北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Algèbre 4

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

23 février 2020

Table des matières

Chapitre 1 Espaces préhilbertiens

Table des matières du chapitre

1.1 Généralités

Définition 1

Une forme bilinéaire sur E est une applcation $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in E$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire et pour tout $y \in E$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire :
$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$,

$$\begin{cases} \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y_1) = \lambda_1 \varphi(x_1, y_1) + \lambda_2 \varphi(x_2, y_1) \\ \\ \varphi(x_1, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \varphi(x_1, y_1) + \lambda_2 \varphi(x_1, y_2) \end{cases}$$

On dit que

- *φ est symétrique si $\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$*
- *φ est antisymétrique si $\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$*
- *φ est positive : $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$.*
- *φ est définie positive : $\forall x \in E \setminus \{0\},\ \varphi(x,x) > 0$.*

Définition 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive φ sur E.
On notera souvent le produit scalaire $(\ |\ )$ ou $<\ |\ >$.

Exemple 3 —

1. *Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire euclidien canonique est défini par*

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY$$

où $x = (x_1, \cdots, x_n) = {}^t X$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) = {}^t Y$.

2. *Si $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, alors $(f,g) \mapsto \int_a^b fg$ est un produit scalaire.*
3. *Si E est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$, continues et 2π-périodiques, alors $(f,g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} fg$ est un produit scalaire.*
4. *Si $E = \mathbb{R}_n[X]$, alors $(P,Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$ définit un produit scalaire où les réels a_i sont deux à deux distincts.*
5. *Si $E = \mathbb{R}[X]$, alors*
   (a) *$(P,Q) \mapsto \sum_{i=0}^{d} a_i b_i$ définit un produit scalaire où $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{d} b_i X^i$.*
   (b) *$(P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$ définit un produit scalaire.*

DÉFINITION 4
Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire φ sur E est un espace préhilbertien. On écrira : soit (E,φ) un espace préhilbertien.
Si E est de dimension finie, on dit que E est un espace vectoriel euclidien.

REMARQUE 5 —

1. *Pour montrer que φ définit un produit scalaire on vérifie que φ est symétrique, linéaire suivant l'une des deux variables puis on montre que $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geq 0$ avec égalité ssi $x = 0$.*
2. *Si (E,φ) est un espace préhilbertien, on écrira $\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$ s'il n'y a pas ambiguïté.*

THÉORÈME 6
Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace vectoriel préhilbertien.

1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

$$\forall x, y \in E,\ (x|y)^2 \leq (x|x)\,(y|y)$$

et on a égalité ssi x et y sont liés.

2. *(Inégalité de Minkowsky)*

$$\forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et on a égalité ssi x et y sont positivement liés.

Preuve — On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x|y) + t^2\|y\|^2 \geq 0$. P est un polynôme de degré au plus 2.

1. Si $\|y\| = 0$, alors les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowsky sont en fait des égalités. Dans ce cas x et 0 sont positivement liés.
2. Sinon, P est un polynôme de degré 2 de signe constant, son discriminant est négatif,

$$\delta = (x|y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2 \leq 0,$$

ce qui donne exactement l'inégalité de Schwarz et on a une égalité ssi le discriminant est nul : dans ce cas la racine double de P t_0 vérifie $\|x + t_0 y\| = 0$ et x et y sont liés.

3. Pour l'inégalité de Minkowksy, on compare les carré :

$$\begin{array}{rcl} \|x+y\|^2 & = & \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \\ & \leq & \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \ (\mathrm{Cauchy-Schwarz}) \\ & \leq & (\|x\| + \|y\|)^2 \end{array}$$

Le cas dégalité correspond au cas d'égalité dans Cauchy-Scwarz plus $(x|y) \geq 0$. Donc x et y sont liés et si $x = \lambda y$, on a bien $\lambda \geq 0$ (le cas $y = 0$ a déjà été traité.)

□

Exemple 7 —

1. *Montrer les inégalités suivantes et donner les cas d'égalité :*
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2\,;\quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\ \left(\int_a^b f\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2.$$
2. *Soit* $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ *telle que* $f(a)=0$. *Montrer que*
$$\int_a^b |f(t)|^2\,dt \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(t)|^2\,dt.$$
Pour cela, on écrit pour tout $t \in [a,b]$
$$|f(t)|^2 = \left(\int_a^t f'(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^t |f'(x)|\,dx\right)^2$$
$$\leq \int_a^t 1^2\,dx \int_a^t |f'(x)|^2\,dx \leq (t-a)\int_a^b |f'(x)|^2\,dx$$
qu'il suffit d'intégrer. Peut-on avoir égalité ?
3. *Par récurrence, on montre que si* $(E,(\ |\ ))$ *est un espace préhilbertien, alors*
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1,\cdots,x_p \in E,\ \|x_1+\cdots+x_p\| \leq \|x_1\|+\cdots+\|x_p\|.$$
Quand a-t-on égalité ?

1.2 Expression matricielle du produit scalaire

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie.

Définition 8
La matrice d'une application φ *bilinéaire sur* E *rapporté à la base* $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ *est la matrice*
$$A = (\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Proposition 9
Soit φ *bilinéaire de matrice* A *sur* E *rapporté la base* $\mathcal{B}$. *Alors*
$$\forall x,y \in E,\ \varphi(x,y) = {}^tXAY.$$

Preuve — On a posé $x=(x_1,\cdots,x_n)={}^tX$ et $y=(y_1,\cdots,y_n)={}^tY$, et
$$\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_iy_j\varphi(e_i,e_j) = {}^tXAY.$$
□

Proposition 10
Une forme bilinéaire sur E *est symétrique (resp. anti-symétrique) ssi sa matrice* A *dans une base* $\mathcal{B}$ *de* E *est symétrique (resp. antisymétrique).*

Preuve — Si φ est symétrique (resp. anti-symétrique), alors $A=(\varphi(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique (resp. antisymétrique) puisque $\varphi(e_i,e_j)=\varphi(e_j,e_i)$ (resp. $\varphi(e_i,e_j)=-\varphi(e_j,e_i)$).
Réciproquement, comme
$$\forall x,y \in E,\ \varphi(x,y) = {}^tXAY \Rightarrow \varphi(x,y) = {}^t\varphi(x,y) = {}^t\left({}^tXAY\right) = {}^tY{}^tA^t({}^tX) = {}^tY{}^tAX.$$
Et donc si A est symétrique (resp. anti-symétrique), alors $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ (resp. $\varphi(x,y)=-\varphi(y,x)$). □

COROLLAIRE 11
Les dimensions de $\mathcal{L}_2(E)$, $\mathcal{L}_2^s(E)$ *et* $\mathcal{L}_2^a(E)$ *sont respectivement* n^2, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Preuve — Ce sont les dimensions des espaces des matrices carrées, carrées symétriques et carrées anti-symétriques d'ordre n.

