OMPP

TD 3 - Correction

Ex 1 : Calcul de flux

Par définition : $\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$

Ici la surface fermée est une sphère donc :

$\vec{dS} = R\,d\theta\, R\sin\theta\, d\varphi\, \vec{e_r}$ (car la sphère est de rayon R)

Ainsi $\phi = \oiint_S \left(\frac{2k\cos\theta}{R^3}\vec{e_r} + \frac{k\sin\theta}{R^3}\vec{e_\theta} \right)\left(R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \vec{e_r} \right)$

$$\phi = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{2k}{R}\cos\theta\sin\theta \right) d\varphi\, d\theta$$

$$\phi = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{4\pi k}{R}\cos\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$\phi = \frac{2\pi k}{R}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{\phi = 0}$$

Exercice 2 : Est-ce un champ à flux conservatif ?

1) D'après le théorème de Green-Ostrogradski

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div} \vec{A}\, d\tau = \oiint_S \vec{A} \cdot \vec{dS}}$$

Ainsi pour tout champ à flux conservatif, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ donc $\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = 0$

On peut utiliser cette expression pour décrire un champ à flux conservatif.

2) Figure a : $\vec{a} = K \vec{u_x} \rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} = 0$

Figure b : $\vec{a} = a_\theta(r) \vec{u_\theta} \rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} = 0$

Figure c : $\vec{a} = a_r(r) \vec{u_r} \rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} \neq$ à priori

Figure d : $\vec{a} = a_y(x) \vec{y} \rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial y} = 0$

Exercice 3 : Le potentiel de Yukawa

1) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V$

Sachant que $V(r)$, en sphérique il vient :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\vec{e_r}}$$

2) D'après le théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$

Pour une sphère de rayon r on a :

$$\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \oiint_S \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\exp\left(-\frac{r}{a}\right) + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r\, a}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta \exp\left(-\frac{r}{a}\right) + \frac{e.r}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right)d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\times\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\times 2\pi$$

$$= \frac{e}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Ainsi $\boxed{q(r) = e\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$

Le résultat est bien homogène à une charge

3) a. $q(r) \xrightarrow[r \to \infty]{} Q_{tot}$

Ainsi $\boxed{Q_{tot} = 0}$, la charge totale est nulle

b. $q(r) \xrightarrow[r \to 0]{} e$, ceci correspond bien à une charge ponctuelle de charge e située en O

4) Pour avoir la neutralité de la charge totale avec une charge e en O, il faut nécessairement une charge −e quelque part.
Ceci ressemble à la distribution de charge de l'atome d'hydrogène

5) Utilisons la loi de Poisson $\boxed{\Delta V = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}}$

En sphérique $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right) = \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \left(\frac{-2e}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2 a} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2 a} - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r a^2}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Ainsi $\Delta V = - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$

Finalement $\boxed{\rho(r) = \frac{e}{4\pi r a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$

Ex 4 : Boule creuse (chargé)

Nous allons utiliser le théoreme de superposition.

Considérons tout d'abord une boule sans trou et appliquons le théorème de Gauss, à l'intérieur de la boule :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

D'après l'étude des symetries $\vec{E}$ est radial, $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$

donc

$$\left.\begin{array}{l} \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 E(r) \\ Q_{int} = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \end{array}\right\} \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r}$$

le champ en un point M à l'interieur d'une boule chargée est : $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho \overrightarrow{O_1M}}{3\varepsilon_0}}$

Si on considère la boule de l'énoncé comme la somme de 2 boules, 1 boule de centre O_1 de rayon a et de densité ρ, et 1 boule de centre O_2 de rayon b et de densité $-\rho$, par le théorème de superposition on obtient :

$$\vec{E}_{tot}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M}$$

$$\boxed{\vec{E}_{tot}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}}$$

Le champ dans la cavité est uniforme, c'est un résultat remarquable.

Ex 4 bis : Boule creuse (gravité)

La boule est de masse volumique ρ, on applique le théorème de Gauss de la gravitation

$$\boxed{\oiint \vec{G}\cdot\vec{dS} = -4\pi G M_{int}}$$

Les symétries sont les mêmes que précédemment donc $\vec{G} = G(r)\vec{e_r}$

De plus $M_{int} = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$

Ainsi $\vec{g}(r) = \frac{\rho r}{3} (-4\pi G) \vec{e_r}$

Ainsi pour la boule pleine de rayon a, en tout point de l'espace intérieur, on a $\boxed{\vec{g}_1(r) = -\frac{4\pi}{3} G \rho \overrightarrow{O_1M}}$

Si on considère la boule de centre O_2 et de densité volumique de masse $-\rho$, le champ de gravitation en tout point de l'espace intérieur est $\vec{g}_2(r) = \frac{4\pi G}{3} \rho \overrightarrow{O_2M}$

D'après le théorème de superposition, le champ créé par la boule creuse dans la cavité est

$$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \frac{4\pi G \rho}{3} \overrightarrow{O_2O_1}}$$