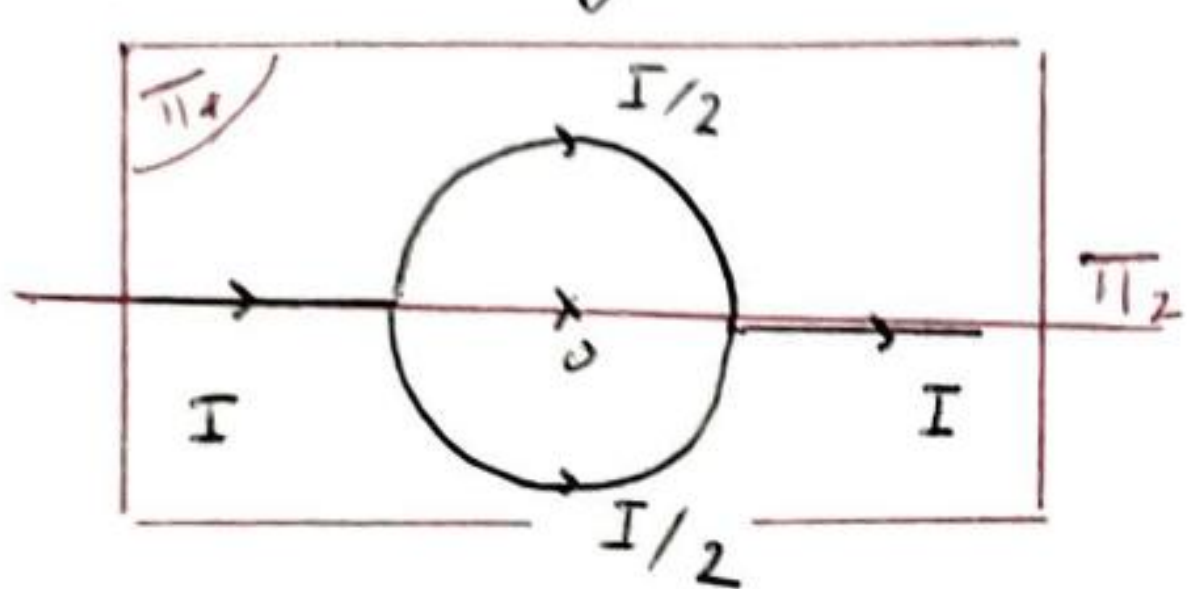


# OTPP

## TD6 - Correction

Ex 1 : Symétrie de la distribution de courant



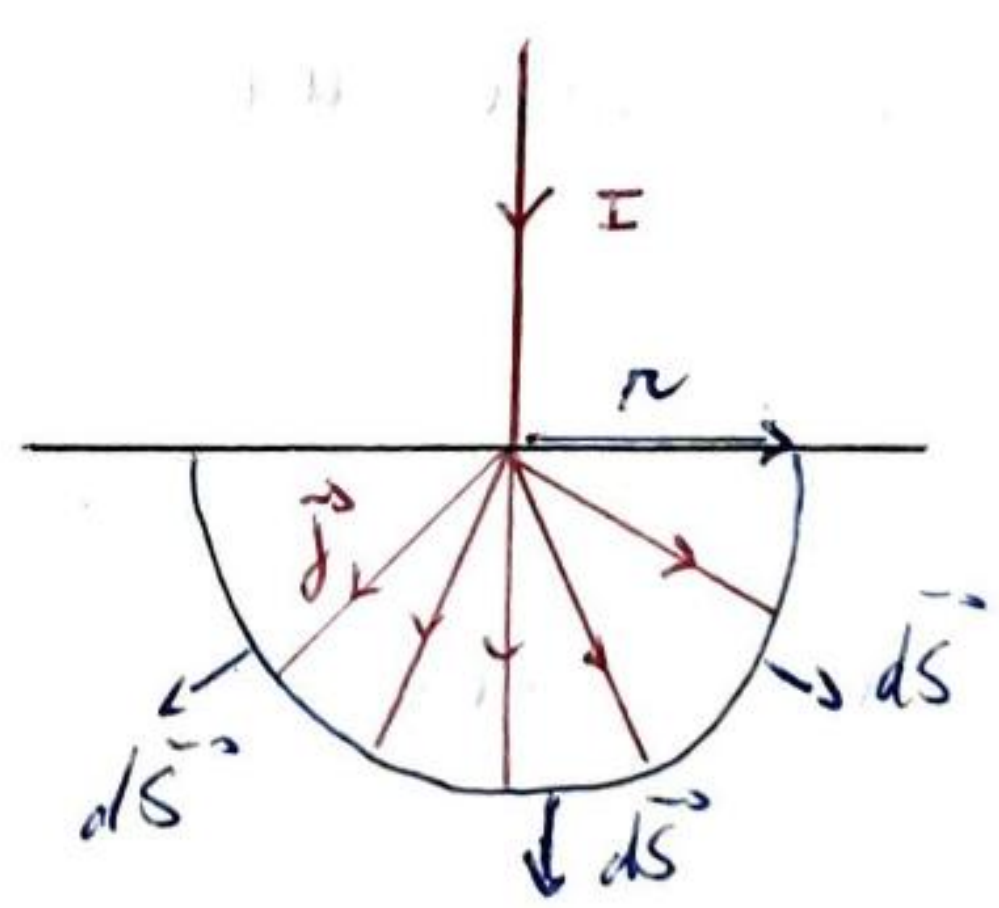
$\vec{B}$  est perpendiculaire aux deux plans de symétrie  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .  
 la seule possibilité est  $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$