□

EXEMPLE 12 —

1. *Montrer que* $\varphi_1 : (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \mapsto 2x_1y_1 + 5x_2y_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1$ *bilinéaire symétrique sur* $\mathbb{R}^2$:
$$\varphi_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
avec M *matrice symétrique. Donc* φ *est bilinéaire symétrique.*
2. *Soit* $\varphi_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$\varphi_2(X, Y) = 2x_1y_1 + 4x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_1y_3 + 5x_3y_1 + 3x_2y_3 + 2x_3y_2$$
n'est pas symétrique car $\varphi(e_2, e_3) = 3$ *et* $\varphi(e_3, e_2) = 2$.
3. *Soit* $\varphi_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$$\varphi_3(X, Y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2$$
est une application bilinéaire symétrique, car sa matrice associée dans la base canonique est symétrique : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *Déterminer la forme bilinéaire symétrique sur* $\mathbb{R}^3$ *de matrice* A *dans la base canonique.*

PROPOSITION 13
(Changement de bases) Soit $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E *et* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$. *Si* φ *est une application bilinéaire symétrique de matrice* A *dans la base* $\mathcal{B}$ *et de matrice* A' *dans la base* $\mathcal{B}'$, *alors*
$$A' = {}^tPAP.$$

Preuve — En effet, si $x, y \in E$ de coordonnées X et Y dans $\mathcal{B}$ et X' et Y' dans $\mathcal{B}'$. Alors $X = PX'$ et $Y = PY'$, on en déduit que
$${}^tXAY = {}^tX'{}^tPAPY'$$
donc pour tous vecteurs colonnes X' et Y', ${}^tX'A'Y' = {}^tX'{}^tPAPY'$ et ${}^tX'(A' - {}^tPAP)Y' = 0$, d'où l'égalité annoncée. □

REMARQUE 14 — *Il résulte de la formule de changement de base que* $\det A' = (\det P)^2 \det A$, *donc on ne peut pas définir de déterminant d'une forme bilinéaire indépendamment d'une base, mais le signe du déterminant lui, ne dépend pas de la base. Par contre le rang est invariant.*

REMARQUE 15 — *Si* φ *est une application de* $E^2 \to \mathbb{R}$ *qui s'écrit* $\varphi(x, y) = {}^tXAY$ *avec* X *et* Y *les coordonnées de* x *et* y *dans une base donnée, alors* φ *est bilinéaire, et est symétrique ssi* A *l'est.*
La question de savoir si φ *est positive ou définie positive est plus subtil.*

1.3 La norme euclidienne

PROPOSITION 16
Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $(\ |\ )$. *L'application* $\|\ \| : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ *est une norme sur* E, *appelée norme euclidienne associée à* $(\ |\ )$.

Preuve — L'application $\| \ \|$ est une norme car

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car un produit scalaire est défini positif.
2. $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x|x)}$ car un produit scalaire est bilinéaire, d'où $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ d'après l'inégalité de Minkowski et on a égalité ssi x et y sont positivement liés.

□

Proposition 17
Soit E un espace muni d'un produit scalaire $(\ | \ )$ et $\| \ \|$ la norme euclidienne associée. Pour tout $(x, y) \in E^2$:

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$
2. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$
3. $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x|y)$
4. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *(Identité du parallélogramme)*

Preuve — Développer les produits scalaires sous-jacents. L'identité du parallélogramme se traduit géométriquement : "la somme des carrés des longueurs des côtés du parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales du parallélogramme" □

On sait que si $(\ | \ )$ est un produit scalaire, alors $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme.
On se pose la question : "réciproquement, si N est une norme, est-ce une norme euclidienne, c'est-à-dire existe-t-il un produit scalaire $(\ | \ )$ dont la norme N est issue ? " La réponse n'est pas toujours oui, et on cherche une condition nécessaire et suffisante sur N, pour qu'elle dérive d'un produit scalaire. On peut montrer que vérifier l'inégalité du parallélogramme est une condition nécessaire et suffisante, mais nous en donnons ici une plus élémentaire et très utile.

Proposition 18
N est une norme euclidienne si et seulement si

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2}\left(N^2(x+y) - N^2(x) - N^2(y)\right)$$

est un produit scalaire.

Preuve — Si N est une norme euclidienne issue d'un produit scalaire $(\ | \ )$, alors

$$N^2(x+y) - N^2(x) - N^2(y) = (x+y|x+y) - (x|x) - (y|y) = 2(x|y),$$

donc $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}\left(N(x+y)^2 - (N(x))^2 - (N(y))^2\right)$ est un produit scalaire.
Réciproquement, si $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}\left(N^2(x+y) - N^2(x) - N^2(y)\right)$ est un produit scalaire $\langle ., . \rangle$, alors pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle = \frac{1}{2}\left(N(x+x)^2 - (N(x))^2 - (N(x))^2\right)$, or N étant une norme, l'homogénéité assure $\langle x, x \rangle = \frac{1}{2}\left(4N(x)^2 - (N(x))^2 - (N(x))^2\right) = N^2(x)$, donc N est euclidienne issue de $\langle ., . \rangle$ □

Exemple 19 —

1. *Montrer que* $N : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2}$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *est une norme euclidienne.*
   Posons $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$, *alors* φ *est bilinéaire symétrique et* $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1+x_2)^2 + 2x_2^2$, *donc* φ *est définie positive ; il s'agit donc d'un produit scalaire, et* $N(x_1, x_2) = \sqrt{\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2))}$, *donc* N *est une norme euclidienne.*
2. *La norme* $\| \ \|_\infty$ *n'est pas une norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$ *car l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée : si* $x = (2, 0, \cdots, 0)$ *et* $y = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, *on a*

$$8 = \|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 \neq 2\left(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2\right) = 10$$

.

Remarque 20 — *Nous avons montré que sur un espace vectoriel euclidien (donc de dimension finie) toutes les normes sont équivalentes, mais en fait seules les normes euclidiennes donneront une géométrie qui correspond à la géométrie usuelle : la géométrie euclidienne.*

1.4 Orthogonalité

1.4.1 Vecteurs orthogonaux

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$

Définition 21
Soient $u, v \in E$. On dit que u est orthogonal à v, noté $u \perp v$, si $(u|v) = 0$.

Remarque 22 — *Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout vecteur de E, puisque par linéarité à droite : $\left(u|0.\overrightarrow{0}\right) = 0.(u|\overrightarrow{0}) = 0$ et c'est le seul car si $a \in E$ vérifie $\forall x \in E$, $(a|x) = 0$, alors $(a|a) = 0$ et donc $a = 0$.*

Exemple 23 — *Soit $E = \mathcal{C}^0\left([0, 2\pi], \mathbb{R}\right)$ muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$.*
Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose $e_n = \cos nx$ et $f_m = \sin mx$, alors

1. *On calcule $(e_n|f_m)$:*

$$(e_n|f_m) = \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\, dx = 0,$$

car $e_n f_m$ est 2π-périodique et impaire !

2. *Puis pour $(m, n) \neq (0, 0)$,*

$$(e_n|e_m) = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \int_0^{\pi} (\cos(n+m)x + \cos(n-m)x)\, dx = \delta_{m,n}\pi$$

car e_n est paire et 2π-périodique et la primitive de $\cos$ est $\sin$ et $(e_0|e_0) = 2\pi$.

3. *Et enfin $(f_n|f_m)$*

$$(f_n|f_m) = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \int_0^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\, dx = \delta_{n,m}\pi.$$

Les vecteurs de la famille (e_n, f_m) sont donc deux à deux orthogonaux.

