OPTIQUE 3 :
Lentilles minces

École Centrale Pékin

Année 3

Table des matières

Les lentilles sphériques sont les éléments essentiels de presque tous les instruments d'optique classiques, par exemple :

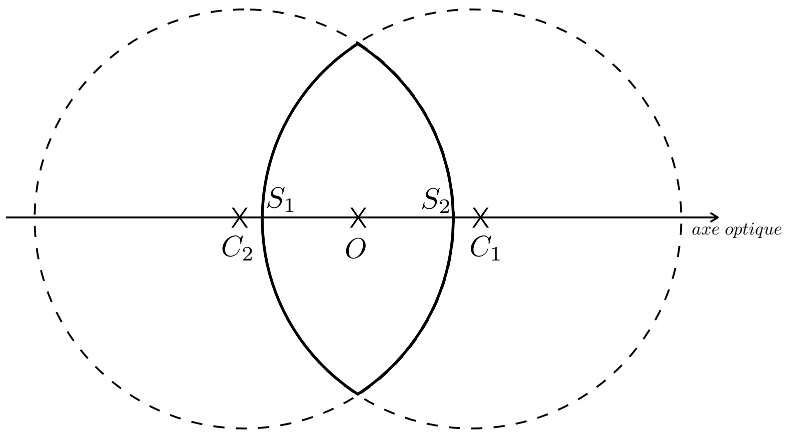
- les verres de lunette d'une personne myope sont des lentilles divergentes ;
- quand un texte est trop petit pour être lu, on utilise une loupe (lentille convergente) ;
- un objectif d'appareil photo est constitué d'une association de lentilles convergentes et divergentes ;
- l'objectif d'un microscope est une lentille épaisse convergente ;

Le but de ce chapitre est d'étudier les lentilles sphériques minces dans l'approximation de Gauss.

1 Lentilles optiques

1.1 Présentation et modélisation des lentilles

Définition : Une **lentille** est l'association de deux dioptres sphériques ou plans de même axe optique. La face d'entrée est de sommet S_1 et de centre C_1, la face de sortie est de sommet S_2 et de centre C_2. On place le centre O de la lentille au milieu du segment S_1S_2.



On peut classer les lentilles en différentes catégories en définissant au préalable :

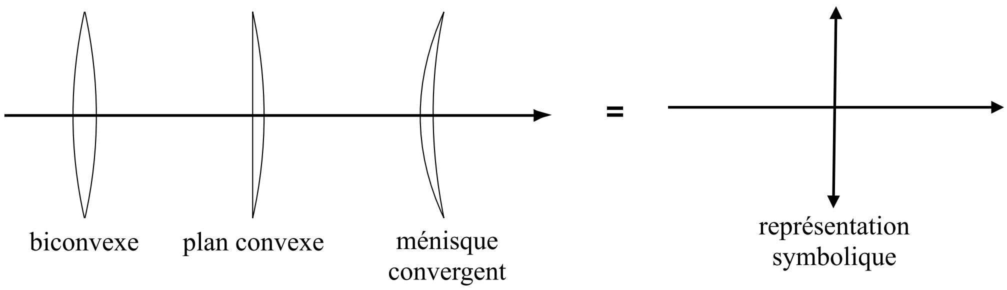
- les rayons de courbure des dioptres sphériques qui constituent la lentille sont $|R_1| = |C_1S_1|$ à l'entrée et $|R_2| = |C_2S_2|$ à la sortie,
- l'épaisseur e de la lentille est $e = S_1S_2$

Définition : Une lentille est dite **mince** si son épaisseur e est très petite devant les rayons de courbure $|R_1|$ et $|R_2|$ des dioptres qui la constituent. On peut alors confondre les points $O = S_1 = S_2$. Sinon, la lentille est dite **épaisse**.

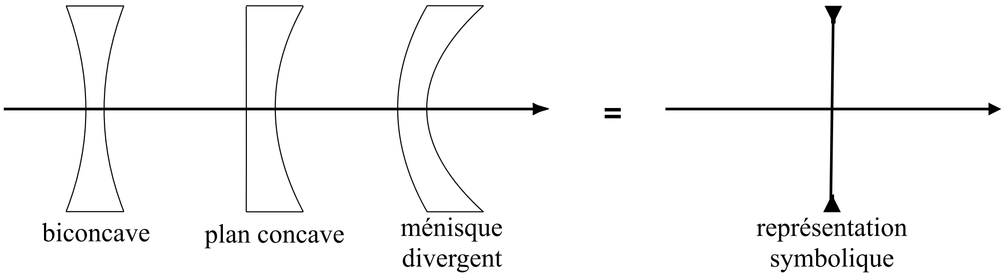
$\rightarrow$ **Dans ce cours nous n'étudierons que les lentilles minces.**

En plus de cette séparation entre lentilles mince et épaisse, on classe les lentilles en fonction de leur forme et de leur effet sur un rayon lumineux incident :

Définition : On appelle **lentille convergente** une lentille mince **à bords plus minces que le centre**. On représente ce type de lentille par une double flèche vers l'extérieur :



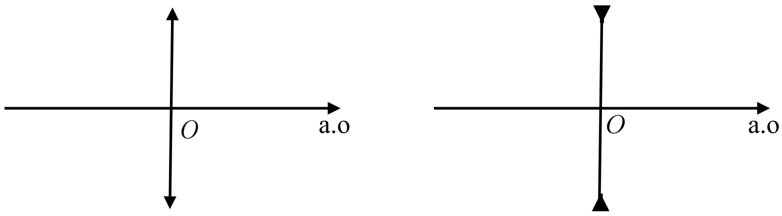
Définition : On appelle **lentille divergente** une lentille mince **à bords plus épais que le centre**. On représente ce type de lentille par une double flèche vers l'intérieur :



1.2 Points principaux d'une lentille mince

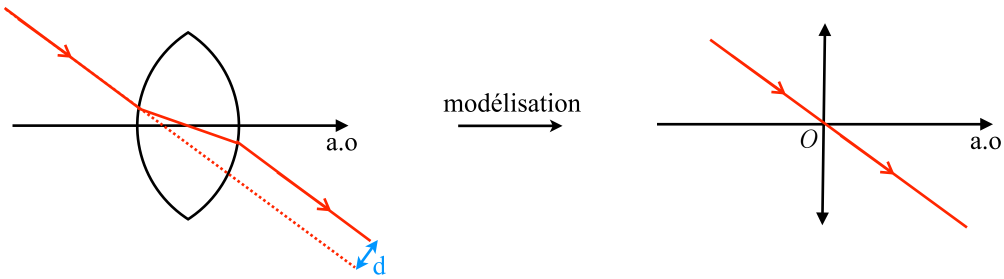
1.2.1 Centre optique d'une lentille

Définition : Le point O est appelé le **centre optique** de la lentille : dans le cas d'une lentille mince, le centre optique est confondu avec le point où la lentille croise l'axe optique.



Propriété : tout rayon lumineux passant par le centre optique d'une lentille (convergent ou divergente) n'est pas dévié.

En réalité le rayon lumineux est dévié d'une certaine quantité d définie entre la prolongation du rayon incident sans déviation (en l'absence de lentille)et le rayon émergeant. Dans le cas des lentille mince, lorsque le rayon passe par le centre optique, la déviation d est très faible et on peut considérer que le rayon n'est pas dévié.



Démonstration. Dans le modèle de la lentille mince, lorsque l'on est au niveau de l'axe optique, on assimile les dioptres à des plans perpendiculaires à l'axe optique et parallèles entre eux. Alors le rayon émergent est parallèle au rayon incident.