Ex 2 : Champ magnétique créé par un éclair

1) Le courant  $I$  se répartit uniformément dans le sol. On utilise pour l'espace  $z < 0$  un repère sphérique.

à une distance  $r$  de  $O$ ,

tout le courant est réparti sur la demi-sphère de rayon  $r$  donc :



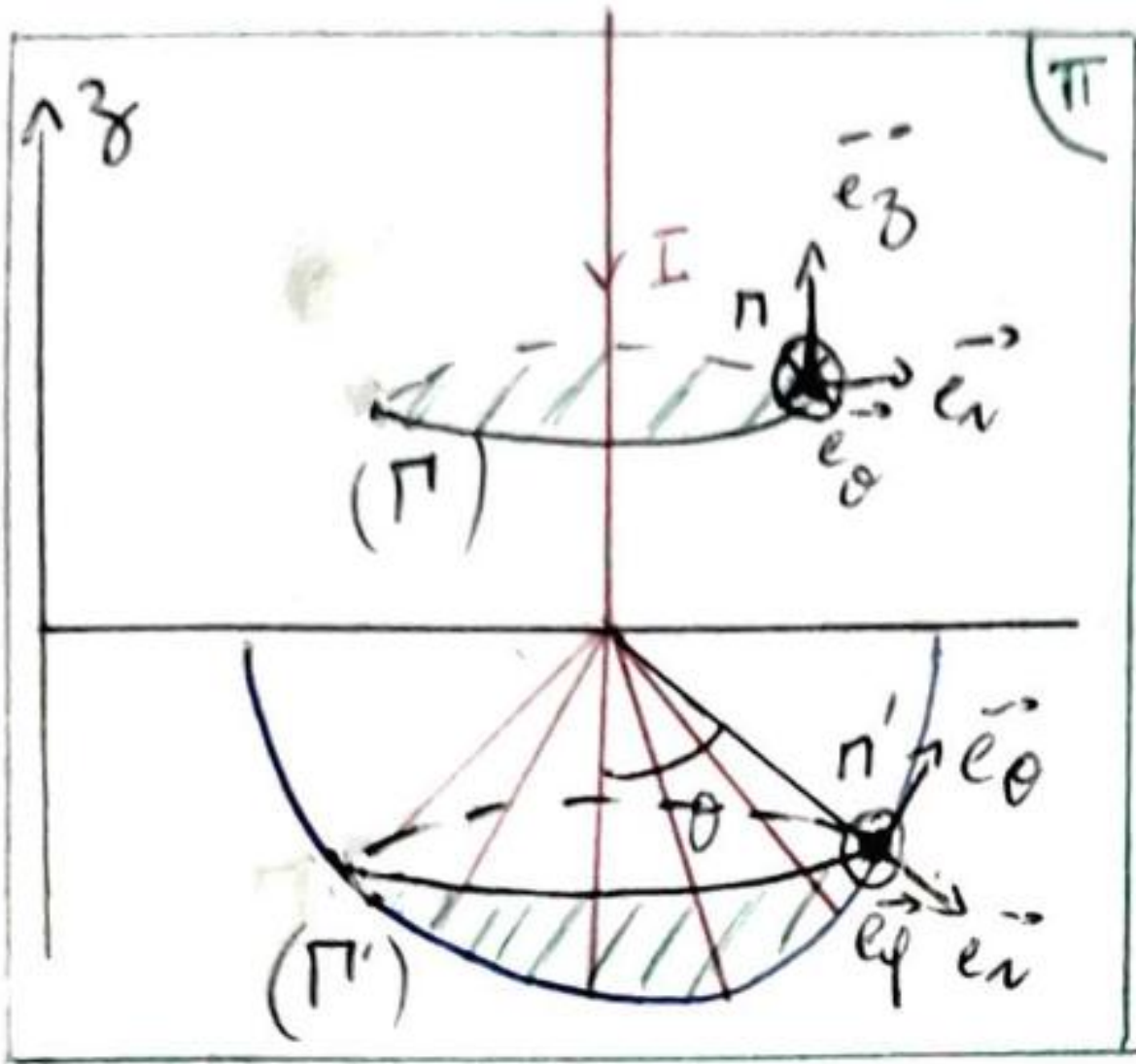
$$I = \iint \vec{j}(r) \cdot d\vec{S} = j(r) 2\pi r^2$$