Proposition 24
(Théorème de Pythagore) Soit E un espace vectoriel réel, alors

$$\forall u, v \in E,\ u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Preuve — On a $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,(u|v)$, donc $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si et seulement si $(u|v) = 0$, soit si et seulement si $u \perp v$. □

1.4.2 Sous-espaces orthogonaux

§ *1. Définitions* E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$

Définition 25
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$ et $x \in E$. L'orthogonal de x, noté $x^\perp$, est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à x :

$$x^\perp = \{y \in E \mid y \perp x\} = \{y \in E \mid (x|y) = 0\}.$$

Proposition 26
$x^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve — Par définition du produit scalaire, l'application $\varphi_x : E \to \mathbb{K}\ y \mapsto (x|y)$ est linéaire et vérifie $\ker \varphi_x = x^{\perp}$. □

DÉFINITION 27
Soit $A \subset E$, une partie quelconque de E (pas nécessairement un sous-espace vectoriel). L'orthogonal de A, noté $A^{\perp}$, est l'ensemble des vecteurs y de E, orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^{\perp} = \{y \in E \mid \forall x \in A,\ x \perp y\}.$$

REMARQUE 28 — *Par définition, $A^{\perp} = \bigcap_{x \in A} x^{\perp}$ et donc $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels.*

§ 2. *Propriétés*

PROPOSITION 29

1. $E^{\perp} = \{0\}$ *et* $\{0\}^{\perp} = E$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
3. *Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de F alors $\mathcal{G}^{\perp} = F^{\perp}$.*
4. $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.
5. $\forall F \subset E$ *sous-espaces vectoriels,* $F \oplus F^{\perp}$.
6. $\forall F, G \subset E$ *sous-espaces vectoriels,* $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ *et* $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.

Preuve —

1. C'est la remarque 22.
2. Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \subset B$, et $x \in B^{\perp}$. Alors $\forall y \in B$, $(x|y) = 0$, donc $\forall y \in A \subset B$, $(x|y) = 0$, d'où $x \in A^{\perp}$. Ce qui montre l'inclusion $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
3. D'après 2), si $F = \operatorname{Vect} \mathcal{G}$, alors $F^{\perp} \subset \mathcal{G}^{\perp}$. De plus, si $x \in \mathcal{G}^{\perp}$, alors tout $y \in F$ s'écrit $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, \cdots, y_l \in \mathcal{G}$ et donc
$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x|y_k) = 0, \text{ car } \forall k \in [\![1, n]\!]\ (x|y_k) = 0$$
c'est-à-dire $y \in F^{\perp}$.
Par double inclusion, on a montré que $\mathcal{G}^{\perp} = F^{\perp}$.
4. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $\forall x \in A$ et $\forall y \in A^{\perp}$, alors $x \perp y$, donc $x \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$, c'est-à-dire $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.
5. Si $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $(x|x) = 0$ et $x = 0$, d'où le résultat annoncé.
6. Si $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$, alors $\forall x_F + x_G \in F + G$, $(x|x_F + x_G) = 0$, donc $x \in (F+G)^{\perp}$.
Réciproquement si $x \in (F+G)^{\perp}$, alors $\forall x_F \in F$, $(x|x_F) = 0$ et $\forall x_G \in G$, $(x|x_G) = 0$, donc $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. On conclut par double inclusion.
Pour la dernière inclusion, il suffit de remarquer que $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$ et de passer à l'orthogonale.

□

EXEMPLE 30 —

1. *Soit* $F = \operatorname{vect}(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$. *On a* $F^{\perp} = f_1^{\perp} \cap f_2^{\perp} = \mathbb{R}(1, -1, 1)$.
2. *Soir $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_a^b fg$ et soit $F = \mathbb{R}[X] \subset E$ en assimilant polynôme et fonction polynomiale. Par définition,*
$$F^{\perp} = \{f \in E \mid \forall P \in \mathbb{R}[X]\ \int_a^b P(t) f(t)\, dt = 0\} = \{0\}$$
d'après le théorème des moments : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n f(t)\, dt = 0$, alors $f = 0$ qui se montre à partir du théorème de Stone-Weierstrass algébrique. On obtient ainsi $F^{\perp} = 0$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = E \neq F$. Ceci montre qu'en dimension infinie on a en général une inclusion stricte dans 4.

DÉFINITION 31
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$. On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux et on note $F \perp G$ lorsque

$$\forall x \in F,\ \forall y \in G, \quad x \perp y.$$

REMARQUE 32 — *Si $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, \cdots, e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(f_1, \cdots, f_l)$ deux sous-espaces de E, alors $F \perp G$ si et seulement si pour tout i et j, $e_i \perp f_j$.*

PROPOSITION 33
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E, alors $F \subset G^\perp$ et $G \subset F^\perp$, $F \cap G = \{0\}$.

Preuve — La première assertion résulte de la définition des sous-espaces orthogonaux et la seconde s'en déduit puisque $F \cap F^\perp = \{0\}$. □

PROPOSITION 34
Soit E muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$ et F_1, ..., F_l des sous-espaces vectoriels tels que les sous-espaces F_i sont deux à deux orthogonaux et supplémentaires (on dit qu'ils sont supplémentaires orthogonaux), alors

$$\forall i \in [\![1, l]\!],\ F_i^\perp = F_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{F_i} \oplus \cdots \oplus F_l.$$

c'est-à-dire l'orthogonal de l'un des F_i est la somme directe de tous les autres.

Preuve — On montre la proposition pour $l = 2$: on sait que $F_2 \subset F_1^\perp$ et $\forall x \in F_1^\perp$, $\exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$, $x = x_1 + x_2$ et $(x|x_1) = 0$ implique $x_1 = 0$ et $x_2 \in F_2$, d'où l'inclusion inverse et donc l'égalité.
La propriété pour $l \geq 3$ s'en déduit immédiatement en regroupant les sommes en deux termes. □

1.4.3 Familles orthogonales, orthonormales

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

DÉFINITION 35

1. *La famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si $\forall i \neq j$, $x_i \perp x_j$.*
2. *La famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale si*

$$\forall i, j \in I^2\ \ (x_i|x_j) = \delta_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{array} \right. .$$

REMARQUE 36 — *Si u est un vecteur non nul, on norme u en posant $\dfrac{1}{\|u\|}u$. Si on a une famille orthogonale de vecteurs non nuls, il suffit de normer les vecteurs de la famille pour obtenir une famille orthonormale.*

EXEMPLE 37 —

1. *Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle X|Y\rangle = {}^tXY$, la base canonique est une base orthonormée.*
2. *Dans $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$, nous avons montré dans l'exemple 23 que la famille*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \cdots, \cos nx, \cdots, \sin x, \cdots, \sin mx, \cdots\right)$$

était une famille orthonormée.