On montre en TD (voir TD1) que le décalage d dans le cas d'une lame à face parallèle dans les condition de Gauss est :

$$d \approx e\left(1 - \frac{1}{n}\right)i$$

avec n l'indice optique de la lentille, i l'angle d'incidence et e l'épaisseur de la lame. On a ici dans les conditions du problème :

- e très faible car la lentille est mince
- i très faible car on est dans les conditions de Gauss.

Ainsi, le décalage d est très faible et peut donc être négligé. □

1.2.2 Foyers d'une lentille

Comme dans le cas du système optique vu au chapitre précédent, on définit les foyers et plans focaux d'une lentille.

Définition : Le **foyer objet F** ou **foyer principal objet** d'une lentille est le point de l'axe optique d'où proviennent les rayons qui émergent parallèles à l'axe optique. Le plan qui perpendiculaire à l'axe optique contenant le point F est alors appelé **plan focal objet**. Tout point de ce plan hors de l'axe optique est appelé **foyer objet secondaire** : les rayons passant par le foyer objet secondaire émergent parallèles entre eux.

Le foyer principal objet, le plan focal objet et les foyers objets secondaires sont :

- **réels** pour une lentille **convergente**
- **virtuels** pour une lentille **divergente**

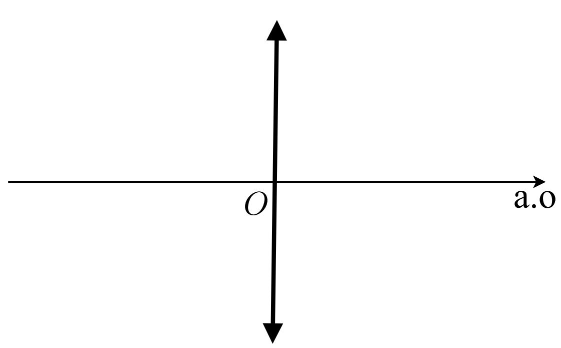


FIGURE 1 – Foyer principal objet d'une lentille convergente

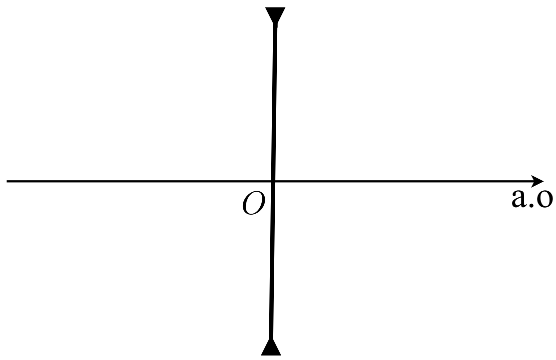


FIGURE 2 – Foyer principal objet d'une lentille divergente

Définition : Le **foyer image F'** ou **foyer principal image** d'une lentille est le point de l'axe optique où se coupent les rayons incidents parallèles à l'axe optique après traversée de la lentille. Le plan qui perpendiculaire à l'axe optique contenant le point F' est alors appelé **plan focal image**. Tout point de ce plan hors de l'axe optique est appelé **foyer image secondaire** : les rayons passant par le foyer image secondaire correspondent à des rayons incidents parallèles entre eux.

Le foyer principal image, le plan focal image et les foyers image secondaires sont :

- **réels** pour une lentille **convergente**
- **virtuels** pour une lentille **divergente**

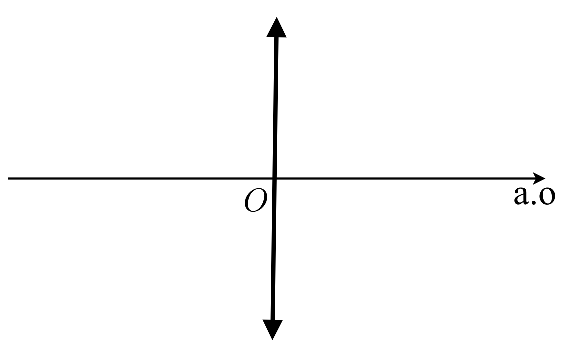


FIGURE 3 – Foyer principal image d'une lentille convergente

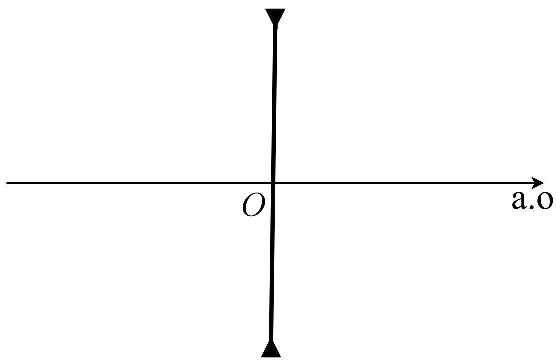
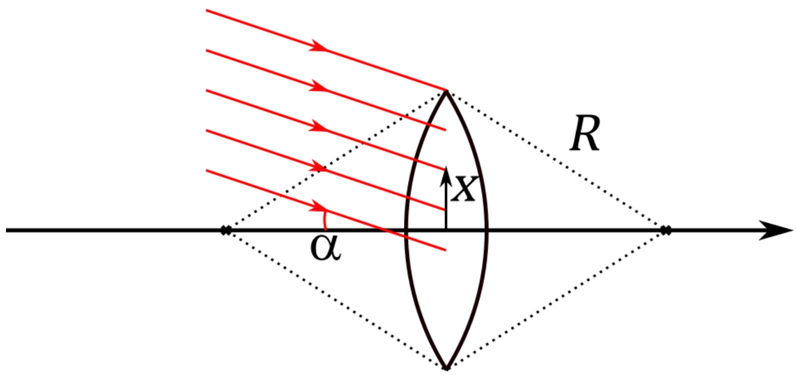


FIGURE 4 – Foyer principal image d'une lentille divergente

Définition : Pour une lentille les foyers objets et images sont symétrique par rapport à la lentille.

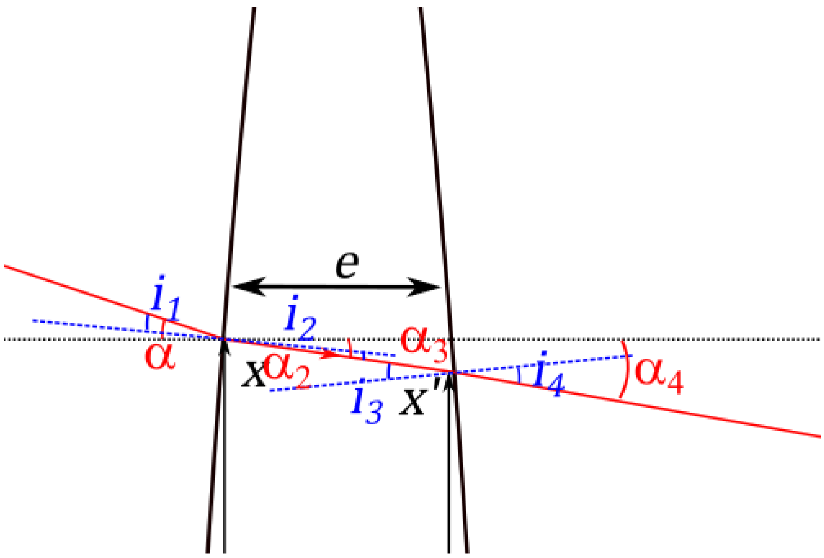
1.2.3 Construction des foyers à partir des lois de SNELL-DESCARTES

On considère **une lentille mince convergente dans les conditions de Gauss** créée par deux dioptres de rayons de courbure R_1 et R_2. Son indice optique est noté n.
On considère les rayons des rayons incidents parallèles. Ils traversent la lentille à une hauteur x avec un angle α_1 par rapport à l'axe optique.