Ainsi  $\boxed{\vec{j}(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r}$

2) On va utiliser le théorème d'Ampère.

(2)

Déterminons tout d'abord l'expression de  $\vec{B}$ .



• Dans la partie  $z > 0$

Repère cylindrique  $(\rho, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$   
le plan  $\Pi$  est plan de symétrie  
donc  $\vec{B} \propto \vec{e}_\phi$

Il y a invariance par rotation

autour de  $Oz$  donc  $\boxed{\vec{B}(\rho) = B(\rho, z) \vec{e}_\phi}$

• Dans la partie  $z < 0$

Repère sphérique  $(r, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$   
le plan  $\Pi$  est toujours plan de symétrie donc  
 $\vec{B} \propto \vec{e}_\phi$

Il y a invariance par rotation autour de  $Oz$

donc  $\boxed{\vec{B} = B(r, \theta) \vec{e}_\phi}$

Appliquons le théorème d'Ampère au contour ( $\Gamma$ )

(3)

$z > 0$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \text{donc} \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

Ainsi  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

$z < 0$

$$\oint_{\Gamma'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S'} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

On intègre  $\vec{j}$  sur la calotte sphérique s'appuyant sur le contour  $\Gamma'$  car  $\vec{j}$  est constant sur cette calotte.

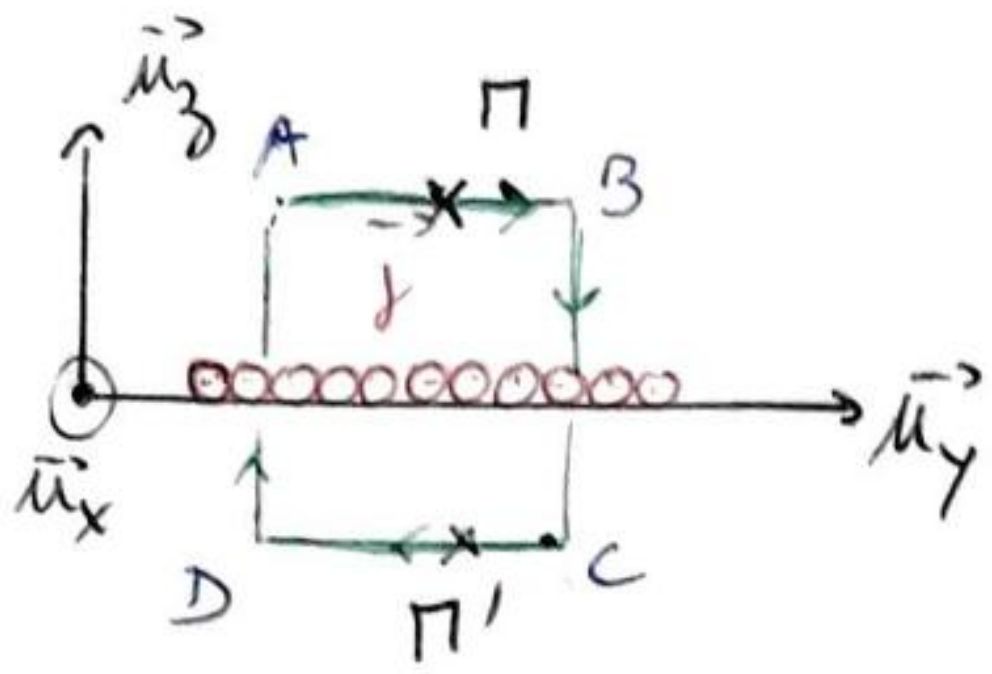
$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot 2\pi r^2 (1 - \cos\theta)$$

