

---

# Travaux dirigés de Thermodynamique 2 :

## Gaz parfait, Gaz réels

École Centrale Pékin

2019-2020

---

### APPLICATION DU COURS

#### Exercice 1 : Détermination des coefficients d'état

On rappelle les définitions des coefficients thermoélastiques :

- le coefficient de dilatation isobare :  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$  ;
- le coefficient de compressibilité isotherme :  $\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$  ;
- le coefficient de compression isochore :  $\beta = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$ .

Déterminer l'équation d'état d'un fluide dont on connaît  $V(T_0, P_0)$ ,  $\alpha = \frac{3aT^3}{V}$  et  $\chi_T = \frac{b}{V}$  ( $a$  et  $b$  sont supposés constants).

### S'ENTRAÎNER

#### Exercice 2 : Diagramme d'Amagat

Le diagramme d'Amagat est un diagramme (PV,P). Il est généralement utilisé pour vérifier si un gaz suit le modèle du gaz parfait. On considère ici une mole de gaz.

1. Tracer pour plusieurs valeurs de  $T$ , les courbes représentant l'évolution isotherme d'un gaz parfait.
2. On considère maintenant que le gaz suit le modèle des sphères dures. Comment s'écrit l'équation d'état ? Tracer, sur le diagramme précédent, les courbes correspondantes à ce nouveau modèle pour les mêmes valeurs de  $T$ .
3. On considère maintenant que le gaz suit la loi de Van der Waals :

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

a) Montrer que, pour les grands volumes :

$$PV = RT + \frac{bRT - a}{V}$$

b) On admet que l'équation précédente peut être remplacée par l'équation suivante pour les basses pressions :

$$PV = RT + \frac{P(bRT - a)}{RT}$$

Justifier rapidement pourquoi peut-on faire cette substitution.

- c) Tracer alors sur le même diagramme que précédemment, les courbes d'un gaz qui suit cette nouvelle équation, pour les mêmes valeurs de  $T$  que précédemment.
- d) Y-a-t-il une température pour laquelle on retrouve la loi des gaz parfaits ?
- e) Comparer les courbes tracées avec le diagramme du cours (figure 2) Dans quelles régions s'éloigne-t-on du tracé? Expliquer pourquoi.

### Exercice 3 : Développement du Viriel

Pour une mole de gaz réel, on admet qu'il est possible d'écrire  $PV/RT$  comme une fonction de  $V$  et  $T$  uniquement. Le développement du Viriel consiste à effectuer un développement limité de la fonction  $PV/RT$  en  $1/V$ , c'est-à-dire :

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \frac{D}{V^3} + \dots$$

1. Qualitativement, expliquer pourquoi faut il que  $\frac{PV}{RT} \sim 1$  lorsque  $V \rightarrow +\infty$ .
2. À partir de l'équation de Van der Waals, déterminer les coefficients  $B$ ,  $C$  et  $D$  du développement du Viriel en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $R$  et  $T$ .
3. Calculer la température  $T_b$  pour laquelle  $B$  s'annule. Que peut-on dire du comportement du gaz pour cette température? Est ce que cela est vrai quelque soit la pression ?
4. Une autre équation d'état (proposée en 1949 par Redlich-Kwong) est la suivante :

$$RT = \left( P + \frac{a'}{V(V+b)\sqrt{T}} \right) (V - b')$$

Calculer le coefficient  $B$  et la température d'annulation,  $T_B$ .

## POUR ALLER PLUS LOIN

**Exercice 4 : Calcul de la pression cinétique dans un gaz**

Dans cet exercice, on considère un gaz parfait et on cherche à calculer la pression cinétique. On prend un autre modèle de distribution des vitesses que celui vu dans le cours. On garde le modèle des chocs élastiques sur une paroi, et on suppose une distribution de vitesse homogène isotrope et stationnaire. On note  $n^*$  la densité volumique des particules.

En effet on va considérer pour cet exercice, l'aspect statistique du gaz de particules. La probabilité qu'une particule ait la vitesse  $\vec{v}$  à  $dv_x dv_y dv_z$  près est notée  $f(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z$ .

1. Pourquoi  $f(\vec{v})$  ne dépend pas du temps et du point de l'espace ?
2. Expliquer pourquoi  $f$  vérifie t-elle l'équation suivante :

$$\int_{v_x \in \mathbb{R}} \int_{v_y \in \mathbb{R}} \int_{v_z \in \mathbb{R}} f(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = 1$$

3. On donne la formule permettant de calculer  $\langle v_x \rangle$  en utilisant  $f$  :

$$\langle v_x \rangle = \int_{v_x \in \mathbb{R}} \int_{v_y \in \mathbb{R}} \int_{v_z \in \mathbb{R}} v_x f(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z$$

Expliquer la formule ci dessus (éventuellement en vous aidant de la formule de la moyenne dans le cas discret). Que valent  $\langle v_x \rangle, \langle v_y \rangle$  et  $\langle v_z \rangle$  ?

4. Exprimer alors la vitesse quadratique moyenne au carré,  $u^2 = \langle v^2 \rangle$  en fonction de  $f(\|\vec{v}\|)$  à l'aide d'un changement de variable. Écrire  $\langle v_x^2 \rangle$  en fonction de  $u^2$ .
5. Considérons les chocs qui ont lieu pendant un instant  $dt$  sur une portion de paroi  $\vec{S} = S \vec{e}_x$ . Pour une vitesse  $\vec{v}$  fixée, calculer le nombre  $dN$  de molécules présentes dans le cylindre de section  $S$  et de génératrice  $\vec{v} dt$ .
6. Parmi ces molécules, combien ont la vitesse  $\vec{v}$  ? On note  $dN_v$  ce nombre.
7. Pour une molécule, calculer sa variation de quantité de mouvement pendant  $dt$ . Quelle est alors la variation totale de quantité de mouvement pour toutes les molécules ayant la vitesse  $\vec{v}$ .
8. En sommant sur les trois composantes de la vitesse, écrire la variation totale de quantité de mouvement des particules qui frappent la paroi. Retrouver alors le résultat du cours :

$$P = \frac{1}{3} n^* m u^2$$