Tous les rayons émergeant se croisent en un même point du plan focal dont la distance à la lentille ne dépend que des caractéristiques de la lentille (ici des rayons R_1et R_2 et de l'indice optique de la lentille n) et la position de ce point sur le plan focal ne dépend que de l'angle α_1.

Démonstration. Le rayon incident frappe le premier dioptre à la hauteur x. La normale est un rayon du dioptre. Elle fait donc un angle avec l'axe optique de $\arcsin \frac{x}{R_1}$.



L'angle d'incidence est donc $i_1 = \alpha_1 - \arcsin \frac{x}{R}$. D'après la troisième loi de Descartes :

$$1 \sin i_1 = n \sin i_2$$

On est dans les conditions de Gauss, donc les angles sont petits. **On peut donc assimiler les angles et leurs sinus.** On a donc :

$$i_2 \simeq \frac{\alpha_1 - \frac{x}{R_1}}{n}$$

L'angle α_2 que fait le rayon intermédiaire avec l'axe optique est :

$$\alpha_2 = i_2 + \frac{x}{R_1} = \frac{\alpha_1}{n} + (1 - 1/n)\frac{x}{R_1}$$

Le rayon intermédiaire est rectiligne, on a donc $\alpha_2 = \alpha_3$

On considère une lentille mince donc $e \simeq 0$ et $x \simeq x'$. On a donc $i_3 = \alpha_3 + \frac{x}{R_2}$.

$$i_3 = \frac{\alpha_1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x}{R_1} + \frac{x}{R_2}$$

On applique alors la troisième loi de Snell-Descartes. On a alors :

$$n \cdot i_3 = i_4 \,.$$

Donc

$$i_4 = \alpha_1 + (n-1)\frac{x}{R_1} + n\frac{x}{R_2}$$

Ainsi :

$$\alpha_4 = \alpha_1 + x(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

.

Remarque : le rayon incident passant par le centre optique ($x = 0$) n'est pas dévié.

Soit l la le long de l'axe optique après la lentille et h leur distance à l'axe optique : l'équation de ces rayons lumineux est $h(l) = x - l\sin\alpha_4 \simeq x - l\alpha_1 - lx(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Cette équation est indépendante de la position initiale x des rayons pour $l = \frac{1}{n-1}\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$. Donc tous les rayons se croisent à une distance :

$$l = \frac{1}{n-1}\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Dans la pratique cette formule n'est pas utilisé en tant que telle car il est difficile de mesurer les rayons R_1 et R_2. Cependant elle prouve l'existence du plan focal et son stigmatisme et aplanétisme dans les conditions de Gauss. □

1.2.4 Règles de construction des rayons lumineux

À partir de ces définitions, on déduit des règles pour tracer certains rayons lumineux (voir chapitre 2) :

Règles de construction des rayons lumineux :

- si le rayon incident (ou son prolongement) passe par le point focal objet principal, il émergera parallèle à l'axe optique
- si le rayon incident est parallèle à l'axe optique, alors le rayon émergent (ou son prolongement) passera par le point focal image principal

Ces deux règles sont en réalité la même en appliquant le principe de retour inverse de la lumière.

- un rayon incident passant par le centre optique n'est pas dévié
- deux rayons incidents parallèles émergent en se croisant dans le plan focal image.

Ces règles nous permettent de tracer les rayons émergents à partir de rayons incidents, mais l'inverse est possible : on peut construire les rayons incidents à partir des rayons émergents :

- si le rayon émergent (ou son prolongement) passe par le point focal image, il correspond à un rayon incident parallèle à l'axe optique
- si le rayon émergent (ou son prolongement) est parallèle à l'axe optique, alors il correspond à un rayon incident passant par le point focal objet principal.

2 Constructions géométriques de base pour les lentilles minces

2.1 Construction d'un rayon émergent à partir d'un rayon incident

2.1.1 Cas d'une lentille convergente

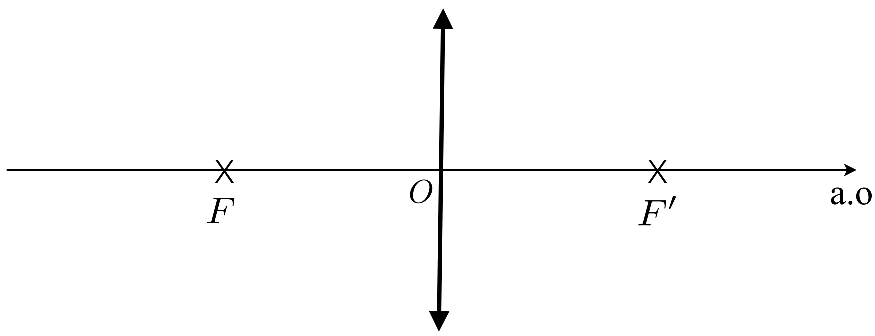
Considérons une lentille mince convergente de foyers objet F et image F'. Un rayon incident quelconque arrive sur cette lentille, on peut construire le rayon émergent en suivant la procédure suivante :

1. tracer le rayon parallèle au rayon incident passant par le centre optique : ce rayon n'est pas dévié
2. représenter le plan focal image
3. tracer le rayon émergent à partir de la lentille (continuité avec le rayon incident) en passant par l'intersection entre le plan focal image et le rayon non dévié passant par le centre optique.

Une méthode alternative consiste à utiliser un autre rayon lumineux :

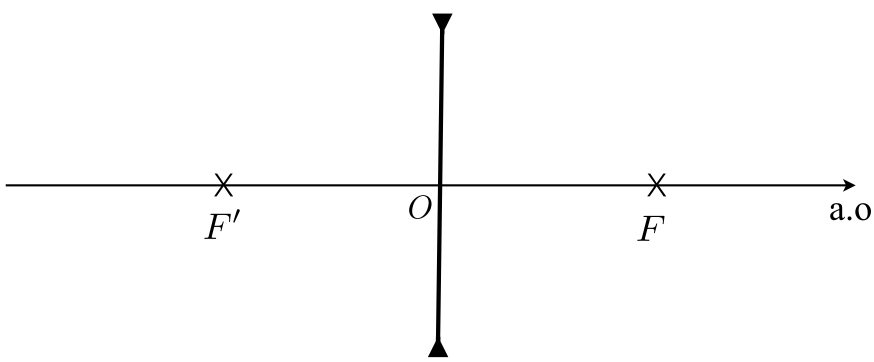
1. tracer le rayon parallèle au rayon incident passant par le foyer objet principal : ce rayon émergent parallèle à l'axe optique
2. représenter le plan focal image
3. tracer le rayon émergent à partir de la lentille (continuité avec le rayon incident) en passant par l'intersection entre le plan focal image et le rayon parallèle à l'axe optique.

Il y a donc deux façons de construire le rayon émergent à partir d'un rayon incident quelconque en se basant sur les propriétés des foyers secondaire images.



2.1.2 Cas d'une lentille divergente

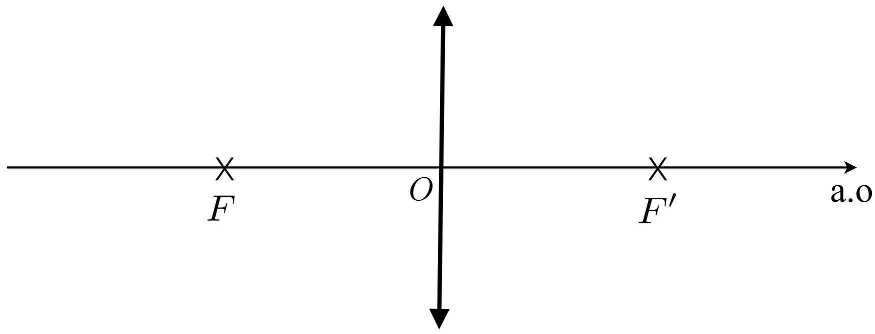
On construit le rayon émergent d'un rayon incident quelconque pour une lentille divergente en suivant une procédure similaire à celle pour la lentille convergente (attention à l'inversion entre les foyers F et F').



