OPTIQUE 3 :
Lentilles minces

École Centrale Pékin

Année 3

Table des matières

3 Association de plusieurs lentilles minces

3.1 Doublet de lentille

3.1.1 Définition

Définition : On appelle **doublet de lentilles minces** dans l'air, l'association de deux lentilles minces de même axe optique : le tout forme ainsi un système optique centré, plongé dans l'air.

Les deux lentilles formant le doublets ont les caractéristiques suivantes :

- **la première lentille rencontrée par la lumière est notée** L_1 : elle est de focale algébrique image f_1', de centre optique O_1 et de foyers principaux F_1 et F_1'.
- **la deuxième lentille rencontrée par la lumière est notée** L_2 : elle est de focale algébrique image f_2', de centre optique O_2 et de foyers principaux F_2 et F_2'.

Définition : On note $e = O_1O_2$ l'**épaisseur du doublet** :

- on parle de **doublet de lentilles accolées** si $e = 0$. Les lentilles étant minces, on peut considérer que par accolement, le doublet est encore mince avec $O \equiv O_1 \equiv O_2$.
- sinon, les **lentilles ne sont pas accolées** et $e \neq 0$

3.1.2 Caractère focal ou afocal d'un doublet

Définition : On note F (antécédent du point à l'infini dans la direction de l'axe) et F' (image du point à l'infini dans la direction de l'axe) les **foyers principaux du doublet** $L_1 \cup L_2$:

- le doublet est appelé **doublet focal** si F et F' sont à distance finie de O_1 : dans ce cas $F_1' \neq F_2$
- le doublet est appelé **doublet afocal** si F et F' sont à distance infinie de O_1 : dans ce cas $F_1' \equiv F_2$

Démonstration.

□

3.1.3 Grandissement d'un doublet

Soit $A'B'$ l'image d'un objet AB transversal à travers le doublet de lentille avec :

$$A \underset{doublet}{\longrightarrow} A' \quad \text{et} \quad B \underset{doublet}{\longrightarrow} B'$$

ou en opérant lentille après lentille en définissant l'image A_1B_1 de l'objet AB par la lentille L_1 :

$$A \underset{L_1}{\longrightarrow} A_1 \underset{L_2}{\longrightarrow} A' \quad \text{et} \quad B \underset{L_1}{\longrightarrow} B_1 \underset{L_2}{\longrightarrow} B'$$

Théorème - Grandissement d'un doublet : Le grandissement γ d'un doublet de lentilles est lié aux grandissements γ_1 et γ_2 des deux lentilles du doublet par la relation :

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2$$

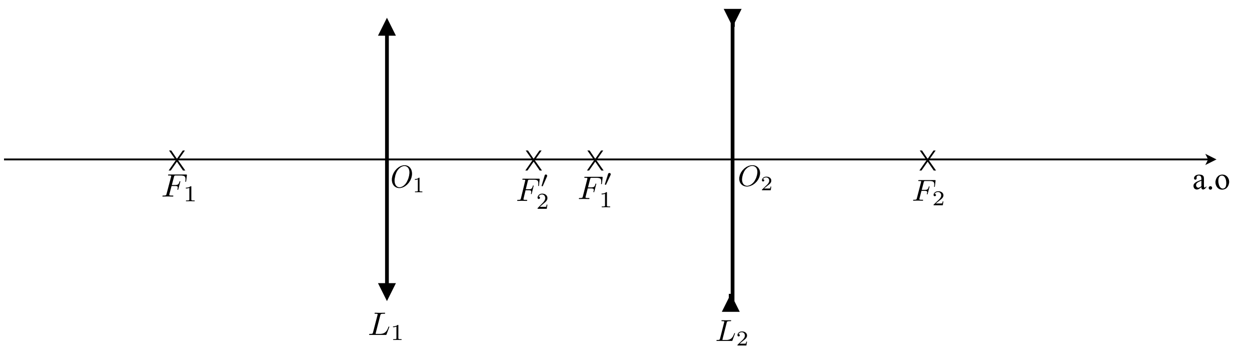
Démonstration.