Ainsi  $\vec{B} = \mu_0 j r (1 - \cos\theta) \vec{e}_\varphi$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (1 - \cos\theta) \vec{e}_\varphi$$

# Ex 3 : Distribution surfacique de courant

(4)



Le plan  $(\pi, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie car la plaque est infinie. Ainsi  $\vec{B} \propto \vec{u}_y$

Il y a de plus invariance par translation selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  donc  $\vec{B}(\pi) = B(z) \vec{u}_y$

On applique le théorème d'Ampère sur le cadre ABCD

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encagé}}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Le plan  $(\sigma, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  étant un plan de symétrie des courants  $\vec{B}(\pi)$  est antisymétrique par rapport à  $\vec{B}(\pi')$

$$\text{donc } \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot AB$$

De plus  $I_{\text{encagé}} = -j_s AB$  donc

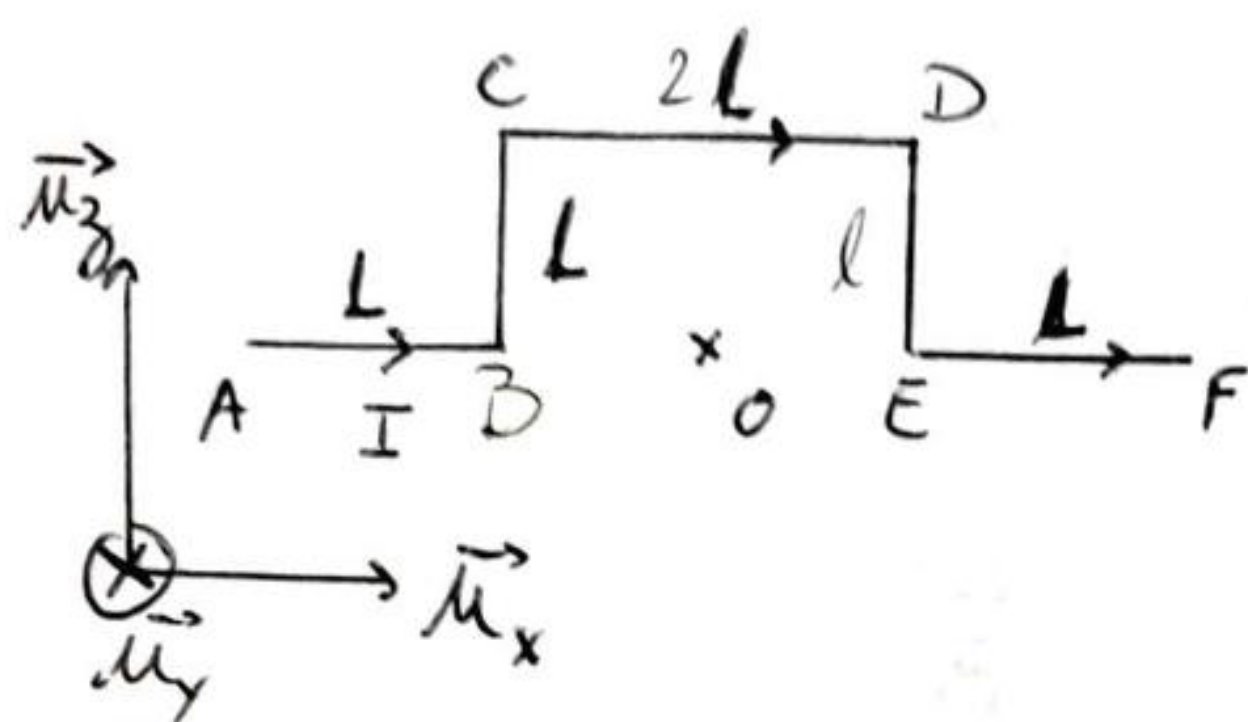
$$\boxed{\vec{B}(\pi) = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_y}$$

