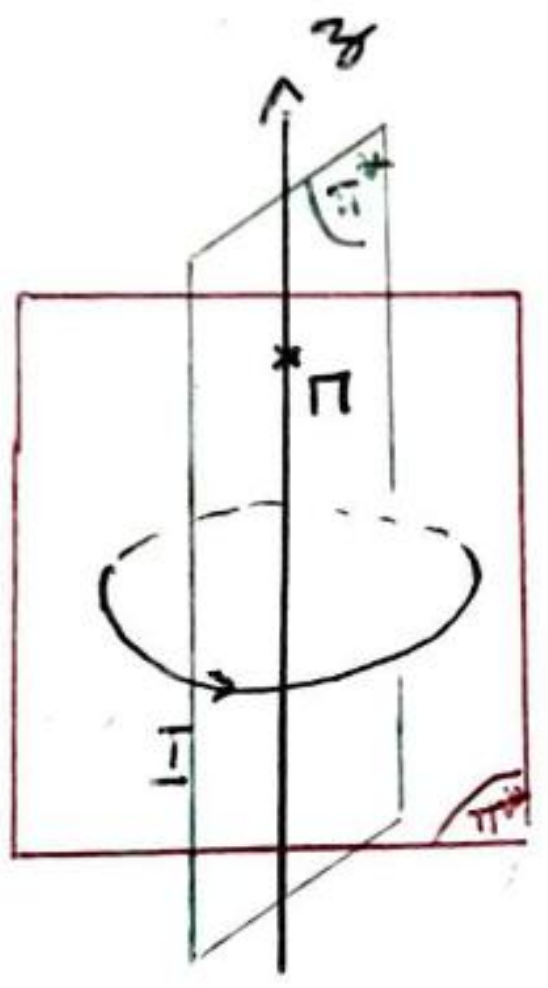


OTPP

TD4 - Correction

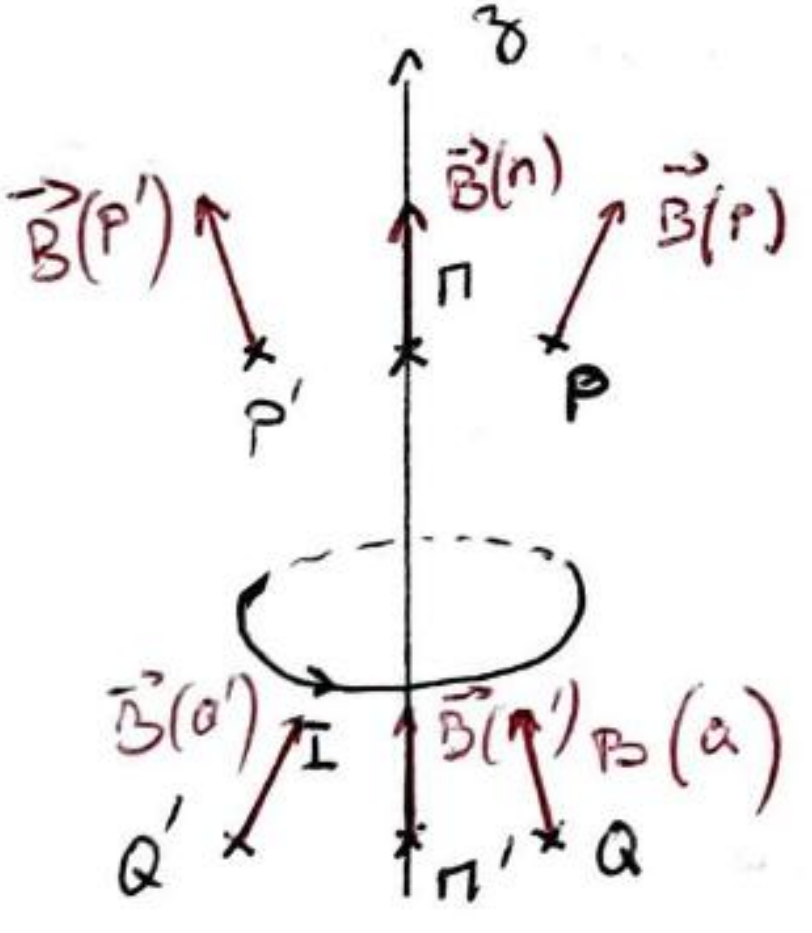
Ex 1: Symétries du champ magnétique

1)



