北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Français des sciences

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

1er mars 2020

Table des matières

Chapitre 1 Logique

1.1 Assertions, connecteurs

Définition 1
Une proposition ou une assertion est une phrase qui est soit vraie (V), soit fausse (F) mais pas les deux en même temps (principe de non contradiction).

Exemple 2 —

1. *"Je travaille" est une assertion, elle peut être vraie ou fausse.*
2. *"un nombre" n'est pas une assertion, la phrase n'est nin vraie, ni fausse. "Un nombre" est un objet mathématiques, comme une droite.*
3. *"x est un nombre" n'est pas une assertion car on ne sait pas si la phrase est vraie ou fausse. Cela dépend de ce que "x" signifie.*

Remarque 3 — *Que dire de la phrase suivante est vraie ou fausse : Un barbier rase exactement tous les gens du village qui ne se rasent pas eux-mêmes. On se demandera si le barbier se rase lui-même ou non. C'est le mathématicien Russell qui a posé la question !*

En mathématiques, on veut montrer de nouvelles propositions, on les appelle aussi les théorèmes. Pour écrire de nouvelles propositions, on utilise les mots "et", "ou" et la négation. On appelle ces mots des connecteurs.

Définition 4
Soit P et Q deux assertions. On définit simples suivant :

1. *La négation de P, notée non P ou $\neg P$: si P est vraie, alors $\neg P$ est fausse ; si P est fausse, alors $\neg P$ est vraie ;*
2. *La conjonction de P et Q, notée $P \wedge Q$ qui se lit P et Q : $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.*
3. *La disjonction de P et Q, notée $P \vee Q$ qui se lit P ou Q : $P \vee Q$ est vraie si et seulement si P ou Q est vraie.*

Exemple 5 —

1. *Vérifier que non$(\text{non}\, P)$ est vraie si et seulement si P est vraie. On dit alors que P et non$(\text{non}\, P)$ sont équivalentes et on note non$(\text{non}\, P) \equiv P$.*
2. *Trouver des équivalents simples pour les propositions suivantes*
   (a) $\neg(P \vee Q)$; *$P \vee Q$ est fausse si et seulement si P est fausse et Q est fausse, donc si et seulement si $\neg P \wedge \neq Q$. On dit que $\neg(P \vee Q)$ est équivalente à $\neg P \wedge \neg Q$. On écrit $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$*
   (b) $\neg(P \wedge Q)$;
   (c) $(P \vee Q) \wedge R$;
   (d) $(P \wedge Q) \vee R$.

1.2 Implications, équivalences

1.2.1 Définitions

Définition 6
Étant donné deux propositions (assertions) P et Q, on définit les assertions suivantes :

1. *$P \Rightarrow Q$, qui se lit P implique Q ou Si P, alors Q : $P \Rightarrow Q$ est vraie si et seulement si P est fausse ou Q est vraie, c'est-à-dire*
$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q.$$
2. *$P \iff Q$, qui se lit P est équivalent à Q ou P si et seulement si Q : $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont en même temps soit vraies, soit fausses :*
$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

Exemple 7 —

1. *Soit les propositions P :"Il fait beau demain" et Q : " J'irai me promener". La proposition "S'il fait beau demain, j'irai me promener" qui correspond à $P \Rightarrow Q$ est vraie :*
   - *s'il ne fait pas beau (alors j'irai peut-être quand même me promener) ;*
   - *si je vais me promener (qu'il fasse beau ou non !).*
2. *Soit les propositions P :"Je parle vite" et Q : " vous ne me comprenez pas". La proposition "Si je parle vite, vous ne me comprenez pas" qui correspond à $P \Rightarrow Q$ est vraie :*
   - *Si je parle doucement (alors vous ne me comprendrez peut-être pas aussi !)*
   - *Si vous ne me comprenez pas (j'ai peut-être parlé vite !)*

1.2.2 Propriétés

Proposition 8
Étant donnée deux propositions P et Q,

1. *la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \neg Q$;*
2. *le proposition $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\neg Q \Rightarrow \neg P$ (La contre apposée).*

Preuve — On a vu que $P \Rightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q)$, donc sa négation est
$$\neg(\neg P \vee Q) \equiv \neg(\neg P) \wedge \neg Q \equiv P \wedge \neg Q.$$
De plus
$$(\neg Q \Rightarrow \neg P) \equiv \neg(\neg Q) \vee \neg P \equiv Q \vee \neg P.$$
Or cette dernière assertion est équivalente à $P \Rightarrow Q$. $\square$

Exemple 9 — *Soit n un entier. Pour montrer que si n est impaire, alors n^2 est impair, on pose P : n est impair, Q : n^2 est impair. On veut alors montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie. On raisonne par contre apposée :*

- *$\neg P$ correspond à n pair ;*
- *$\neg Q$ correspond à n^2 pair.*

La contre apposée de "Si n est impair alors n^2 impair" est "Si n^2 est pair, alors n est pair" qui est vraie car si 2 divise $n^2 = n \times n$, alors 2 divise n et donc n est pair.
Le raisonnement par contre apposée permet parfois de faire des démonstrations élégantes, alors que le sens direct est laborieux.