□

3.2 Cas d'un doublet focal

3.2.1 Recherche des points principaux

En considérant le doublet de lentilles comme un système optique, on peut définir les points cardinaux du doublet ainsi que les plans associés : foyers objet et image principaux F et F'. On peut déterminer la position de ces points par le calcul en fonction des distances focales des lentilles qui composent le doublets ou par construction géométrique. Nous ferons par construction géométrique.



3.2.2 Focales et vergences algébriques d'un doublet accolé focal

Théorème - Pour deux lentilles accolées, on réalise la somme des vergences. :

Démonstration. Les foyers sont superposé, donc $O = O_1 = O_2$. Soit A_1B_1 l'image intermédiaire. D'après la relation de conjugaison de Descartes appliqué à L_1 :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} = V_1 + \frac{1}{\overline{OA}}$$

. D'après la relation de conjugaison des lentilles appliquée à L_2 on a :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = V_2 + \frac{1}{\overline{OA_1}} = V_2 + V_1 + \frac{1}{\overline{OA}}$$

□

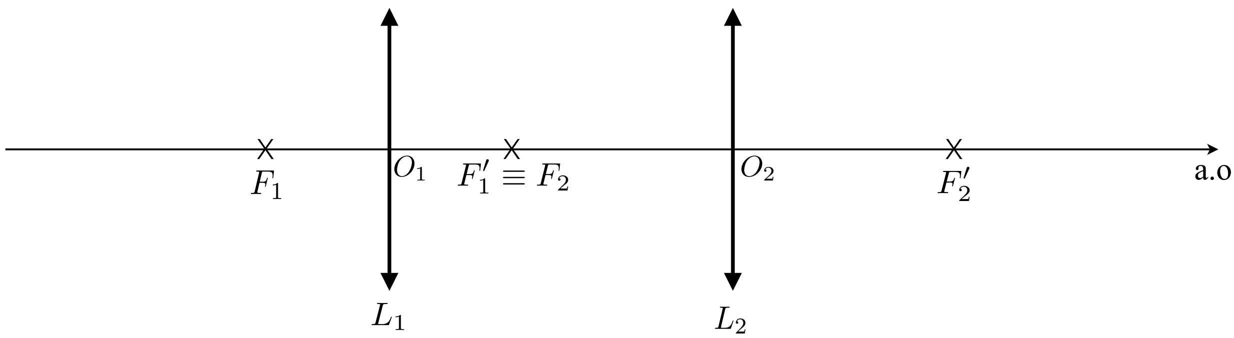
3.3 Cas d'un doublet afocal

3.3.1 Différents types de doublets afocaux

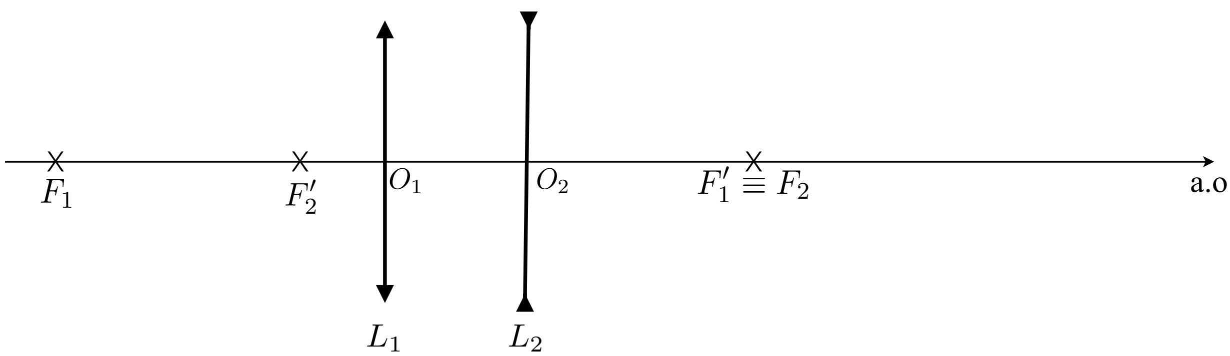
Théorème - Types de doublet afocaux : Un doublet afocal constitué de deux lentilles L_1 (de point focal image F_1') et L_2 (de point focal objet F_2) tel que F_1' et F_2 sont confondu ne peut pas être formé de deux lentilles divergentes, mais qu'il peut être formé de deux lentilles convergentes ou d'une convergente et d'une divergente dans n'importe quel ordre.