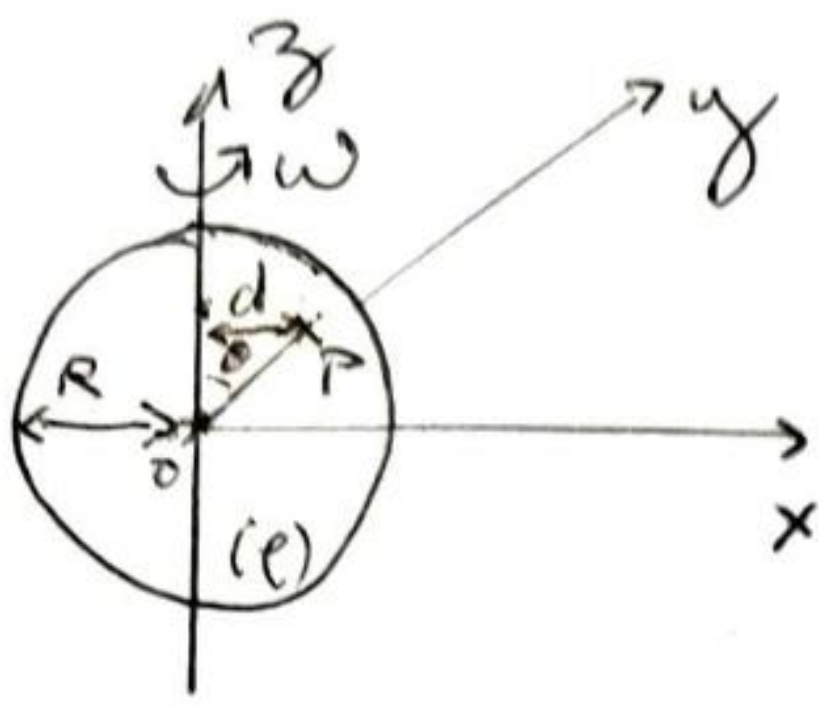
Les plans contenant l'axe Oz sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courant. \vec{B} appartient à la réunion de tous ces plans donc $\boxed{\vec{B}(\pi) \propto \vec{e}_z}$

2)



Le plan de la spire est un plan de symétrie de la distribution de courant, les champs sont donc antisymétriques par rapport à ce plan.

Ex 2 : Boule de Rowland



3) chaque point P est en mouvement à la vitesse $\vec{v}(P) = d\omega \vec{e}_\varphi = r \sin\theta \omega \vec{e}_\varphi$ ou r est la distance OP

La densité volumique de courant s'écrit donc :

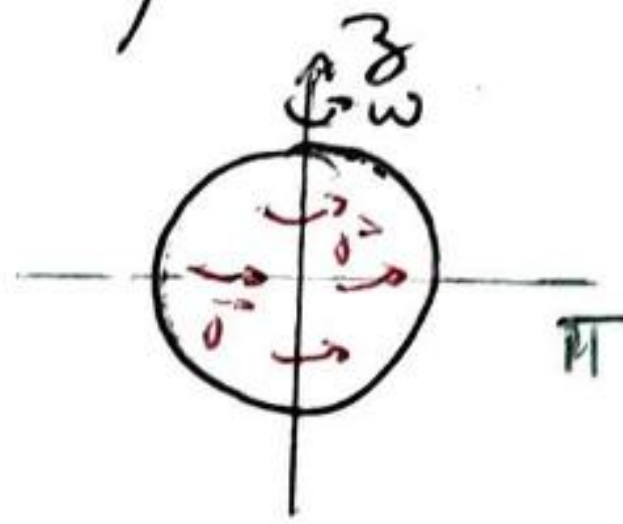
$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho r \sin\theta \omega \vec{e}_\varphi$$

1)

• Tout plan contenant Oz est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant.



• Le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant.

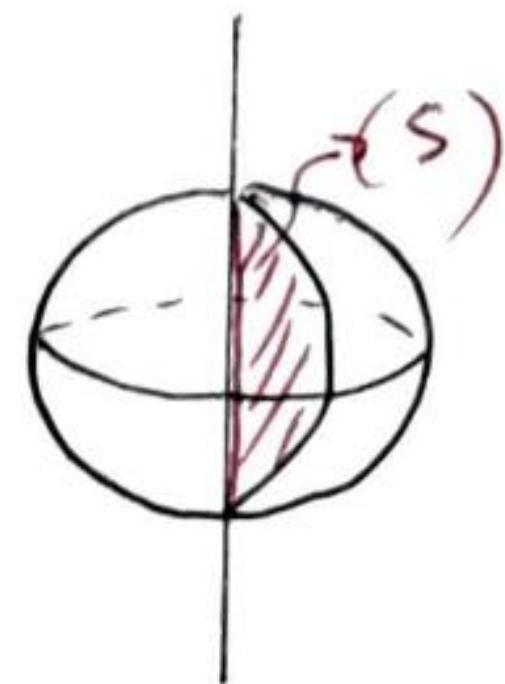


2) \vec{B} appartient aux plans d'antisymétrie et est perpendiculaire aux plans de symétrie donc d'après

1) on a $\vec{B}(\pi) = B(\pi) \vec{e}_z$

4) Par définition $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Nous allons donc calculer le flux de \vec{j}



$$\vec{dS} = dS \vec{e}_\varphi = r d\theta dr \vec{e}_\varphi$$

Ans: $I = \iint \rho r \omega \sin \theta r d\theta dr$

$$I = \rho \omega \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr$$

$$I = \frac{2}{3} \rho \omega R^3$$

Ex 3: Piège de Penning

1) a. Le mouvement longitudinal est selon oz .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E}$$

Ainsi $m \frac{d^2 z}{dt^2} = q E_z$ or $\vec{E} = -\text{grad} V$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{2d^2} (2x \vec{e}_x + 2y \vec{e}_y - 4z \vec{e}_z)$$