2.2 Construction d'un rayon incident à partir d'un rayon émergent

Dans certains cas, on a accès uniquement au rayon émergent : le but est alors de construire le rayon incident correspondant. En se basant sur le principe du retour inverse de la lumière, la procédure est similaire à celle vue précédemment (partie 2.1) : on utilise ici le plan focal objet et les propriétés des foyers images secondaires.

Exemple :



2.3 Construction d'une image A'B' d'un objet transverse AB

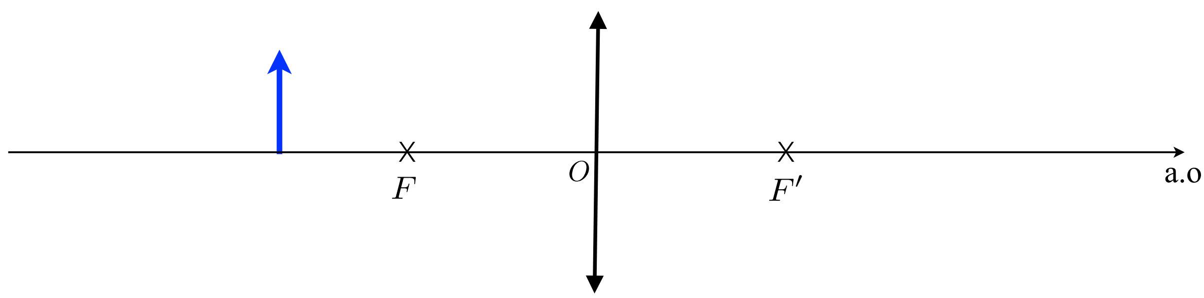
On considère un objet AB transverse avec le point A qui appartient à l'axe optique. On cherche à construire l'image A'B' après traversée de la lentille. Comme on se place dans les conditions de Gauss, l'image sera également transverse : cela signifie qu'on ne cherche que la position du point image B' (A' sera le projeté de B' sur l'axe optique). Ce point image B' se situe à l'intersection des rayons issus de B après traversée de la lentille : le problème revient donc à construire des rayons émergents.

2.3.1 Cas d'une lentille convergente

Pour construire l'image A'B' à travers une lentille convergente, on a besoin de deux rayons : B' se situe à l'intersection. Il existe plusieurs rayons exploitables facilement :

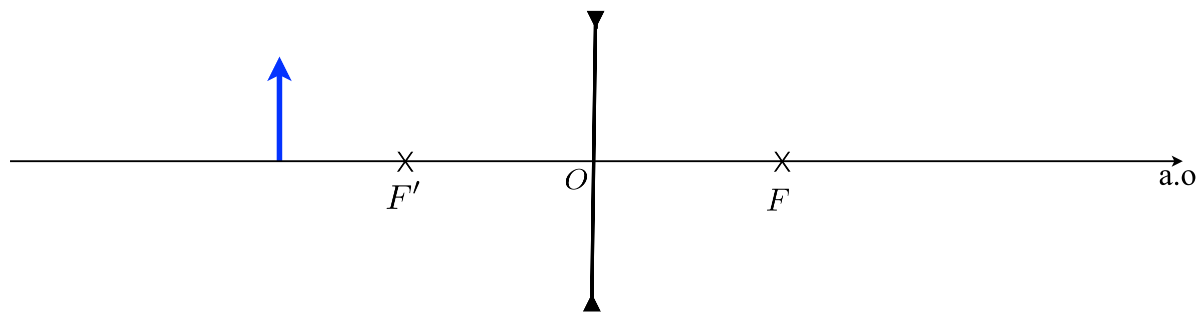
1. le rayon incident passant par B parallèle à l'axe optique qui émerge en passant par le foyer image F'
2. le rayon incident passant par B et par le centre optique O qui n'est pas dévié
3. le rayon incident passant par B et le foyer objet F qui émerge parallèle à l'axe optique

Ces trois rayons se croisent en B' : on construit deux de ces trois rayons pour déterminer l'image B'. On termine par déterminer la position de A' en projetant B' sur l'axe optique.



2.3.2 Cas d'une lentille divergente

Pour construire l'image A'B' à travers une lentille divergente, on utilise une méthode similaire à celle pour la lentille convergente (attention à l'inversion des foyers F et F').



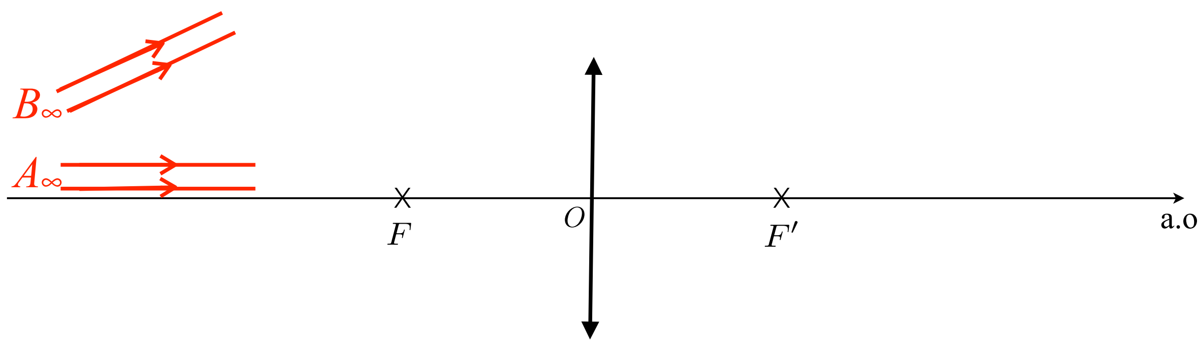
2.4 Cas particulier : construction d'une image A'B' d'un objet transverse à l'infini

Dans le cas d'un objet AB situé à l'infini dont le point A appartient à l'axe optique, la démarche est légèrement différente car les rayons à tracer pour construire l'image ne passent pas par le point B (non situé sur le schéma). Dans ce cas, on procède ainsi :

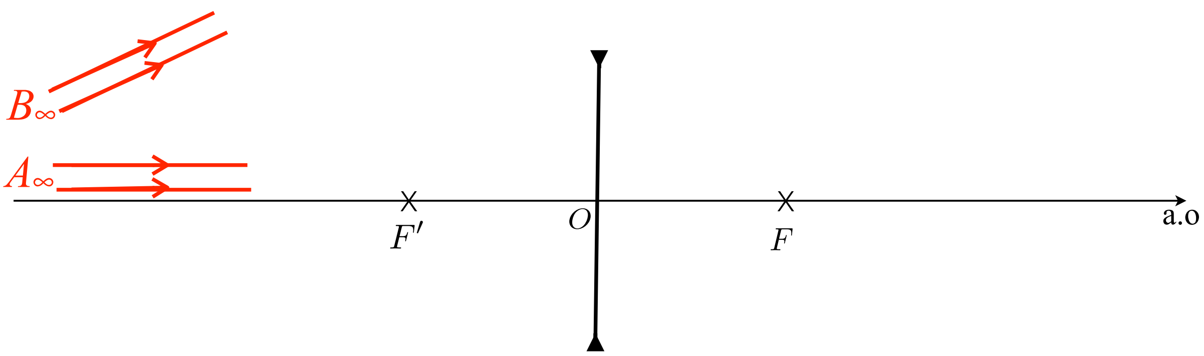
1. tracer le rayon émergent correspondant au rayon incident provenant de la direction du point B (de la même manière que dans la partie 2.1)
2. ce rayon émergent coupe le plan focal image au point B'
3. projeter le point B' sur l'axe optique pour obtenir le point A'

Dans ce cas, on obtiendra **toujours** une image sur le plan focal image de la lentille

2.4.1 Cas d'une lentille convergente



2.4.2 Cas d'une lentille divergente



2.5 Construction d'un objet AB correspondant à une image A'B' transverse

Si on a accès à l'image A'B', on peut construire son antécédent (objet AB). En se basant sur le principe de retour inverse de la lumière, la procédure est similaire à celle vue précédemment.