Démonstration. Rappelons que L_2 correspond à la première lentille rencontrée par la lumière et L_2 à la deuxième avec la lumière allant de gauche à droite. De plus, une lentille convergente a ses foyers réels et une divergente a ses foyers virtuels.

• **Cas convergente-convergente :** avec deux lentilles convergentes, F_1 est à gauche de O_1, F_1' est à droite de O_1 confondu avec F_2 à gauche nécessairement de O_2 par réalité : donc O_2 est à droite de O_1 ce qui est valide au vu de la numérotation. Un doublet afocal lentille convergente-lentille convergente est possible.

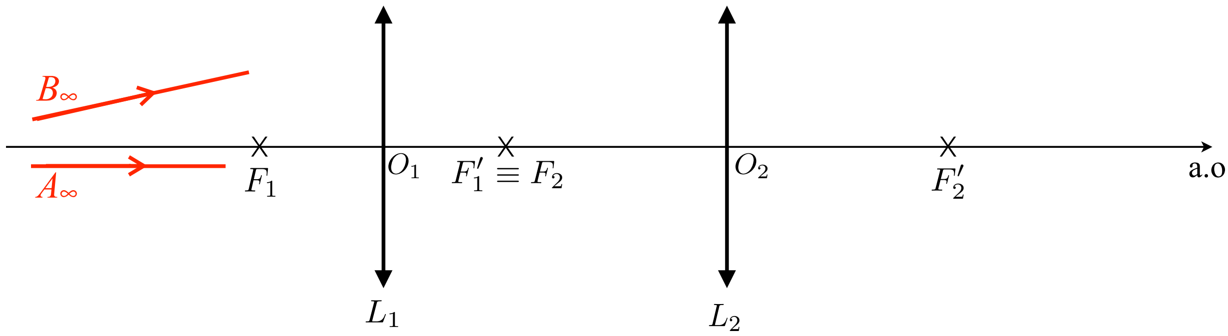


• **Cas convergente-divergente :** avec L_1 convergente et L_2 divergente, F_1' est à droite de O_1 confondu avec F_2 qui doit être à droite aussi de O_2 par virtualité. Cela n'empêche pas O_2 d'être à droite de O_1. D'après le théorème du retour inverse, on peut aussi disposer de doublet afocal commençant par une lentille divergente et finissant par une lentille convergente.



• **Cas divergente-divergente :** supposons L_1 et L_2 divergentes : F_1' est à gauche de O_1 confondu avec F_2 qui doit être à droite de O_2 donc O_2 est à gauche de O_1 : c'est absurde, puisque L_2 est après L_1. Il n'existe pas de doublet afocal lentille divergente-lentille divergente. □

3.3.2 Cas du doublet afocal convergent-convergent



• **Position de l'image d'un objet à l'infini :** Le point objet à l'infini A_∞ dans la direction de l'axe $\vec{u}_A$ a pour image à travers L_1 le foyer principal image F_1' qui coïncide avec F_2. L'image définitive est donc celle de F_2 à travers L_2 donc le point image à l'infini A'_∞ dans la direction de l'axe $\vec{u}'_A = \vec{u}_A$.
Le point objet à l'infini B_∞ dans une direction $\vec{u}_B$ autre que celle de l'axe a pour image à travers L_1 un foyer secondaire image Φ_1' qui coïncide avec un foyer secondaire objet Φ_2. L'image définitive est donc celle de Φ_2 à travers L_2 donc un autre point à l'infini B'_∞ dans une direction $\vec{u}'_B$ autre que celle de l'axe. Plus précisément Φ_1' est à l'intersection du plan focal image de L_1 et du rayon passant par O_1 de direction celle du point à l'infini B_∞. De même, la direction de B'_∞ est celle de $\Phi_2 O_2$ c'est-à-dire aussi celle de $\Phi_1' O_2$.