PROPOSITION 38
Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Preuve — Soient $(x_1,...,x_p)$ et $\lambda_1,...,\lambda_p$, p scalaires tels que $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i=0$, alors pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, on a $\left(\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i x_i|x_k\right)=0$, soit $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\,(x_i|x_k)=0$, et si la famille est orthogonale, il vient $\lambda_k\,\|x_k\|^2=0$, mais comme $x_k\neq 0$, on obtient $\lambda_k=0$. Ceci étant vrai pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, on en déduit que $(x_1,...,x_p)$ est libre. □

COROLLAIRE 39
(Caractérisation d'une base orthonormée) Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n. Alors $(e_1,\cdots,e_n)$ est une base orthonormée si et seulement si $(e_i|e_j)=\delta_{i,j}$ pour $1\leq i,j\leq n$.

PROPOSITION 40
Si $(x_1,...,x_p)$ une famille de p vecteurs orthogonaux, alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}x_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{p}\|x_i\|^2.$$

Preuve — $\left(\sum\limits_{i=1}^{p}x_i\,|\sum\limits_{j=1}^{p}x_j\right)=\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p}(x_i|x_j)=\sum\limits_{i=1}^{p}(x_i|x_i)$, d'où $\left\|\sum\limits_{i=1}^{p}x_i\right\|^2=\sum\limits_{i=1}^{p}\|x_i\|^2$. □

1.4.4 Orthogonalité en dimension finie

THÉORÈME 41
Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie) et $F\subset E$, alors

$$F\oplus F^{\perp}=E.$$

On dit que $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de F, et on peut écrire $F\overset{\perp}{\oplus}F^{\perp}=E$.

Preuve — Si $F=\{0\}$, on a $F^{\perp}=E$ et donc la propriété est vérifiée. On suppose maintenant que $F\neq\{0\}$ et soit $(f_1,...,f_p)$ est une base de F.
On définit l'application linéaire

$$f:\begin{array}{ccc}E&\rightarrow&\mathbb{R}^p\\ x&\mapsto&((x|f_1),...,(x|f_p))\end{array}.$$

Par définition,

$$\operatorname{Ker}f=(\{f_1,...,f_p\})^{\perp}=(\operatorname{Vect}(f_1,...,f_p))^{\perp}=F^{\perp}.$$

D'après le théorème du rang, on en déduit

$$\dim F^{\perp}=\dim E-\operatorname{rg}(f)\geq\dim E-p.$$

Mais nous savons aussi que les sous-espaces vectoriels F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux, donc ils sont en somme directe. D'où

$$\dim F^{\perp}\leq\dim E-\dim F=\dim E-p.$$

Les deux inégalités montrent que $\dim F+\dim F^{\perp}=\dim E$ et les deux espaces sont bien supplémentaires. □

COROLLAIRE 42
Dans un espace vectoriel euclidien :

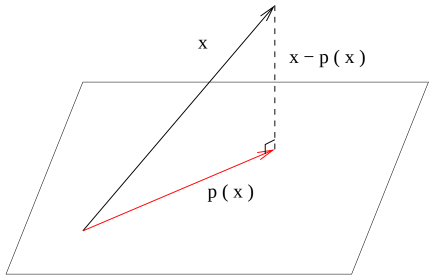
1. $\dim F^{\perp}=\dim E-\dim F$
2. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}=F$ *(car $F\subset\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et $\dim\left(F^{\perp}\right)^{\perp}=\dim E-\dim F^{\perp}=\dim F$)*

REMARQUE 43 — *Ces résultats sont faux en dimension infinie !.*

1.5 PROJECTION ORTHOGONALE

1.5.1 Définitions

DÉFINITION 44
Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace vectoriel préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E tel que $E=F\oplus F^{\perp}$. La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle projection orthogonale sur F et on la note p_F.



REMARQUE 45 —

1. *Une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel n'est pas toujours définie en dimension infinie : F et $F^{\perp}$ ne sont pas nécessairement supplémentaires.*
2. *Par définition, $y = p_F(x)$ est l'unique vecteur de E vérifiant* $\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$
3. *On a alors pour tout $x \in E$, $p_{F^{\perp}}(x) = x - p_F(x)$.*

EXEMPLE 46 — *On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M|N) = \mathrm{tr}\left({}^tMN\right)$; donner une expression de la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques pour ce produit scalaire.*

Preuve — L'application

$$(M,N) \mapsto \mathrm{tr}\left({}^tMN\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{l,k}b_{l,k}\right) = \sum_{1\leq k,l\leq n} a_{l,k}b_{l,k}$$

est le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2} \text{ avec } \begin{cases} \frac{1}{2}\left({}^tM + M\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M - \frac{1}{2}\left({}^tM + M\right) = \frac{1}{2}\left(M -^t M\right) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \end{cases}.$$

L'application $\varphi : M \mapsto \frac{1}{2}\left({}^tM + M\right)$ est linéaire idempotente, donc c'est une projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ paralèllement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Montrons que ces deux sous-espaces sont orthogonaux : si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(A|B) = \mathrm{tr}\left({}^tAB\right) = \begin{cases} -\mathrm{tr}(AB) \\ \mathrm{tr}\left({}^t({}^tAB)\right) = \mathrm{tr}(BA) \end{cases}$$

et comme $\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB)$, on obtient $(A|B) = 0$ ce qui montre que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus^{\perp} (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ et φ est la projection attendue. □

1.5.2 Opérateur de projection

DÉFINITION 47
On appelle opérateur de projection sur une droite vectoriel l'application :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{Proj} : & E \times E & \to & E \\ & (u,v) & \to & \mathrm{Proj}_u(v) = \dfrac{(u|v)}{(u|u)}u, \quad \text{si } u \neq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.} \end{array}$$

PROPOSITION 48
Pour $u \neq 0$ fixé, alors Proj_u est la projection orthogonale sur $\mathbb{K}.u$.

Preuve — On doit montrer que la projection orthogonale existe.
On sait que $\mathbb{K}.u$ et $u^{\perp}$ sont en somme directe, Il faut encore montrer que tout $v \in E$ s'ecrit $\lambda u + v_1$ avec $v_1 \in u^{\perp}$, mais l'énoncé nous suggère $v_1 = v - \mathrm{Proj}_u(v)$, ce qui revient à vérifier que :

$$(v - \mathrm{Proj}_u(v)) \perp u = 0 \iff (u|v) - \frac{(u|v)}{(u|u)}(u|u) = 0$$

et l'égalité de droite est vraie. □

PROPOSITION 49
Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace vectoriel préhilbertien, $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$ un sous-espace vectoriel de E tel que

$(e_1, ..., e_p)$ est une famille orthogonale. Alors p_F la projection orthogonale sur F est bien définie et

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Proj}_{e_i}(x).$$

En particulier, si $(e_1, ..., e_p)$ est orthonormée

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)\, e_i$$

Preuve — On procède comme dans le cas de la projection orthogonale sur une droite.
On pose $x_F = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Proj}_{e_i}(x) \in F$ et pour tout e_k,

$$(e_k|x - x_F) = (e_k|x - \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Proj}_{e_i}(x)) = (e_k|x) - (e_k|\frac{(e_k|x)}{(e_k|e_k)} e_k) = 0$$

donc $x - x_F \in F^\perp$. On en déduit que $E = F \oplus F^\perp$, la projection p_F est bien définie et les égalités découlent immédiatement de ce qui précède. □