2.6 Distance focale

Définition : On appelle **distance focale image** d'une lentille la valeur algébrique :

$$f' = \overline{OF'}$$

La **distance focale objet** est définie par :

$$f = -f' = \overline{OF}$$

Les distances focales sont données en mètre.

On remarque que :

- une lentille **convergente** a une distance focale image positive $f' > 0$ et une distance focale objet négative $f < 0$,
- une lentille **divergente** a une distance focale image négative $f' < 0$ et une distance focale objet positive $f > 0$,
- quand on parle de "distance focale" sans préciser "image" ou "objet", il s'agit de la distance focale image.

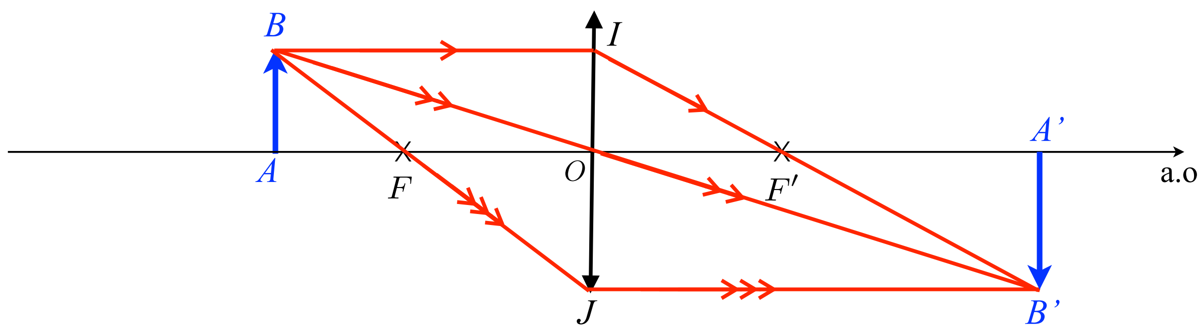
Définition : À partir de la distance focale, on définit également la **vergence** V d'une lentille :

$$V = \frac{1}{f'}$$

La vergence est donc une grandeur donnée en m^{-1} ou dioptrie δ.

2.7 Relations de conjugaison

Soit une lentille (convergente ou divergente) de distance focale image f' à travers de laquelle on observe l'image A'B' d'un objet transverse AB comme illustrée sur la figure ci-dessous :



On peut déterminer plusieurs relations de conjugaison donnant la position ou la taille de l'image en fonction de celle de l'objet et des caractéristiques de la lentille.

2.7.1 Origine au foyer : relation de Newton

Théorème - Relation de conjugaison de Newton : Les distances algébriques $\overline{FA}$ et $\overline{F'A'}$ sont liées à la distance focale image de la lentille par la relation :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$$

Démonstration. On repère les triangles semblables : $OF'I$ et $F'A'B'$, et FOJ et FAB.

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$
$$\frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

avec $\overline{OI} = \overline{AB}$ et $\overline{OJ} = \overline{A'B'}$. On a alors :

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

On trouve alors :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{F'O} \cdot \overline{FO} = -f'^2$$

□

Théorème - Relation de conjugaison de Descartes : Les distances algébriques $\overline{OA'}$ et $\overline{OA}$ sont liées à la distance focale image de la lentille par la relation :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = V$$

Démonstration. On considère les triangles $OF'I$ et $F'A'B'$:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{OF'}}$$

avec $\overline{OI} = \overline{AB}$, et $\overline{OF'} = f'$. On obtient alors :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'F'}}{f'} = \frac{\overline{A'O + f'}}{f'}$$

En divisant par $\overline{OA'}$ cette équation, on trouve :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

□

2.8 Grandissement

Définition : Le **grandissement algébrique** est défini par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

On remarque que γ peut être positif ou négatif en fonction du signe de $\overline{A'B'}$.

Le grandissement indique donc le sens de l'image et sa taille par rapport à celle de l'objet.

2.8.1 Origine aux foyers

Théorème - Grandissement avec origine aux foyers : Le grandissement γ est relié aux distances algébriques $\overline{F'A'}$ et $\overline{FA}$ ainsi qu'à la distance focale ilage f' par la relation :

$$\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = \frac{-\overline{F'A'}}{f'}$$

Démonstration.

□

2.8.2 Origine au centre optique

Théorème - Grandissement avec origine au centre : Le grandissement γ est relié aux distances algébriques $p' = \overline{OA'}$ et $p = \overline{OA}$ par la relation :

$$\gamma = \frac{p'}{p} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Démonstration.

□

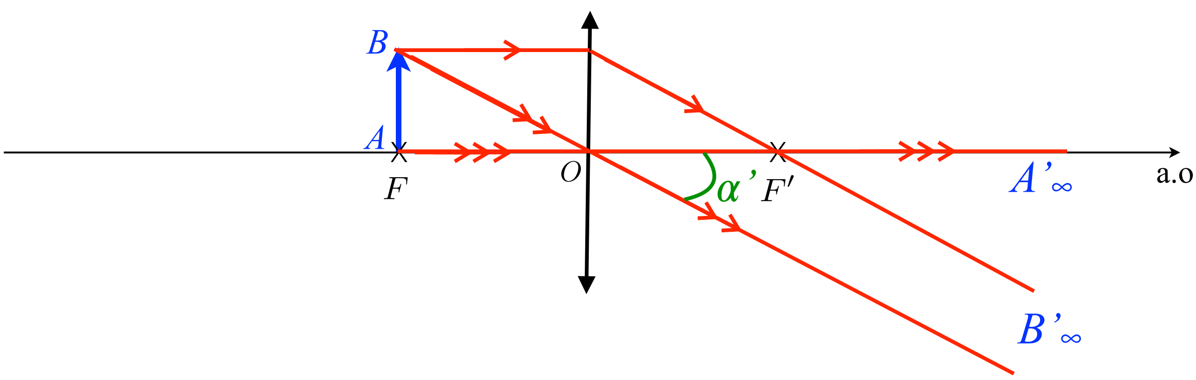
2.8.3 Cas d'un objet ou image à l'infini

Dans le cas d'un objet ou d'une image à l'infini on a :

- **objet à l'infini :** $p \to \infty$ et donc $\gamma \to 0$
- **image à l'infini :** $p' \to \infty$ et donc $\gamma \to \infty$

Le grandissement γ ne présente donc aucun intérêt ici. Par contre, c'est la relation entre la taille angulaire de l'objet α (ou de l'image α') à l'infini et la taille de l'image $\overline{A'B'}$ (ou de l'objet $\overline{AB}$) qui présente un intérêt.