• **Taille angulaire de l'image d'un objet à l'infini :** L'objet $A_\infty B_\infty$ à l'infini a comme taille angulaire l'angle orienté $\theta = (\vec{u}_A, \vec{u}_B)$. De même, l'image $A'_\infty B'_\infty$ à l'infini a une taille angulaire $\theta' = (\vec{u}'_A, \vec{u}'_B)$

• **Grossissement de l'image d'un objet à l'infini :** On définit le grossissement du doublet afocal comme le rapport algébrique $G = \dfrac{\theta'}{\theta}$.
Dans notre cas de figure, il apparaît que G est négatif : ce doublet afocal renverse l'image par rapport à l'objet. Dans les conditions de Gauss, le grossissement devient :

$$\boxed{G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan\theta'}{\tan\theta} = -\frac{f_1'}{f_2'}}$$

Le rapport entre les distances focales détermine l'effet du doublet sur la taille de l'image :

— si $f_1' < f_2'$: le doublet est rapetissant (image plus petite que l'objet).

— si $f_1' > f_2'$: le doublet est grossissant (image plus grande que l'objet)

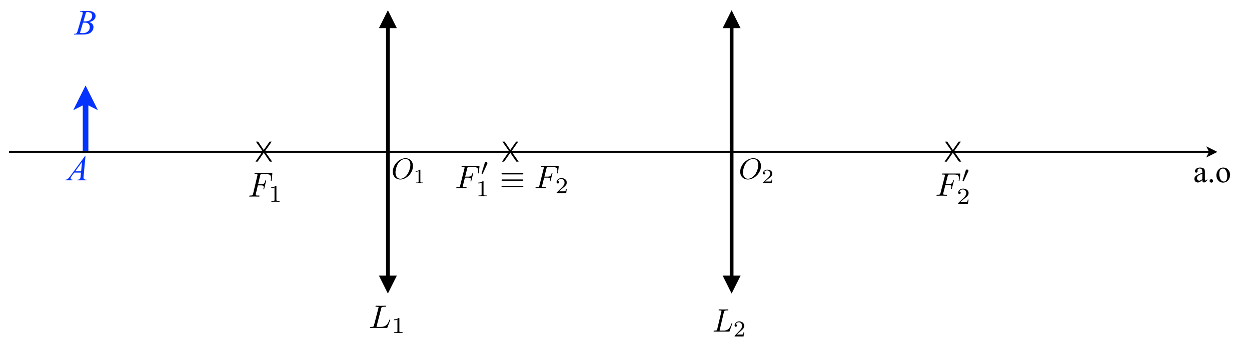
On remarque que dans le cas d'un doublet afocal, la définition du grossissement coïncide avec celle du grandissement angulaire (c'est pour cela qu'on a pris la même notation).

• **Grandissement linéaire d'un objet à distance finie :** la relation de Lagrange-Helmholtz se propage dioptre après dioptre, lentille après lentille dans les conditions de Gauss. Ainsi, ici, le grandissement linéaire γ du doublet afocal est l'inverse du grandissement angulaire G et vaut donc :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f_2'}{f_1'}}$$