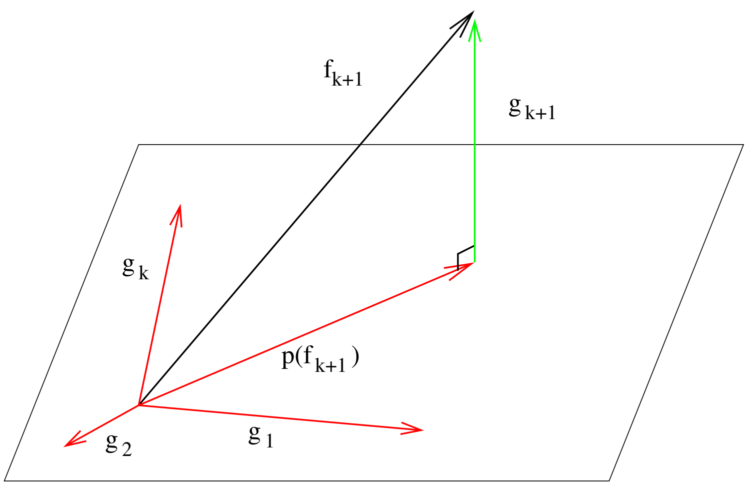
1.5.3 Procédé de Gram-Schmidt

Le procédé de Gram-Schmidt montre en particulier l'existence d'une base orthonormée pour tout espace vectoriel euclidien.

PROPOSITION 50
Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace vectoriel euclidien, et $(f_1, ..., f_n)$ une base quelconque de E. Il existe une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_i) = \mathrm{Vect}\,(f_1, ..., f_i)$$

De plus, si on impose de plus que $(f_i|e_i) > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors la base $(e_1, \cdots, e_n)$ est unique.



Preuve — Le procédé de Gram-Schmidt utilise un famille orthogonale $(g_1, \cdots, g_n)$ intermédiaire : on notera $F_i = \mathrm{vect}\,(f_1, \cdots, f_i)$.

1/ $g_1 = f_1$ et $e_1 = \dfrac{g_1}{\|g_1\|}$;

2/ $g_2 = f_2 - p_{F_1}(f_2) = f_2 - \mathrm{Proj}_{g_1}(f_2) = f_2 - \dfrac{(g_1|f_2)}{(g_1|g_1)} g_1$ et $e_2 = \dfrac{g_2}{\|g_2\|}$;

3/ $g_3 = f_3 - p_{F_2}(f_3) = f_3 - \dfrac{(g_1|f_3)}{(g_1|g_1)} g_1 - \dfrac{(g_2|f_3)}{(g_2|g_2)} g_2$ et $e_3 = \dfrac{g_3}{\|g_3\|}$

$\vdots$

n/ $g_n = f_n - p_{F_{n-1}}(f_n) = f_n - \dfrac{(g_1|f_n)}{(g_1|g_1)} g_1 - \cdots - \dfrac{(g_{n-1}|f_n)}{(g_{n-1}|g_{n-1})} g_{n-1}$ et $e_n = \dfrac{g_n}{\|g_n\|}$.

Par construction, $(g_1, \cdots, g_n)$ est une base orthogonale de E et à chaque étape $g_i \in F_i$. Enfin, pour une base $(e_1, \cdots, e_n)$ obtenue, on doit avoir $e_i \in F_i \cap F_{i-1}^{\perp}$ et unitaire, donc dans $\mathbb{R}$, on a deux choix (à ± 1 près), mais si on suppose $(e_i, f_i) > 0$, alors e_i est uniquement déterminé. □

EXEMPLE 51 — *Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire défini par*

$$(x|y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

C'est un produit scalaire car la matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est clairement symétrique, donc $(\ |\ )$ est bien une forme bilinéaire symétrique, et en écrivant $(x|x) = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2$ on voit qu'elle est définie positive.
Ensuite, $\mathbb{R}^2$ admet pour base (f_1, f_2) avec $f_1 = (1,0)$ et $f_2 = (0,1)$. Nous allons utiliser le procédé de Gram-Schmidt :

1. $g_1 = f_1$ *et* $e_1 = \dfrac{g_1}{\|g_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+1)}} f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f_1$
2. $g_2 = f_2 - \mathrm{Proj}_{g_1}(f_2) = f_2 - \dfrac{(f_2|g_1)}{2} g_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et*

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + (-\frac{1}{2})^2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et ainsi $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$ *est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour $(\ |\ )$.*

REMARQUE 52 —

1. *On note P la matrice de passage de $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$ à $\mathcal{C}' = (e_1, \cdots, e_n)$. À chaque étape*

$$f_k = g_k + \frac{(g_{k-1}|f_k)}{(g_{k-1}|g_{k-1})} g_{k-1} + \cdots + \frac{(g_1|f_k)}{(g_1|g_1)} g_1 = (e_1|f_k)e_1 + \cdots + (e_k|f_k)e_k.$$

   Donc P^{-1} est triangulaire supérieure d'éléments diagonaux $(f_k|e_k)$.
2. *En pratique, on peut choisir les vecteurs g_i à un scalaire près, la famille des g_i restera orthogonale, on peut donc choisir pour αg_i, ce qui peut grandement simplifier les calculs.*
3. *Remarquons que l'on vient de montrer que si $(g_1, \cdots, g_n)$ est une base orthogonale de E, alors $\forall x \in E$, on a*

$$x = \mathrm{Proj}_{g_1}(x) + \cdots + \mathrm{Proj}_{g_n}(x).$$

4. *Le procédé de Gram-Schmidt se généralise à une famille $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui permet de construire une famille orthonormée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.*

1.5.4 Projection orthognale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

REMARQUE 53 — *Soit E un espace vectoriel préhilbertien. Si $F \subset E$ est de dimension finie de base orthognale $(f_1, \cdots, f_p)$, on a vu que la projection orthogonale existait*

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Proj}_{e_i}(x).$$

Le procédé de Gram-Schmidt montre que si F est de dimension finie, alors la projection orthogonale sur F existe et en particulier $E = F \oplus F^{\perp}$.
De plus, $\forall x = x_F + x_{F^\perp} \in E$, $p_F(x) = x_F$ et $\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_{F^\perp}\|^2$, ce qui montre que

$$\forall x \in E,\ \|p_F(x)\| \leq \|x\|.$$

En particulier une projection orthogonale est toujours continue ! On a une sorte de réciproque

Proposition 54
Soit p un projecteur de E, alors p est un projecteur orthogonal ssi

$$\forall x \in E,\ \|p_F(x)\| \leq \|x\|.$$

Preuve — Si p est la projection sur F paralèllement à G et que $\forall x \in E,\ \|p_F(x)\| \leq \|x\|$.
On veut montrer que $x_F \perp x_G$, pour cela écrivons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|p(x_F + \lambda x_G)\|^2 = \|x_F\|^2 \leq \|x_F + \lambda x_G\|^2$$

ce qui est équivalent à

$$\lambda \left(\lambda \|x_G\|^2 + 2(x_F|x_G)\right) \geq 0$$

Un polynôme scindé de degré au plus 2 non constant n'est de signe constant que s'il admet une racine double et donc $(x_F|x_G) = 0$. La projection est orthogonale.
La réciproque a déjà été traitée. □

Proposition 55
(Inégalité de Bessel) Soit $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_i, i \in I)$ une famille orthonormale, alors pour tout $f \in E$, on a

$$\sum_{i \in I} \langle f|e_i\rangle^2 \leq \|f\|^2$$

en particulier la famille est sommable.