Cas d'une image à l'infini :



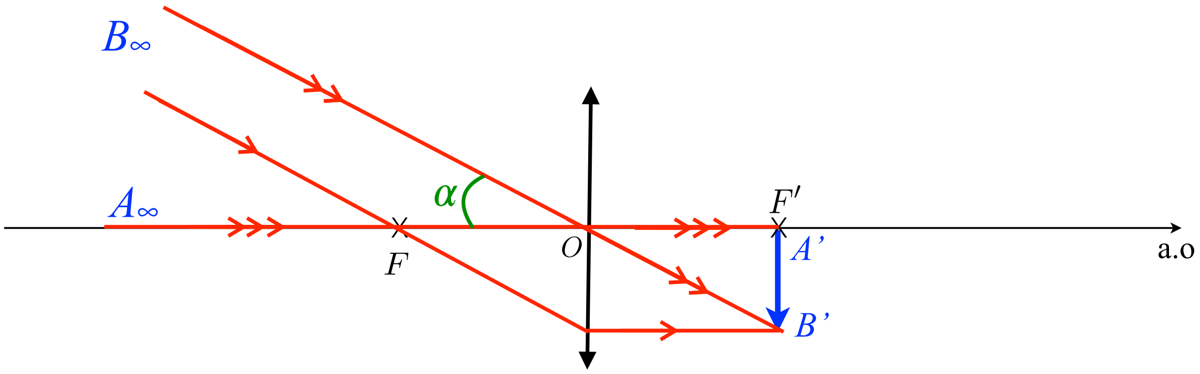
Théorème - Taille angulaire d'une image à l'infini : La taille angulaire α' de l'image A'B' à l'infini est reliée à la taille de l'objet $\overline{AB}$ et à la distance focale image f' par la relation :

$$\tan\alpha' = \frac{\overline{AB}}{-f'}$$

Remarque : Dans les conditions de Gauss, les rayons sont paraxiaux (l'angle α' est petit) et l'objet est de petite taille : on a dans ce cas

$$\tan\alpha' \approx \alpha' = \frac{\overline{AB}}{f'}$$

Cas d'un objet à l'infini :



Théorème - Taille angulaire d'un objet à l'infini : La taille angulaire α de l'objet AB à l'infini est reliée à la taille de l'image $\overline{A'B'}$ et à la distance focale image f' par la relation :

$$\tan\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{f'}$$

Remarque : Dans les conditions de Gauss, les rayons sont paraxiaux (l'angle α est petit) et l'objet est de petite taille : on a dans ce cas

$$\tan\alpha \approx \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{f'}$$

3 Association de plusieurs lentilles minces

3.1 Doublet de lentille

3.1.1 Définition

Définition : On appelle **doublet de lentilles minces** dans l'air, l'association de deux lentilles minces de même axe optique : le tout forme ainsi un système optique centré, plongé dans l'air.

Les deux lentilles formant le doublets ont les caractéristiques suivantes :

- **la première lentille rencontrée par la lumière est notée** L_1 : elle est de focale algébrique image f'_1, de centre optique O_1 et de foyers principaux F_1 et F'_1.
- **la deuxième lentille rencontrée par la lumière est notée** L_2 : elle est de focale algébrique image f'_2, de centre optique O_2 et de foyers principaux F_2 et F'_2.

Définition : On note $e = O_1O_2$ l'**épaisseur du doublet** :

- on parle de **doublet de lentilles accolées** si $e = 0$. Les lentilles étant minces, on peut considérer que par accolement, le doublet est encore mince avec $O \equiv O_1 \equiv O_2$.
- sinon, les **lentilles ne sont pas accolées** et $e \neq 0$

3.1.2 Caractère focal ou afocal d'un doublet

Définition : On note F (antécédent du point à l'infini dans la direction de l'axe) et F' (image du point à l'infini dans la direction de l'axe) les **foyers principaux du doublet** $L_1 \cup L_2$:

- le doublet est appelé **doublet focal** si F et F' sont à distance finie de O_1 : dans ce cas $F_1' \neq F_2$
- le doublet est appelé **doublet afocal** si F et F' sont à distance infinie de O_1 : dans ce cas $F_1' \equiv F_2$

Démonstration. La définition du foyer principal image objet F' se traduit par

$$A_\infty \underset{doublet}{\longrightarrow} F'$$

soit en opérant lentille après lentille

$$A_\infty \underset{L_1}{\longrightarrow} F_1' \underset{L_2}{\longrightarrow} F'$$

F' est donc l'image de F_1' par L_2.
On vérifie de même que F est l'antécédent par L_1 de F_2.
On constate alors :

- Si $F_1' \equiv F_2$ les foyers F et F' sont rejetés à l'infini et le doublet est afocal
- Si $F_1' \neq F_2$ alors le doublet est focal

□

3.1.3 Grandissement d'un doublet

Soit $A'B'$ l'image d'un objet AB transversal à travers le doublet de lentille avec :

$$A \underset{doublet}{\longrightarrow} A' \quad \text{et} \quad B \underset{doublet}{\longrightarrow} B'$$

ou en opérant lentille après lentille en définissant l'image A_1B_1 de l'objet AB par la lentille L_1 :

$$A \underset{L_1}{\longrightarrow} A_1 \underset{L_2}{\longrightarrow} A' \quad \text{et} \quad B \underset{L_1}{\longrightarrow} B_1 \underset{L_2}{\longrightarrow} B'$$

Théorème - Grandissement d'un doublet : Le grandissement γ d'un doublet de lentilles est lié aux grandissements γ_1 et γ_2 des deux lentilles du doublet par la relation :

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2$$

Démonstration. D'après la définition du grandissement :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}}$$

Le gandissement du doublet est par définition :

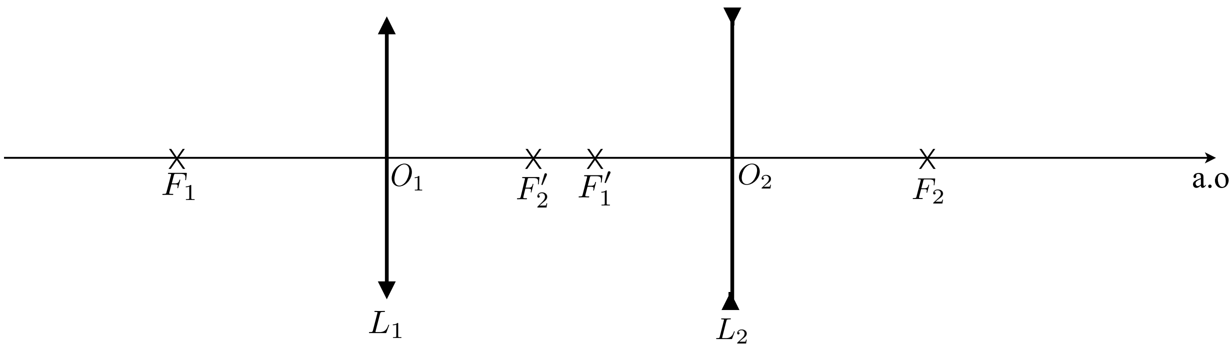
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \gamma_1\gamma_2$$

□

3.2 Cas d'un doublet focal

3.2.1 Recherche des points principaux

En considérant le doublet de lentilles comme un système optique, on peut définir les points cardinaux du doublet ainsi que les plans associés : foyers objet et image principaux F et F'. On peut déterminer la position de ces points par le calcul en fonction des distances focales des lentilles qui composent le doublets ou par construction géométrique. Nous ferons par construction géométrique.