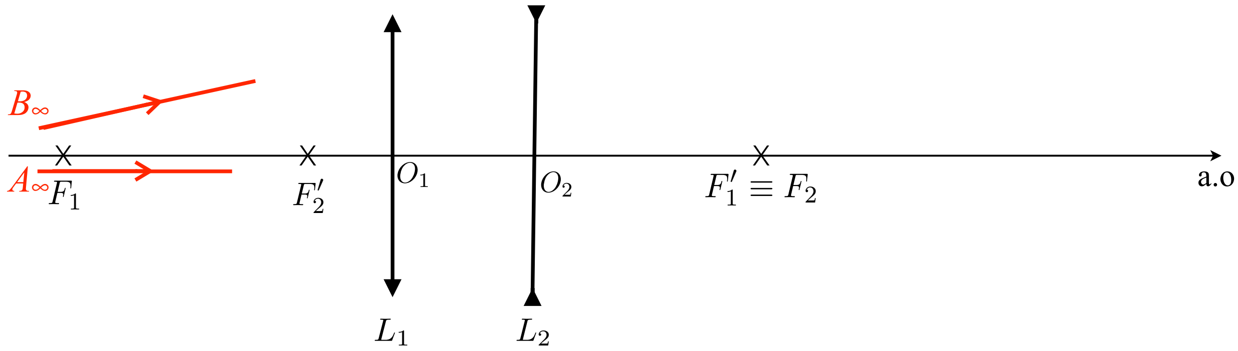
indépendamment de la position de AB. C'est une conséquence de la relation de Lagrange-Helmholtz : le grandissement linéaire du doublet afocal est indépendant de la position de l'objet.

Démonstration. Soit un objet tranverse AB. Le rayon parallèle à l'axe passant par B émerge de L_1 en passant par F_1' donc par F_2 : il émerge parallèle à l'axe. Par stigmatisme, B' se trouve quelque part sur cet émergent. Or le niveau de cet émergent relativement à l'axe ne change pas quand AB se translate, ce qui illustre l'indépendance du grandissement linéaire vis à vis de la position de l'objet AB.



□

3.3.3 Cas du doublet afocal convergent-divergent



• **Position de l'image d'un objet à l'infini :** Le point objet à l'infini A_∞ dans la direction de l'axe $\vec{u}_A$ a pour image à travers L_1 le foyer principal image F_1' qui coïncide avec F_2. L'image définitive est donc celle de F_2 à travers L_2 donc le point image à l'infini A'_∞ dans la direction de l'axe $\vec{u}'_A = \vec{u}_A$.
Le point objet à l'infini B_∞ dans une direction $\vec{u}_B$ autre que celle de l'axe a pour image à travers L_1 un foyer secondaire image Φ_1' qui coïncide avec un foyer secondaire objet Φ_2. L'image définitive est donc celle de Φ_2 à travers L_2 donc un autre point à l'infini B'_∞ dans une direction $\vec{u}'_B$ autre que celle de l'axe. Plus précisément Φ_1' est à l'intersection du plan focal image de L_1 et du rayon passant par O_1 de direction celle du point à l'infini B_∞. De même, la direction de B'_∞ est celle de $\Phi_2 O_2$ c'est-à-dire aussi celle de $\Phi_1' O_2$.

• **Taille angulaire de l'image d'un objet à l'infini :** Comme pour le doublet convergent-convergent, l'objet $A_\infty B_\infty$ à l'infini a comme taille angulaire l'angle orienté $\theta = (\vec{u}_A, \vec{u}_B)$. De même, l'image $A'_\infty B'_\infty$ à l'infini a une taille angulaire $\theta' = (\vec{u}'_A, \vec{u}'_B)$

• **Grossissement de l'image d'un objet à l'infini :** Comme pour le doublet convergent-convergent, on définit le grossissement du doublet afocal comme le rapport algébrique $G = \dfrac{\theta'}{\theta}$.
Dans notre cas de figure, il apparaît que G est positif : ce doublet afocal laisse l'image droite par rapport à l'objet. Dans les conditions de Gauss, le grossissement devient :

$$\boxed{G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan\theta'}{\tan\theta} = -\frac{f_1'}{f_2'}}$$

Le rapport entre les distances focales détermine l'effet du doublet sur la taille de l'image :
— si $f_1' < f_2'$: le doublet est rapetissant (image plus petite que l'objet).
— si $f_1' > f_2'$: le doublet est grossissant (image plus grande que l'objet)

• **Grandissement linéaire d'un objet à distance finie :**comme pour le doublet convergent-convergent, le grandissement linéaire γ du doublet afocal est l'inverse du grandissement angulaire G et vaut donc :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f_2'}{f_1'}}$$

L'indépendance de γ par rapport à la position de l'objet est encore valable ici. La démonstration est strictement analogue à celle faite pour un doublet convergent-convergent.