Enfin  $\vec{B}(\pi) - \vec{B}(\pi') = -\mu_0 j_s \vec{u}_y$

♥  $\boxed{\vec{B}(\pi) - \vec{B}(\pi') = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z}$  c'est la relation de passage

# Ex 4 : Comparaison de distributions de courant

Commençons par étudier le premier circuit

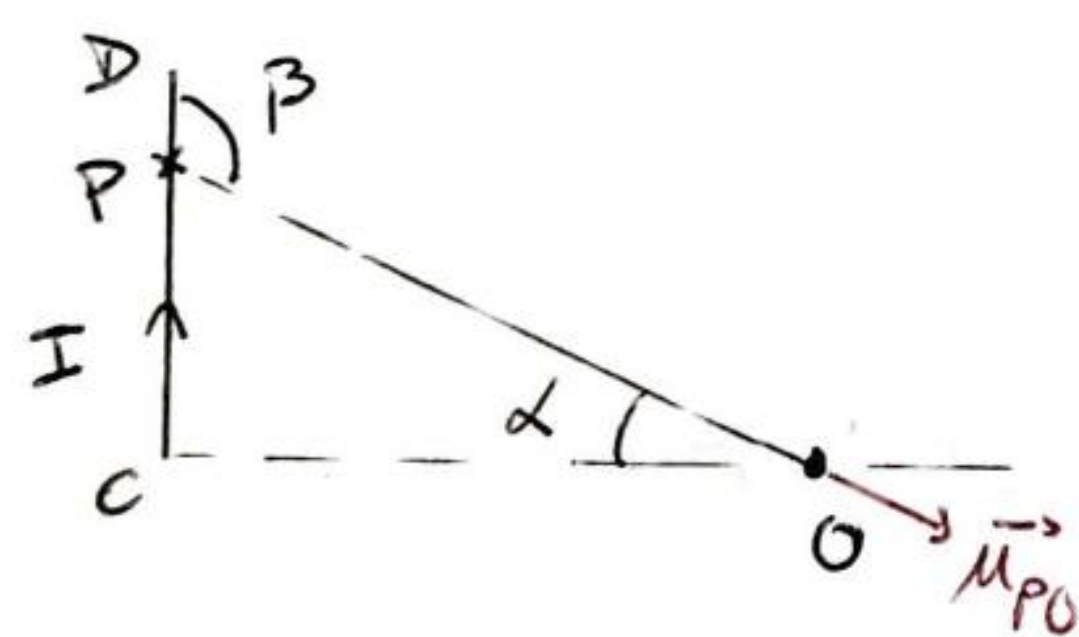


Le plan de la figure est un plan de symétrie donc  $\vec{B}(0) \propto \vec{u}_y$

Utilisons la loi de Biot et Savart  $d\vec{B}_P(0) = \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PO}}{PO^3} \frac{\mu_0}{4\pi}$

Pour les segments AB et EF,  $d\vec{l} \parallel \vec{PO}$  donc  $d\vec{B} = \vec{0}$

Calculons  $\vec{B}_{BC}(0)$



$$\vec{B}_{BC}(0) = \int_C^D \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PO}}{PO^3} \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C^D \frac{dz \vec{e}_3 \wedge \vec{u}_{PO}}{PO^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C^D \frac{\sin \beta}{PO^2} dz \vec{u}_y$$

De plus  $\sin \beta = \cos \alpha = \frac{L}{PO}$  d'où  $\frac{1}{PO^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{L^2}$

et  $\tan \alpha = \frac{z}{L}$  d'où  $dz = L \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$

Finalement  $\vec{B}_{BC}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \int_0^{\pi/4} \cos \alpha d\alpha \vec{u}_y$