Preuve — La somme est entendue au sens des familles sommables : soit donc α_1, ..., α_r une sous-famille finie. Alors

$$\sum_{i=1}^{r} \langle f|e_{\alpha_i}\rangle^2 = \|p(f)\|^2$$

où p est la projection orthognale sur vect $(e_{\alpha_1}, \cdots, e_{\alpha_r})$ et donc $\|p(f)\|^2 \leq \|f\|^2$. Ce qui montre que la somme est majorée et la borne supérieure existe. □

Remarque 56 — *Ceci montre que si $(e_i, i \in I)$ une famille orthonormale, alors pour tout $f \in E$, il y a au plus un nombre dénombrable de produit scalaire $\langle f|e_i\rangle$ qui est non nul.*

1.5.5 Base orthonormée en dimension finie

Dans ce paragraphe, $(E, (\ |\ ))$ est un espace vectoriel euclidien.

§ *1. Existence*

Proposition 57
(Existence de bases orthonormées)

1. *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E se complète en une base orthogonale de E.*
2. *Toute famille orthonormée de E se complète en une base orthonormée de E.*
3. *En particulier, il existe des bases orthonormées.*

Proposition 58
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$. une base orthonormée de E. Alors

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i.$$

Preuve — En effet, si $\|u\| = 1$, on a $\mathrm{Proj}_u(x) = (x|u)u$. □

§ *2. Expression du produit scalaire en base orthonormée et matrices de passage* Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace vectoriel euclidien de base orthonormée $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$.

PROPOSITION 59
Soient $x,y\in E$ et X,Y les coordonnées de x,y dans $\mathcal{B}$. Alors

1. $(x|y)={}^tXY$
2. $\|x\|=\sqrt{{}^tXX}$

Preuve — Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, on a

$$(x|y)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i|\sum_{k=1}^{n}y_ke_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_iy_k\,(e_i|e_k)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i={}^t\,XY,$$

car $(e_i|e_k)=\delta_{i,k}$. On a alors immédiatement $\|x\|=\sqrt{{}^tXX}$.
La matrice associée au produit scalaire dans une base orthonormée est l'identité. □

REMARQUE 60 — *Ainsi, on se ramène à l'espace vectoriel euclidien canonique $(\mathbb{K}^n,(\ |\ ))$ à isomorphisme près.*

PROPOSITION 61
Soit P la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ à une base $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ d'un espace vectoriel euclidien $(E,(\ |\ ))$, alors

$$(\mathcal{B}'\text{ est orthonormée})\iff P^{-1}={}^tP.$$

Preuve — Si $(a_{i,j})={}^tPP$, on vérifie facilement que $a_{i,j}={}^tC_iC_j$, les vecteurs colonnes de P, c'est-à-dire $a_{i,j}=(e'_i|e'_j)=\delta_{i,j}$ ssi $\mathcal{B}'$ est orthonormée. □

1.6 DISTANCE À UN SOUS-ESPACE

DÉFINITION 62
Si X est une partie non vide quelconque de $(E,(\ |\ ))$ et $u\in E$, alors on appelle distance de u à X le réel positif $d(u,X)=\inf_{v\in X}\|u-v\|$.

PROPOSITION 63
Si F est un sous-espace vectoriel de $(E,(\ |\ ))$ tel que $F\oplus F^{\perp}=E$ et $u\in E$, le réel $d(u,F)$ est atteint en un unique vecteur $v=p_F(u)$: $\exists! v\in F,\ d(u,F)=\|u-v\|$.

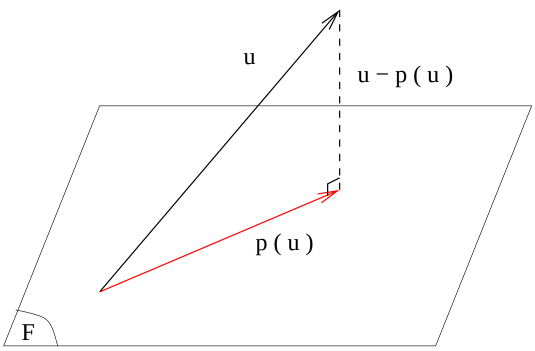


FIGURE 1.1 – Le minimum est atteint pour $p_F(u)$

Preuve — On sait que $u - p_F(u)$ est orthogonal à F et $p_F(u) \in F$. Donc pour tout $v \in F$ on peut appliquer la relation de Pythagore

$$\|u - v\|^2 = \|u - p_F(u) + p_F(u) - v\|^2 = \|u - p_F(u)\|^2 + \|p_F(u) - v\|^2$$

dont on déduit immédiatement que $\|u - p_F(u)\| \leq \|u - v\|$, donc $d(u, F)$ est atteint en $p_F(u)$, mais l'égalité ci-dessus montre aussi que si $v \neq u$, alors $\|u - v\| > \|u - p_F(u)\|$ d'où l'unicité. □

Remarque 64 — *En dimension infinie, on a besoin de la condition $F \oplus F^\perp = E$ pour avoir l'existence de la projection et donc de v. Par exemple, dans $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$, on a $d(e^x, \mathbb{R}[X]) = 0$ pour la norme de la convergence uniforme, mais la fonction exponentielle n'est pas polynomiale.*

Calcul pratique de distance à un sous-espace : Soit F un sous-espace vectoriel de $(E, (\ |\ ))$, soit $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_p)$ une base de F, $\mathcal{C} = (g_1, ..., g_q)$ une base de $F^\perp$ et $x \in E$.
On a deux approches :

1. On sait que
$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|,$$
et $p_F(x)$ peut se calculer de deux manières :
   (a) Si $(f_1, ..., f_p)$ est orthogonale, alors
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x|f_i)}{(f_i|f_i)} f_i.$$
   (b) Sinon $p_F(x) = a_1 f_1 + \cdots + a_p f_p$ et les coefficients a_i se trouvent en résolvant le système à p équations
$$\begin{cases} \big((x - p_F(x))|f_1\big) = 0 \\ \vdots \\ \big((x - p_F(x))|f_p\big) = 0 \end{cases}$$
2. Mais on peut aussi écrire
$$d(x, F) = \|p_{F^\perp}(x)\|,$$
et pour calculer $p_{F^\perp}$, on utilise l'une des deux méthodes du cas précédent.

Le bon sens voudrait que l'on choisisse entre F ou de $F^\perp$ suivant que l'on en connaisse une base orthonormé puis l'espace de plus petite dimension.