On a donc $m \ddot{z} = (-e) \frac{V_0}{2d^2} 4z$ ou $\ddot{z} + \omega_L^2 z = 0$

Avec $\omega_L = \sqrt{\frac{2eV_0}{m d^2}} = 2,9 \cdot 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$z(t) = A \cos \omega_L t + B \sin \omega_L t$$

Le mouvement est périodique

b. En projection sur \vec{e}_x et \vec{e}_y on obtient

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{eV_0}{2d^2} 2x \quad \text{et} \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{eV_0}{2d^2} 2y$$

Ainsi $\ddot{x} - \frac{\omega_L^2}{2} x = 0$ et $\ddot{y} - \frac{\omega_L^2}{2} y = 0$

les solutions de ces équations sont :

$$\begin{cases} x(t) = C e^{+\frac{\omega_L}{\sqrt{2}} t} + D e^{-\frac{\omega_L}{\sqrt{2}} t} \\ y(t) = F e^{+\frac{\omega_L}{\sqrt{2}} t} + G e^{-\frac{\omega_L}{\sqrt{2}} t} \end{cases}$$

Ces deux solutions divergent pour t tend vers l'infini
l'électron ne peut pas rester confiné

2) a. Une nouvelle force apparaît, la composante magnétique de la force de Lorentz

$$\vec{F}_m = (-e) \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{avec } \vec{v} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \text{ et } \vec{B} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix}$$

On a donc $\vec{F}_m = -e (yB \vec{e}_x - xB \vec{e}_y)$

Cette force n'a pas de composante selon \vec{e}_z donc le mouvement n'est pas modifié.

b. La projection du PFD sur les axes x et y donne

$$\begin{cases} m \ddot{x} = \frac{eV_0}{d^2} x - eBy \\ m \ddot{y} = \frac{eV_0}{d^2} y + eBx \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\omega_L^2}{2} x - \omega_c y & (1) \\ \ddot{y} = \frac{\omega_L^2}{2} y + \omega_c x & (2) \end{cases}$$

⑥

Avec $\omega_c = \frac{eB}{m} = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

c. On pose $\zeta = x + iy$ et on obtient une équation sur ζ en faisant ① + i② :

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \frac{\omega_L^2}{2}(x + iy) + \omega_c \overbrace{(ix - iy)}^{i(x + iy)}$$

$$\boxed{\ddot{\zeta} = \frac{\omega_L^2}{2}\zeta + i\omega_c\dot{\zeta}}$$

d. L'équation caractéristique associée est $r^2 - i\omega_c r - \frac{\omega_L^2}{2} = 0$
 $\Delta = 2\omega_L^2 - \omega_c^2 < 0$ donc $r = \frac{i\omega_c \pm i\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_L^2}}{2}$

On pose
$$\begin{cases} \omega_{c'} = \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_L^2}}{2} \\ \omega_{c''} = \frac{\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_L^2}}{2} \end{cases}$$

On a alors
$$\zeta(t) = C_1 e^{i\omega_{c'} t} + C_2 e^{i\omega_{c''} t}$$

e. $\omega_c \gg \omega_L$ donc $\omega_{c'} \sim \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2}}{2} = \omega_c$

De plus $\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_L^2} = \omega_c \sqrt{1 - 2\left(\frac{\omega_L}{\omega_c}\right)^2} \sim \omega_c \left(1 - \left(\frac{\omega_L}{\omega_c}\right)^2\right)$

Ainsi
$$\boxed{\omega_{c''} \sim \frac{\omega_L^2}{2\omega_c}}$$

$$f. \text{ On a } \zeta(t) \sim C_1 e^{i\omega_c t} + C_2 e^{i\frac{\omega_L^2}{2\omega_c} t}$$

(7)

$$\begin{cases} \zeta(0) = x(0) + iy(0) = a \\ \dot{\zeta}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

→ conditions initiales

$$\text{Ainsi } \begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ i\omega_c C_1 + i\frac{\omega_L^2}{2\omega_c} C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{La résolution de ce système donne } \begin{cases} C_1 = a \frac{-\omega_L^2}{2\omega_c^2 - \omega_L^2} \\ C_2 = a \frac{2\omega_c^2}{2\omega_c^2 - \omega_L^2} \end{cases}$$

$$\| x(t) = \text{Re}(\zeta(t)) = \frac{-a\omega_L^2}{2\omega_c^2 - \omega_L^2} \cos \omega_c t + \frac{2a\omega_c^2}{2\omega_c^2 - \omega_L^2} \cos \frac{\omega_L^2}{2\omega_c} t$$

$$\| y(t) = \text{Im}(\zeta(t)) = \frac{-a\omega_L^2}{2\omega_c^2 - \omega_L^2} \sin \omega_c t + \frac{2a\omega_c^2}{2\omega_c^2 - \omega_L^2} \sin \frac{\omega_L^2}{2\omega_c} t$$

Pour finir $z(0) = a = A$ et $\dot{z}(0) = 0 = \omega_L B$

$$\text{Ainsi } \| z(t) = a \cos \omega_L t$$