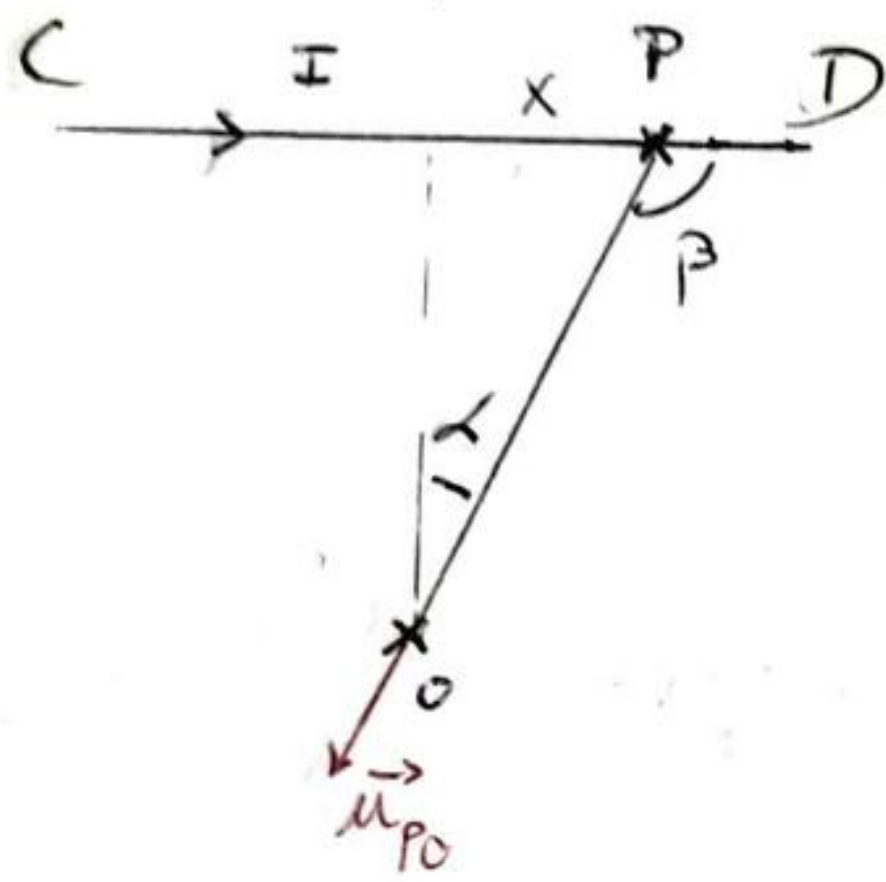
$$\boxed{\vec{B}_{BC}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2} \pi L} \vec{u}_y}$$

Pour la partie DE par symétrie de la distribution  
 on a  $\vec{B}_{DE}(0) = \vec{B}_{BC}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{2}L} \vec{u}_y$

Pour la partie CD :

$$\vec{B}_{CD}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PO}}{PO^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dx}{PO^2} \sin\beta \vec{u}_y$$



Avec  $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{L}{PO}$  d'où  $\frac{1}{PO^2} = \frac{\cos^2\alpha}{L^2}$