Exemple 65 — *Déterminer $\min_{\mathbb{R}^2} f(x, y)$ où $f : (x, y) \mapsto (2x + y - 1)^2 + (x - 3y)^2 + (y - 1)^2$.*

Preuve — Si on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique,

$$\min_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = \min_{\mathbb{R}^2} \left\| x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = d^2(u, F),$$

avec $F = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ensuite, $n = b \wedge a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ est une base de $F^\perp$, donc

$$p_{F^\perp}(u) = \frac{(u|n)}{(n|n)} n = \frac{1}{9} n \qquad \text{et} \qquad d(u, F)^2 = \|p_{F^\perp}\|^2 = \frac{1}{81}\|n\|^2 = \frac{2}{3}$$

et on en déduit que le minimum cherché est $m = \frac{2}{3}$.
On peut aussi chercher (x, y) tel que ce minimum soit atteint c'est-à-dire tel que

$$p_F(u) = u - p_{F^\perp}(u) = u - \frac{1}{9} n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on trouve facilement $(x, y) = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$. Ici, nous étions dans le cas où nous avions une base orthogonal de $F^\perp$ très simple. □

Exemple 66 — *Déterminer*

$$I = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (x^4 - ax^2 - bx - c)^2\, dx.$$

Preuve — Si $E = \mathcal{C}^0([-1;1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx,$$

alors $I = d(x^4, F)^2$, où $F = \mathrm{Vect}\,(1, x, x^2)$.
Nous pouvons facilement trouver une base orthogonale de F : $(1, x, x^2 - \frac{1}{3})$, en notant que $(1|1) = 2$, $(x|x) = \frac{2}{3}$, $(x^2 - \frac{1}{3}|x^2 - \frac{1}{3}) = \dfrac{8}{45}$. alors

$$\begin{aligned} I &= \|x^4 - p_F(x^4)\|^2 = \|x^4 - \mathrm{Proj}_1(x^4) - \mathrm{Proj}_x(x^4) - \mathrm{Proj}_{x^2-1/3}(x^4)\|^2 \\ &= \|x^4 - \frac{1}{5} - \frac{45}{8} \times (\frac{2}{7} - \frac{2}{15})(x^2 - \frac{1}{3})\|^2 \\ &= \|x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\|^2 \end{aligned}$$

Donc, le minimum est atteint pour $a = \dfrac{6}{7}$, $b = 0$ et $c = -\dfrac{3}{35}$.
Pour calculer la valeur de ce minimum, il reste une petite astuce :

$$\begin{aligned} (x^4 - P_F(x^4)|x^4 - p_F(x^4)) &= (x^4|x^4 - p_F(x^4)) - (p_F(x^4)|x^4 - p_F(x^4)) = (x^4|x^4 - p_F(x^4)) \\ &= \frac{2}{9} - \frac{12}{49} + \frac{6}{5^2 \times 7} = \frac{128}{11025} \end{aligned}$$

□

1.7 Espaces préhilbertiens séparables

1.7.1 Définitions

Définition 67
On dit que qu'une famille ou suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E espace préhilbertien est totale si le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille est dense dans E :

$$\forall f \in E,\ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Vect}\,(e_i,\ i\in\mathbb{N})^{\mathbb{N}},\ f = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Remarque 68 — *Tout espace vectoriel n'admet pas nécessairement une famille totale, mais ce sera le cas de tous les espaces vectoriels que nous rencontrerons dans la pratique. On dit que E est séparable.*

Exemple 69 — *L'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire*

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b fg$$

admet pour famille totale $(X^i, i\in\mathbb{N})$ d'après le théorème d'approximation de Weierstrass algébrique.

Remarque 70 — *La famille $(1, X, \cdots, X^n, ...)$ est en fait une base de $\mathbb{R}[X]$ qui est orthonormale pour le produit scalaire*

$$\langle P|Q\rangle = \langle \sum_{i\geq 0} a_i X^i | \sum_{j\geq 0} b_j X^j\rangle = \sum_{i\geq 0} a_i b_i$$

les familles (a_i) et (b_i) étant presque nulle, les sommes sont bien définies.
La formule définissant ce produit scalaire n'a plus de sens sur l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$...
Cependant quelque soit le produit scalaire choisit sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, le procédé de Gram-Schmidt permet de construire une famille orthonormale et par définition si la famille d'origine est totale, alors la famille orthonormale obtenue est totale aussi (elles engendrent le même sous-espace vectoriel !)

1.7.2 Propriétés des familles orthonormales totales

PROPOSITION 71
Soit $(e_i, i \in \mathbb{N})$ une famille orthonormale de l'espace préhilbertien $(E, \langle \| \rangle)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes

1. *La famille $(e_i, i \in \mathbb{N})$ est une famille totale orthonormale.*
2. *Pour tout $f \in E$,*
$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f|e_n\rangle e_n.$$
3. *(relation de Parseval) Pour tous $f,\ g \in \mathbb{R}$*
$$\langle f|g\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f|e_n\rangle \langle g|e_n\rangle.$$
4. *(égalité de Bessel) pour tout $f \in E$*
$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f|e_n\rangle^2$$

Preuve —
(1) ⇒ (2) : Soit $f \in E$, la famille étant totale, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des entiers $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que
$$\left\| f - \sum_{i=1}^{m} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \right\| \leq \varepsilon$$
Mais nous savons que le projeté orthogonal de f sur $\mathrm{Vect}\,(e_{\alpha_1}, \cdots, e_{\alpha_m})$ est donnée par
$$p(f) = \sum_{i=1}^{m} \langle f|e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}$$
dont on déduit que
$$\left\| f - \sum_{i=1}^{m} \langle f|e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i} \right\| \leq \left\| f - \sum_{i=1}^{m} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \right\| \leq \varepsilon.$$
De plus pour tout $n \geq N = \max(\alpha_i,\ i \in [\![1, m]\!])$,
$$d\big(f, \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)\big) \leq d\big(f, \mathrm{Vect}(e_{\alpha_1}, \cdots, e_{\alpha_m})\big)$$
et donc
$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \langle f|e_i\rangle e_i \right\| \leq \varepsilon,$$
ce qui est le résultat attendu.
(2) ⇒ (3) : on vient de montrer qu'alors pour tout $f,\ g \in E$
$$\begin{aligned}
\langle f|g\rangle &= \langle \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f|e_n\rangle e_n \right) | \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \langle g|e_k\rangle e_k \right) \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f|e_n\rangle \ \langle e_n| \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \langle g|e_k\rangle e_k \right) \rangle \quad \text{continuité du produit scalaire} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f|e_n\rangle \ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \langle g|e_k\rangle \langle (e_n|e_k\rangle \right) \quad \text{continuité du produit scalaire} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f|e_n\rangle \langle g|e_n\rangle \text{ la famille est orthonormale}
\end{aligned}$$
(3) ⇒ (4) : L'égalité de Bessel est un cas particulier de la relation de Parseval.
(4) ⇒ (1) : Pour tout n, le théorème de pythagore nous dit que
$$\left\| f - \sum_{i=0}^{n} \langle f|e_i\rangle e_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=0}^{n} \langle f|e_i\rangle e_i \right\|^2 = \|f\|^2$$
donc
$$\left\| f - \sum_{i=0}^{n} \langle f|e_i\rangle e_i \right\|^2 = \|f\|^2 - \left\| \sum_{i=0}^{n} \langle f|e_i\rangle e_i \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} \langle f|e_i\rangle^2$$
Le terme de droite tend par hypothèse vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui termine la preuve. □

REMARQUE 72 — *Soit E le sous-epace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions 2π-périodiques muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,dt$.*
Nous avons vu que la famille

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \cdots, \cos nx, \cdots, \sin x, \cdots, \sin mx, \cdots)$$

était une famille orthonormale. Le second théorème d'approximation de Weierstrass qui est hors programme nous dit qu'elle est totale. La théorie des séries de Fourier consiste à écrire les fonctions 2π-périodiques comme la série $\sum x_i e_i$ dans cette base.