3.2.2 Focales et vergences algébriques d'un doublet accolé focal

Théorème - Pour deux lentilles accolées, on réalise la somme des vergences. :

Démonstration. Les foyers sont superposé, donc $O = O_1 = O_2$. Soit A_1B_1 l'image intermédiaire. D'après la relation de conjugaison de Descartes appliqué à L_1 :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} = V_1 + \frac{1}{\overline{OA}}.$$

D'après la relation de conjugaison des lentilles appliquée à L_2 on a :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = V_2 + \frac{1}{\overline{OA_1}} = V_2 + V_1 + \frac{1}{\overline{OA}}$$

□

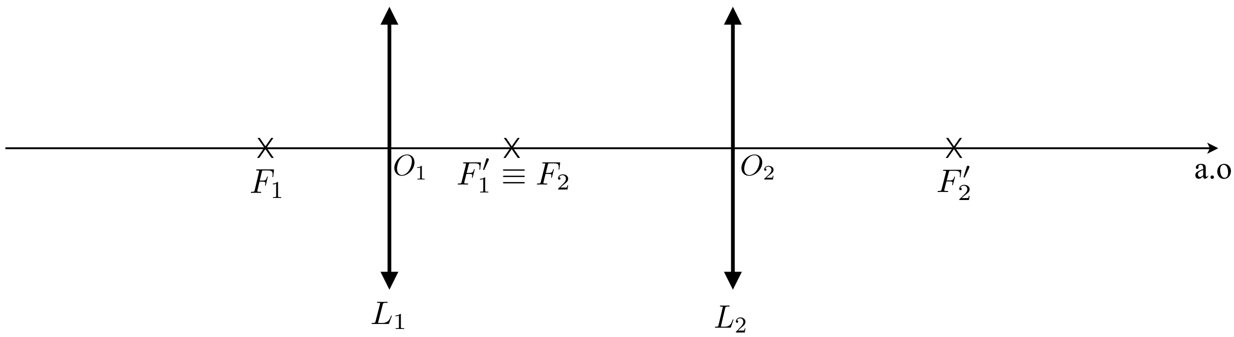
3.3 Cas d'un doublet afocal

3.3.1 Différents types de doublets afocaux

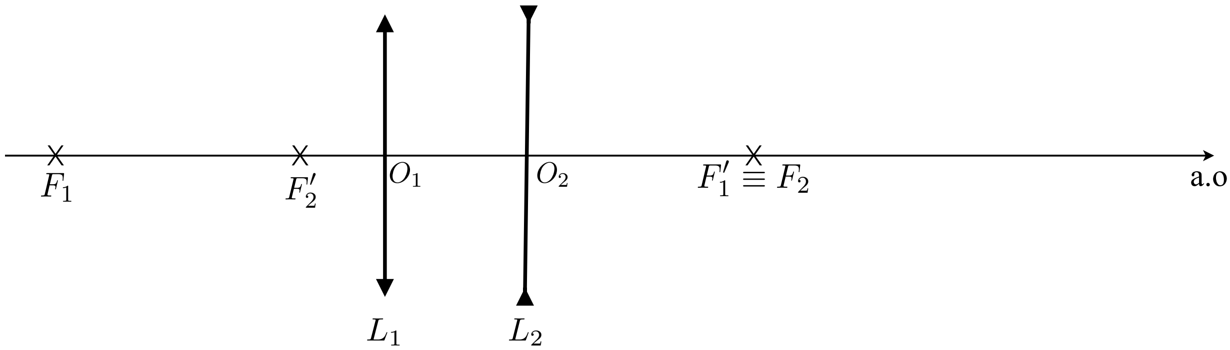
Théorème - Types de doublet afocaux : Un doublet afocal constitué de deux lentilles L_1 (de point focal image F_1') et L_2 (de point focal objet F_2) tel que F_1' et F_2 sont confondu ne peut pas être formé de deux lentilles divergentes, mais qu'il peut être formé de deux lentilles convergentes ou d'une convergente et d'une divergente dans n'importe quel ordre.

Démonstration. Rappelons que L_2 correspond à la première lentille rencontrée par la lumière et L_2 à la deuxième avec la lumière allant de gauche à droite. De plus, une lentille convergente a ses foyers réels et une divergente a ses foyers virtuels.

• **Cas convergente-convergente :** avec deux lentilles convergentes, F_1 est à gauche de O_1, F_1' est à droite de O_1 confondu avec F_2 à gauche nécessairement de O_2 par réalité : donc O_2 est à droite de O_1 ce qui est valide au vu de la numérotation. Un doublet afocal lentille convergente-lentille convergente est possible.

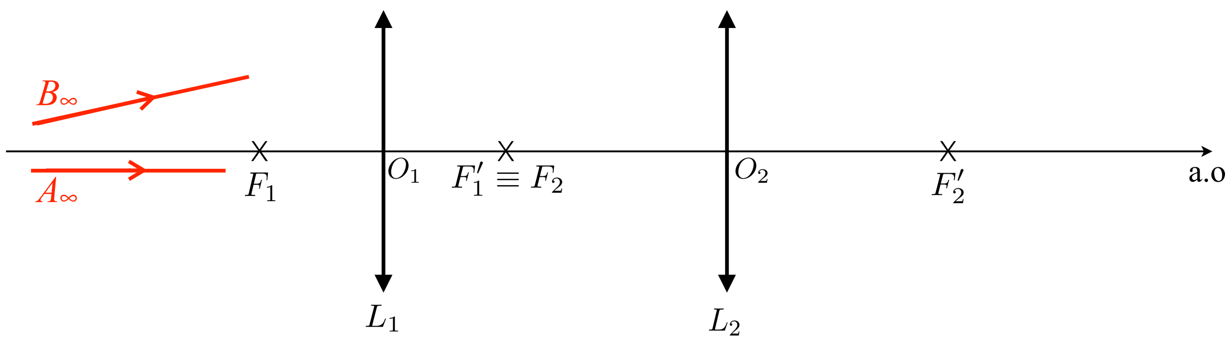


• **Cas convergente-divergente :** avec L_1 convergente et L_2 divergente, F'_1 est à droite de O_1 confondu avec F_2 qui doit être à droite aussi de O_2 par virtualité. Cela n'empêche pas O_2 d'être à droite de O_1. D'après le théorème du retour inverse, on peut aussi disposer de doublet afocal commençant par une lentille divergente et finissant par une lentille convergente.



• **Cas divergente-divergente :** supposons L_1 et L_2 divergentes : F'_1 est à gauche de O_1 confondu avec F_2 qui doit être à droite de O_2 donc O_2 est à gauche de O_1 : c'est absurde, puisque L_2 est après L_1. Il n'existe pas de doublet afocal lentille divergente-lentille divergente. □

3.3.2 Cas du doublet afocal convergent-convergent



• **Position de l'image d'un objet à l'infini :** Le point objet à l'infini A_∞ dans la direction de l'axe $\vec{u}_A$ a pour image à travers L_1 le foyer principal image F'_1 qui coïncide avec F_2. L'image définitive est donc celle de F_2 à travers L_2 donc le point image à l'infini A'_∞ dans la direction de l'axe $\vec{u}'_A = \vec{u}_A$.
Le point objet à l'infini B_∞ dans une direction $\vec{u}_B$ autre que celle de l'axe a pour image à travers L_1 un foyer

secondaire image Φ_1' qui coïncide avec un foyer secondaire objet Φ_2. L'image définitive est donc celle de Φ_2 à travers L_2 donc un autre point à l'infini B'_∞ dans une direction $\vec{u}'_B$ autre que celle de l'axe. Plus précisément Φ_1' est à l'intersection du plan focal image de L_1 et du rayon passant par O_1 de direction celle du point à l'infini B_∞. De même, la direction de B'_∞ est celle de $\Phi_2 O_2$ c'est-à-dire aussi celle de $\Phi_1' O_2$.