et  $\tan\alpha = \frac{x}{L}$  donc  $dx = L \frac{1}{\cos^2\alpha} d\alpha$

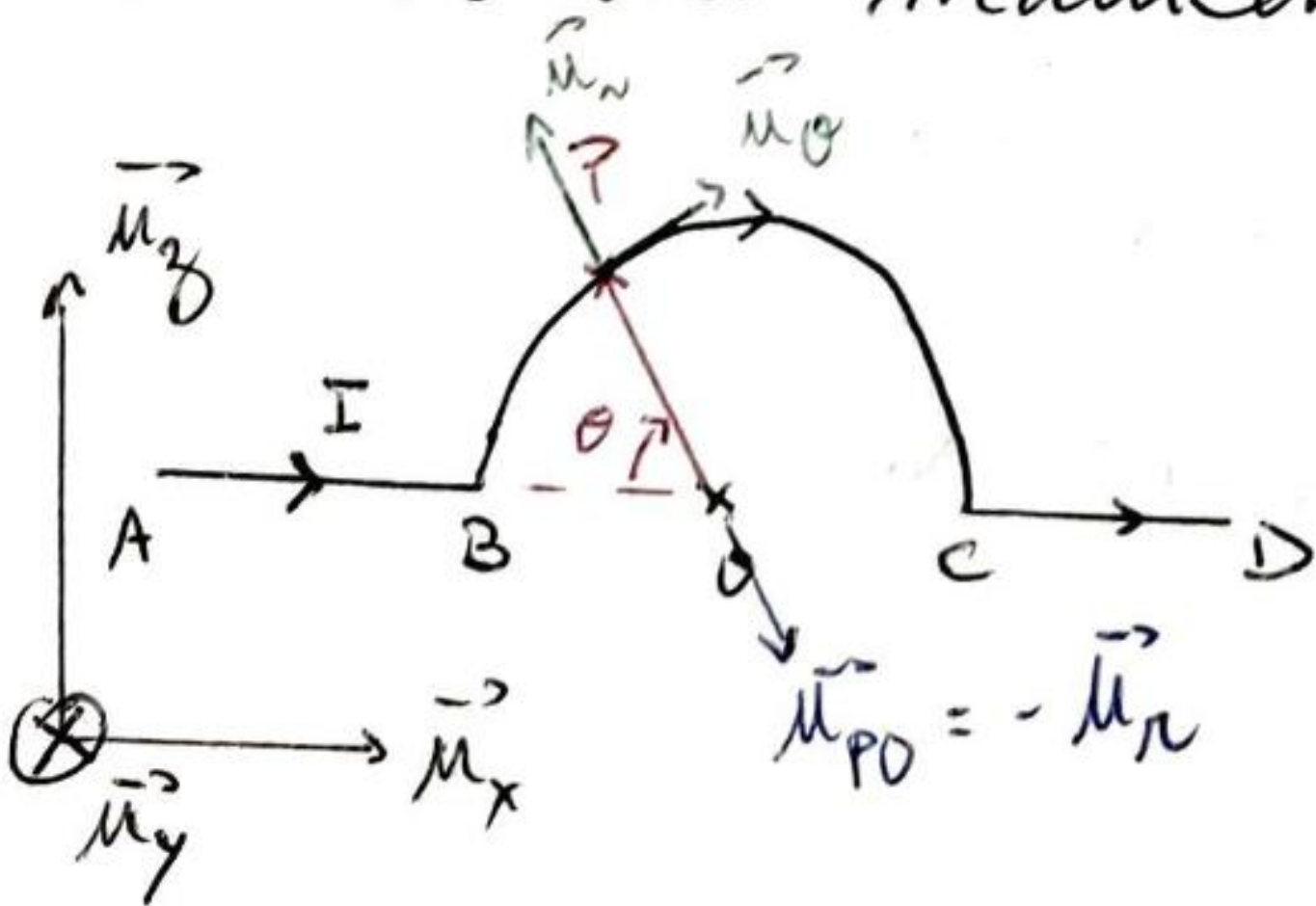
Il vient  $\vec{B}_{CD}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\alpha d\alpha \vec{u}_y$

Puis  $\vec{B}_{CD}(0) = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi L} \vec{u}_y$

Finalement  $\vec{B}_{tot_1}(0) = \vec{B}_{BC}(0) + \vec{B}_{CD}(0) + \vec{B}_{DE}(0)$

$\vec{B}_{tot_1}(0) = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{2}L} \vec{u}_y$

On étudie maintenant le second circuit



Comme pour le précédent circuit  $\vec{B} \propto \vec{u}_y$  et

$\vec{B}_{AB}(0) = \vec{B}_{CD}(0) = \vec{0}$

## Calculons $\vec{B}_{BC}(0)$

$$\vec{B}_{BC}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_B^C \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PO}}{PO^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{R d\theta}{R^2} \vec{u}_\theta \wedge (-\vec{u}_r)$$

$$\vec{B}_{BC}(0) = \frac{\mu_0 I}{4R} \vec{u}_y$$

De plus  $\boxed{\pi R = 4L}$  car les 2 circuits ont la même longueur. Ainsi  $R = \frac{4L}{\pi}$  et

$$\vec{B}_{\text{tot}_2}(0) = \frac{\mu_0 \pi I}{16L} \vec{u}_y$$

Finalement  $\boxed{\frac{B_{\text{tot}_2}}{B_{\text{tot}_1}} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16} = 0,87}$

le premier circuit crée un champ plus intense