1.8 Formes linéaires

1.8.1 Lien entre produit scalaire et forme linéaire

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien.

PROPOSITION 73
Pour tout vecteur non nul $a \in E$, $a^\perp$ est un hyperplan.

Preuve — Soit $a \in E \setminus \{0\}$ et $\varphi_a : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto (a|x)$. Alors φ_a est une forme linéaire par linéarité à droite du produit scalaire et est non nulle car $\varphi_a(a) = \|a\|^2 \neq 0$. Son noyau est donc un hyperplan de E ; or $\operatorname{Ker} \varphi_a = a^\perp$, c'est-à-dire $a^\perp$ est un hyperplan de E. □

DÉFINITION 74
Soit H un hyperplan de E. On appelle vecteur normal à l'hyperplan H, tout vecteur non nul orthogonal à H.

PROPOSITION 75
Si f est une forme linéaire sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = (a|x)$.

Preuve — Si $f = 0$, $a = 0$ est le seul vecteur qui convient(trivial).
On suppose maintenant $f \neq 0$ et on pose $H = \operatorname{Ker} f$. Alors H est un hyperplan de E, donc H possède un vecteur normal unitaire n. On a ainsi $H^\perp = \mathbb{K}n$ et $f(n) \neq 0$.
Supposons que a existe, alors $a \in H^\perp$, car $\forall x \in H$, $(a|x) = f(x) = 0$, donc $a = \lambda n$ et la condition

$$f(x) = (a|x) \iff f(x) = \lambda(n|x).$$

Si $x = n$, alors $f(n) = \lambda(n|n) = \lambda$.
Il reste à vérifier que si $a = f(n)n$, alors pour tout $x \in E$, $x = x' + \alpha n$, avec $x' \in \ker f$, on a $f(x) = (a|x)$. Or,

$$f(x) = f(x') + \alpha f(n) = \alpha f(n)$$

et

$$(a|x) = (f(n)n|x') + \alpha(f(n)n|n) = \alpha f(n)$$

car x' et n sont orthogonaux et n est un vecteur normé.
Ceci montre l'existence de a. L'unicité provient du fait que si $(a' - a|x) = 0$ pour tout x, alors $a - a' = 0$. □

1.8.2 Produit vectoriel

PROPOSITION 76
et définition Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n rapporté à la base $\mathcal{B}$ et soit det *l'application déterminant défini dans cette base. Soit $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ des vecteurs de E. On appelle produit vectoriel de $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ l'unique vecteur noté $a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}$ tel que*

$$\forall x \in E,\ \det(a_1, \cdots, a_{n-1}, x) = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}|x).$$

Preuve — L'application $x \mapsto \det(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}, x)$ est une forme linéaire, d'où l'existence et l'unicité du produit vectoriel. □

PROPOSITION 77
Avec les notations précédentes, $a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}$ est orthogonal aux vecteurs a_i et s'il est non nul, $\det(a_1, \cdots, , a_{n-1}, a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}) > 0$.

Preuve — On a
$$0 = \det(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_i) = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1} | a_i)$$
et
$$\det(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}) = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1} | a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}) \geq 0$$

□

PROPOSITION 78
Si $n = 3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, la base canonique, u de coordonnées (u_1, u_2, u_3) et v de coordonnées (v_1, v_2, v_3), alors
$$u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Preuve — On écrit
$$\det(u, v, x) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3$$
et si $u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$, on a bien
$$\det(u, v, x) = (u \wedge v | x),$$
d'où le résultat. □

REMARQUE 79 — *Dans $\mathbb{R}^3$, on n'utilise que la première étape de GramSchmidt : si (f_1, f_2, f_3) est une base, on a $g_1 = f_1$, $g_2 = f_2 - p_{F_1}(f_2)$ et $g_3 = g_1 \wedge g_2$.*

1.9 Décomposition QR

PROPOSITION 80
Soit $A \in Gl_n(\mathbb{R})$. Alors il existe des matrices P, $Q \in Gl_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tQ = Q^{-1}$ et R triangulaire supérieure vérifiant
$$A = QR.$$

Preuve — On suppose $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Les vecteurs colonnes de A peuvent être interprétés comme les vecteurs colonnes coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$.
On applique le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée $\mathcal{D} = (g_1, \cdots, g_n)$ et on a
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{D}} P_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$$
Or $P_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$ est la matrice de changement de base d'une base orthonormée à une base orthonormée, donc ${}^tP_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$.
De plus, il résulte, il résulte de l'algorithme de Gram-Scmidt qe $P_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ est triangulaire supérieure.
On en déduit le résultat, mais aussi un algorithme pour écrire la décomposition QR. □

REMARQUE 81 — *La décomposition QR est par exemple très intéressante pour résoudre les systèmes linéaires :*
$$QRX = Y \iff RX = {}^tQY$$

PROPOSITION 82
Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et I_n la matrice carrée identité. On appelle matrice de Householder associée à U la matrice
$$H = I_n - 2\frac{1}{\|U\|^2} U {}^tU.$$
Alors H est la symétrie orthogonal par rapport à l'hyperplan $U^\perp$.

Preuve — On vérifie que $HU = -U$ et si $V \in U^\perp$, alors $H(V) = V$. □

Remarque 83 — *Soit* $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *non colinéaires,* Y *vecteur unitaire.*
Montrons qu'il existe une unique réflexion s *(symétrie orthogonal par rapport à un hyperplan) qui transforme* X *en* $\|X\|\,Y$.
L'unicité est facile, pour l'existence, on vérifie que c'est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice de Householder H *avec* $U = X - \|X\|Y$. *Avec les notations ci-dessus*

$$HX = \|X\|Y$$

En effet, si $X = X_U + X_{U^\perp}$ *avec* $(X_U, X_{U^\perp}) \in (\mathbb{R}.U, U^\perp)$*, alors* $HX = -X_U + X_{U^\perp}$ *et on veut donc vérifier que*

$$\begin{cases} 2X_U = X - HX = U \\ 2X_{U^\perp} = X + HX = X + \|X\|Y \end{cases}.$$

Comme la décomposition $X = X_U + X_{U^\perp}$ *est unique, il faut juste vérifier que* $X + \|X\|Y \in U^\perp$ *c'est-à-dire*

$$(X + \|X\|Y | X - \|X\|Y) = \|X\|^2 - \|X\|^2 = 0.$$

Application Méthode de Householder. Soit A une matrice inversible.
Si X le premier vecteur colonne de A n'est pas colinéaire à e_1 on note H_1 la matrice de Householder associée à X et

$$H_1 A = \begin{pmatrix} \|X\| & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

et on recommence avec la matrice A_1.
On peut améliorer le calcul en choisissant $\pm\|X\|$ du signe de la première coordonnée de X.

Exemple 84 — *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ *; donner la décomposition QR.*