x,y) = a_x(x,y)\vec{e}_x + a_y(x,y)\vec{e}_y$$
Préciser, dans chaque cas, s'il peut s'agir d'un champ à *flux conservatif* ou non.

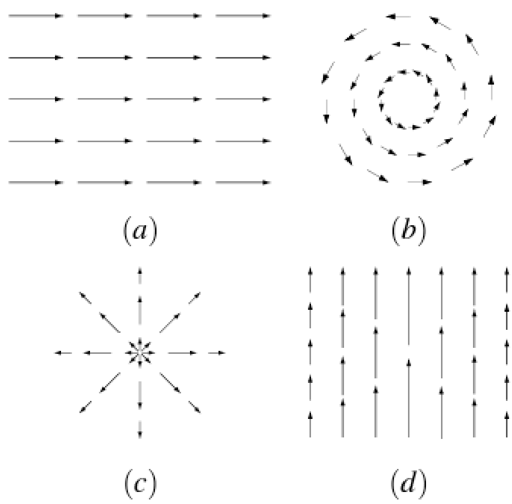


Figure 1 – Cartes de champ

Exercice 3 : Potentiel de Yukawa

Une distribution de charges à symétrie sphérique crée en un point M situé à la distance r du centre O, le potentiel électrostatique : $V(r) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$ dit de «Yukawa» [1].

1. Exprimer le champ électrique créé au point M.
2. Exprimer la charge $q(r)$ contenue dans la sphère de centre O et de rayon r.
3. En déduire :
   a) la charge totale contenue dans tout lespace ;
   b) quil y a en O une charge ponctuelle que lon déterminera.
4. À la lumière des résultats du 3. quel système modélise ce potentiel ?
5. Calculer la densité volumique de charges $\rho(r)$ pour $r \neq 0$.

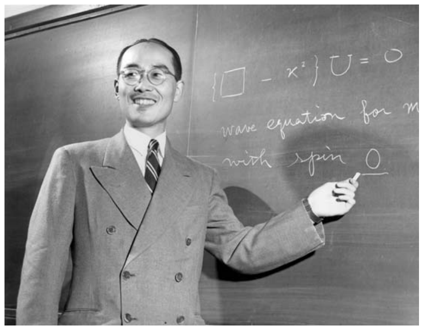
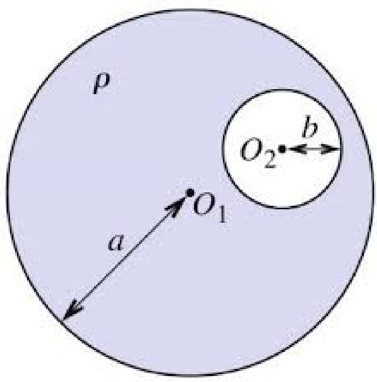


Figure 2 – Yukawa Hideki

Pour aller plus loin

Exercice 4 : Boule creuse

Soit une boule de masse volumique ρ, de rayon a et de centre O_1 dans laquelle on a creusé un trou de rayon b et de centre O_2. En utilisant le théorème de superposition donner l'expression du champ gravitationnel en tout point du trou.



1. Yukawa Hideki (Tôkyô 1907 - Kyôto 1981), physicien japonais, reçut le prix Nobel de physique en 1949 pour «la prédiction de l'existence des mésons fondée sur des travaux théoriques sur les forces nucléaires».