Proposition 10
(Montrer une équivalence) Étant donnée deux propositions P et Q, alors la proposition $P \iff Q$ est équivalente à $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Remarque 11 — *Pour montrer que deux propositions P et Q sont équivalentes on montrera le plus souvent que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (en général, vous oubliez l'une des deux implications ou vous raisonnez par des équivalences non justifiées).*

Preuve — Par défintion
$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P).$$

On distribue le $\wedge$ (le “et”)

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P),$$

et par le principe de non contradiction $P \wedge \neg P$ et $Q \wedge \neg Q$ sont toujours fausses, donc

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \equiv (P \Leftrightarrow Q).$$

Ce qui démontre la proposition. □

Remarque 12 — *On écrira $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ pour $(P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R)$.*

Remarque 13 — *Pour démontrer par exemple que P, Q et R sont trois propositions équivalentes il suffit de montrer que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow P$. Ceci est très utile, car au lieu de montrer trois équivalences, on a juste à montrer trois implications.*

Exemple 14 — *Soit z un nombre complexe, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :*

$$i)\ z \in \mathbb{R} \quad ii)\ \operatorname{Im} z = 0 \quad iii)\ \bar{z} = z.$$

En effet, si $z = a + ib \in \mathbb{R}$, alors $b = \operatorname{Im} z = 0$, d'où $\bar{z} = z$ et $Re\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = z \in \mathbb{R}$; ce qui montre les trois équivalences.

Remarque 15 — *En pratique, on aura le plus souvent une approche positive, c'est-à-dire*

- *$P \Rightarrow Q$ se comprend si P est vraie, alors Q est vraie ;*
- *$P \Leftrightarrow Q$ se comprend P est vraie si et seulement si Q est vraie.*

La formulation plus théorique que nous venons de voir est tout à fait cohérente avec cette approche. Dans des raisonnements complexes, il est parfois (souvent) très utile d'avoir en tête la contre apposée ou la double implication.

1.3 Les quantificateurs

On étudie ici des propositions de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 0 \ \text{ ou de la forme } \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq \pi$$

qui se lisent respectivement *“Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $n \geq 0$”* et *“Il existe n appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $n \geq \pi$”.*

Définition 16
Les symboles $\forall$ et $\exists$ s'appellent les quantificateurs.

Remarque 17 — *La phrase “x est un nombre” n'est pas une proposition car on ne sait pas ce qu'est x. Elle n'est ni vraie, ni fausse. mais avec un quantificateur, on peut faire une proposition :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \quad \textit{est un nombre}$$

ou

$$\exists x \in \mathbb{N},\ x \quad \textit{est un nombre.}$$

Sont des propositions et elles sont vraies.

Exemple 18 — *On ainsi les propositions $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{C}$, $x^2 \geq 0$.*

Remarque 19 — *On doit donc toujours préciser l'ensemble qui paramètre le prédicat : $\forall x$, $x^2 \geq 0$ n'a pas de sens.*

On aura parfois besoin de connaître la négation des quantificateurs :

Proposition 20
(Négation des quantificateurs) Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat sur E. Alors

(i) La négation de $\forall x \in E,\ P(x)$ *est* $\exists x \in E,\ \neg P(x)$.

(ii) La négation de $\exists x \in E,\ P(x)$ *est* $\forall x \in E,\ \neg P(x)$.

Exemple 21 —

1. *La proposition* $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ x = -1$ *est fausse, car l'on sait que* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 0 > -1$ *est vraie !*
2. *De même,* $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ *est fausse, car la proposition* $\exists x \in \mathbb{R},\ x < 0$ *est vraie.*
3. *La proposition* $\forall x \in \emptyset,\ x > 2$ *et* $x < -2$ *est vraie (essayez de prouver qu'elle est fausse !).*

Remarque 22 — *La place des quantificateurs est importante,* $\forall$ *et* $\exists$ *ne commutent pas, comme le montre l'exemple suivant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N},\ \ p = n^2$$

veut dire que pour tout entier n *il existe un entier* p *tel que* $p = n^2$ *ce qui est vrai (prendre* $p = n^2$ *!), mais*

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ \ p = n^2$$

voudrait dire qu'il existe un entier p *tel que pour tout entier* n, $p = n^2$, *qui est absurde (*$1^2 \neq 2^2$ *par exemple).*

Remarque 23 — *Il est courant d'écrire* $\exists! x \in E,\ P(x)$ *pour signifier il existe un unique* $x \in E$, *tel que* $P(x)$.