• **Taille angulaire de l'image d'un objet à l'infini :** L'objet $A_\infty B_\infty$ à l'infini a comme taille angulaire l'angle orienté $\theta = (\vec{u}_A, \vec{u}_B)$. De même, l'image $A'_\infty B'_\infty$ à l'infini a une taille angulaire $\theta' = (\vec{u}'_A, \vec{u}'_B)$

• **Grossissement de l'image d'un objet à l'infini :** On définit le grossissement du doublet afocal comme le rapport algébrique $G = \dfrac{\theta'}{\theta}$.
Dans notre cas de figure, il apparaît que G est négatif : ce doublet afocal renverse l'image par rapport à l'objet. Dans les conditions de Gauss, le grossissement devient :

$$\boxed{G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan\theta'}{\tan\theta} = -\frac{f_1'}{f_2'}}$$

Le rapport entre les distances focales détermine l'effet du doublet sur la taille de l'image :

— si $f_1' < f_2'$: le doublet est rapetissant (image plus petite que l'objet).

— si $f_1' > f_2'$: le doublet est grossissant (image plus grande que l'objet)

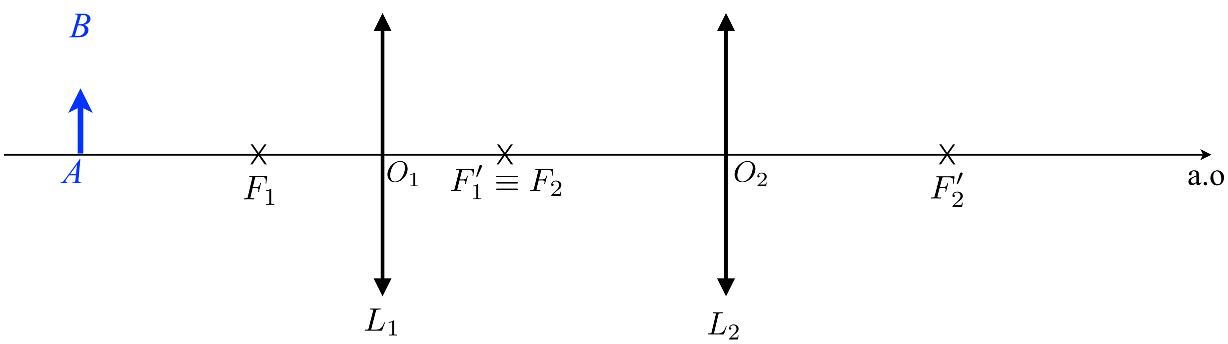
On remarque que dans le cas d'un doublet afocal, la définition du grossissement coïncide avec celle du grandissement angulaire (c'est pour cela qu'on a pris la même notation).

• **Grandissement linéaire d'un objet à distance finie :** la relation de Lagrange-Helmholtz se propage dioptre après dioptre, lentille après lentille dans les conditions de Gauss. Ainsi, ici, le grandissement linéaire γ du doublet afocal est l'inverse du grandissement angulaire G et vaut donc :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f_2'}{f_1'}}$$

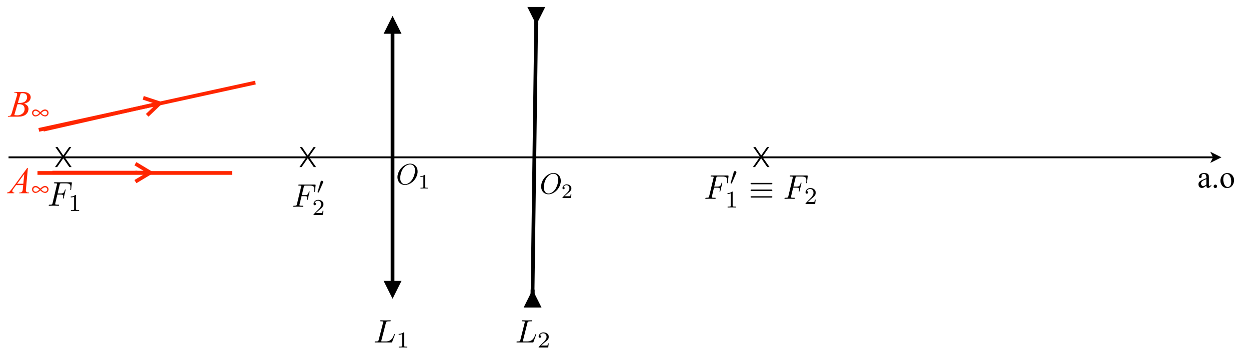
indépendamment de la position de AB. C'est une conséquence de la relation de Lagrange-Helmholtz : le grandissement linéaire du doublet afocal est indépendant de la position de l'objet.

Démonstration. Soit un objet tranverse AB. Le rayon parallèle à l'axe passant par B émerge de L_1 en passant par F_1' donc par F_2 : il émerge parallèle à l'axe. Par stigmatisme, B' se trouve quelque part sur cet émergent. Or le niveau de cet émergent relativement à l'axe ne change pas quand AB se translate, ce qui illustre l'indépendance du grandissement linéaire vis à vis de la position de l'objet AB.



□

3.3.3 Cas du doublet afocal convergent-divergent



• **Position de l'image d'un objet à l'infini :** Le point objet à l'infini A_∞ dans la direction de l'axe $\vec{u}_A$ a pour image à travers L_1 le foyer principal image F'_1 qui coïncide avec F_2. L'image définitive est donc celle de F_2 à travers L_2 donc le point image à l'infini A'_∞ dans la direction de l'axe $\vec{u}'_A = \vec{u}_A$.
Le point objet à l'infini B_∞ dans une direction $\vec{u}_B$ autre que celle de l'axe a pour image à travers L_1 un foyer secondaire image Φ'_1 qui coïncide avec un foyer secondaire objet Φ_2. L'image définitive est donc celle de Φ_2 à travers L_2 donc un autre point à l'infini B'_∞ dans une direction $\vec{u}'_B$ autre que celle de l'axe. Plus précisément Φ'_1 est à l'intersection du plan focal image de L_1 et du rayon passant par O_1 de direction celle du point à l'infini B_∞. De même, la direction de B'_∞ est celle de $\Phi_2 O_2$ c'est-à-dire aussi celle de $\Phi'_1 O_2$.

• **Taille angulaire de l'image d'un objet à l'infini :** Comme pour le doublet convergent-convergent, l'objet $A_\infty B_\infty$ à l'infini a comme taille angulaire l'angle orienté $\theta = (\vec{u}_A, \vec{u}_B)$. De même, l'image $A'_\infty B'_\infty$ à l'infini a une taille angulaire $\theta' = (\vec{u}'_A, \vec{u}'_B)$

• **Grossissement de l'image d'un objet à l'infini :** Comme pour le doublet convergent-convergent, on définit le grossissement du doublet afocal comme le rapport algébrique $G = \dfrac{\theta'}{\theta}$.
Dans notre cas de figure, il apparaît que G est positif : ce doublet afocal laisse l'image droite par rapport à l'objet. Dans les conditions de Gauss, le grossissement devient :

$$\boxed{G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan\theta'}{\tan\theta} = -\frac{f'_1}{f'_2}}$$

Le rapport entre les distances focales détermine l'effet du doublet sur la taille de l'image :
— si $f'_1 < f'_2$: le doublet est rapetissant (image plus petite que l'objet).
— si $f'_1 > f'_2$: le doublet est grossissant (image plus grande que l'objet)

• **Grandissement linéaire d'un objet à distance finie :**comme pour le doublet convergent-convergent, le grandissement linéaire γ du doublet afocal est l'inverse du grandissement angulaire G et vaut donc :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f_2'}{f_1'}}$$

L'indépendance de γ par rapport à la position de l'objet est encore valable ici. La démonstration est strictement analogue à celle faite pour un doublet convergent-convergent.