1.4 Raisonnement mathématique : axiomes et théorèmes

Pour raisonner en mathématique, on a besoin de supposer que certaines propositions sont vraies. Ce sont les axiomes (ou les hypothèses). Puis en utilisant les connecteurs (phase de déduction), on obtient de nouvelles propositions. Ce sont les théorèmes. On veut choisir aussi peu d'axiomes que possible (pour éviter les redites), mais on peut aussi ajouter n'importe quel axiome, du moment que l'on n'arrive pas après déduction à une contradiction, c'est-à-dire à la conclusion qu'une proposition est à la fois vraie et fausse, ce qui heurte le sens commun.

Exemple 24 —

1. *Un axiome fondamental est : il existe des ensembles !!!!!*
2. *Nous allons supposer dans le chapitre suivant l'existence d'un élément i tel que $i^2 = -1$; nous en déduirons l'ensemble des nombres complexes munis des opérations usuelles.*
3. *Un axiome célèbre est l'axiome d'Euclide qui dit que l'on peut tracer une unique droite qui passe par un point donné et qui est parallèle à une droite donnée. On peut supposer que cet axiome est vrai ou faux sans obtenir de contradiction avec les autres axiomes élémentaires des mathématiques !*

Pour la phase de déduction, c'est-à-dire de démonstration, on a à notre disposition cinq techniques :

i) par démonstration directe : $P \Rightarrow Q$;
ii) par contre apposée : $\neg Q \Rightarrow \neg P$;
iii) par l'absurde : on suppose que P est fausse et on aboutit à une contradiction, donc P doit être vraie.
iv) on verra aussi que le raisonnement par récurrence fournit une technique de démonstration très puissante dans certains cas.
(v) le raisonnement par *analyse-synthèse* : pour montrer l'existence d'un objet (ou d'une proposition), on suppose que l'objet existe et on étudie les propositions qu'il doit alors vérifier, c'est l'étape de l'analyse ; puis on vérifie qu'un objet ayant les proprit́és trouvées répond au problème. Il s'agit plus d'une stratégie que d'une méthode de déduction (cf exercice 7).

Exemple 25 — *(Existence d'une infinité de nombres premiers) Supposons le contraire, c'est-à-dire supposons que*

"Il existe un nombre fini de nombres premiers."

On peut alors numéroter ces nombres : soient p_1, ..., p_N. Alors $\prod_{i=1}^{N} p_i + 1 = p_1 p_2 \dots p_N + 1$ n'est divisible par aucun des p_i et donc n'est divisible que par 1 et par lui-même, c'est-à-dire est un nouveau nombre premier, et il en existe donc au moins $N+1$. Ceci contredit qu'il existait N nombres premiers.
Conclusion : l'hypothèse "il existe un nombre fini de nombres premiers" n'est pas cohérente, c'est donc sa négation "il existe un nombre infini de nombres premiers" qui est vraie.

Exemple 26 — *Le réel $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel : on veut montrer que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q des nombres entiers. Pour se faire, on procède encore par l'absurde : supposons que*

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ où } \frac{p}{q} \text{ est une fraction irréductible (} p \text{ et } q \text{ n'ont pas de diviseurs communs).}$$

Alors $q\sqrt{2} = p$ et en passant au carré, on obtient $2q^2 = p^2$, donc p^2 est pair, mais alors p est pair : $p = 2p'$ avec p' un entier.
On remplace p par $2p'$ dans l'égalité $2q^2 = p^2$: $2q^2 = 4p'^2$, d'où $q^2 = 2p'^2$ et donc q^2 est pair, mais alors q est pair. On obtient ainsi que 2 divise à la fois p et q, ce qui contreditl'hypothèse p et q n'ont pas de diviseurs communs.

Exemple 27 — *Montrons que les trois médiatrices d'un triangle ABC non aplati se coupent en un point O, le centre du cercle circonscrit au triangle :*

Analyse *On suppose que le point O existe, alors comme il est sur les trois médiatrices, on doit avoir $OA = OB = OC$. Or si on prend le point d'intersection O' des médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$, alors $0A = OB = OC$.*

Synthèse *Les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ se coupent en un unique point O car le triangle est non aplati et alors $OA = OB = OC$, donc O appartient à la médiatrice de $[BC]$ et O est bien l'intersection des trois médiatrices, ce qui termine la démonstration.*

Remarque 28 —

1. *Le principe de non contradiction est essentiel en mathématique. Vous tacherez donc toujours de vérifier la cohérence de vos raisonnements, et que vous n'affirmez pas en même temps une chose et son contraire.*
2. *Pour faire un démonstration, on doit utliser des "axiomes" (les hypothèses), sinon votre raisonnement n'a aucune chance d'aboutir.*

Pour terminer, on notera que la terminologie mathématique ne se limite pas à axiomes et théorèmes. On emploie en général le mot théorème pour des résultats fondamentaux, proposition pour des résultats importants et lemme pour des résultats annexes ou techniques.