北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Géométrie 2

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

29 mars 2020

Table des matières

Chapitre 1 Espaces vectoriels

Table des matières du chapitre

Dans cette partie on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps. Le plus souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais on peut aussi avoir $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier.

1.1 Définitions - Premières propriétés

1.1.1 Défintions - Exemples

Définition 1
Un triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$-esopace vectoriel \域K上的线性空间 / 向量空间\ *si*

1. *E muni de la loi interne : $(x, y) \mapsto x + y$, est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0 ou $\overrightarrow{0}$;*
2. *E est muni de la loi externe $(\lambda, x) \mapsto \lambda.x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E telle que pour tous x, $y \in E$ et tous λ, $\mu \in \mathbb{K}$,*
   (a) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$.
   (b) $\lambda(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.
   (c) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
   (d) $1.x = x$.

Les éléments de E s'appellent vecteurs \向量\ *et les éléments de $\mathbb{K}$ les scalaires* \标量\.

Remarque 2 —

1. *Si E est un ensemble, une loi de composition interne est une application $E \times E \to E$. La loi . est une application $\mathbb{K} \times E \to E$, ce n'est pas une loi interne ; on dit que c'est une loi externe.*
2. *Comme pour les anneaux, on notera toujours les lois + et . et le plus souvent on oubliera même de mettre le point : $2.\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{u}$.*
3. *On écrira souvent E est un espace vectoriel sans préciser le corps $\mathbb{K}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.*

Exemple 3 —

1. *Un espace vectoriel n'est jamais vide, car il contient au moins $\overrightarrow{0}$. Et $E = \{\overrightarrow{0}\}$ est un espace vectoriel pour n'importe quel corps de scalaires $\mathbb{K}$. L'addition et la multiplication par un scalaire sont uniquement déterminés !*

2. *L'espace $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel où un vecteur $\overrightarrow{u}$ est défini par ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La somme et le produit par un scalaire sont définis par :*
$$\forall \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix},\ \lambda\, .\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$
Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont vérifiés.
3. *De la même manière, l'espace $\mathbb{K}^2$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où un vecteur $\overrightarrow{u}$ est défini par ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La somme et le produit par un scalaire sont définis par :*
$$\forall \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix},\ \lambda\, .\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$
Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont encore vérifiés.
4. *Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec*
$$\begin{cases} \forall \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, & \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \lambda.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \end{cases}$$
Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont encore vérifiés.

1.1.2 Premières propriétés

PROPOSITION 4
Dans un espace vectoriel, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$:
1. $\lambda.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \iff \lambda = 0$ *ou* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ *;*
2. $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$.

Preuve — On a par exemple $\lambda.\overrightarrow{0} = \lambda.(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \lambda.\overrightarrow{0} + \lambda\overrightarrow{0}$ donc $\lambda.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. De plus, si $\lambda.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ et $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1}\lambda.\overrightarrow{x} = 1.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. □

DÉFINITION 5
Si A et B sont des parties de E, on pose :
$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\},$$
$$\lambda.A = \{\lambda.a \mid a \in A\},$$
$$\mathbb{K}.a = \{\lambda.a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

EXEMPLE 6 — *Dans $\mathbb{K}^2$, on pose $A = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathbb{K}^2 = A + B$.*

REMARQUE 7 — *Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors c'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais ils n'ont pas les mêmes propriétés. Par exemple, $E = \mathbb{C}.1 = \mathbb{R}.1 + \mathbb{R}.i$. La "droite complexe" représente un plan en tant qu'espace vectoriel. Nous préciserons ce phénomène dans la suite du cours.*
Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors si $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ est un sous-corps, E est aussi un $\mathbb{K}'$-espace vectoriel.
Par exemple $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : $\mathbb{R} = \mathbb{R}.1$. C'est donc un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, mais $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}.1$.

Exemple 8 — *On verra que* $\mathbb{K}^n$ *est un espace vectoriel de dimension n... mais il existe aussi des epsaces vectoriels de dimension infinie et ils sont très courants. Par exemple* $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*, l'ensemble des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, avec pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n \in \mathbb{K}$*. On définit l'addition et la multiplication par un scalaire :*

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

Remarque 9 — *Montrer qu'un triplet* $(E, +, .)$ *est un espace vectoriel. Comme dans le cas des groupes, des anneaux ou des corps, on va le plus souvent montrer que le triplet est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu : c'est le paragraphe suivant. mais avant cela, nous avons besoin de connaître des espaces de références. La proposition ci-dessous nous donne deux types très utiles.*

Proposition 10

1. *Si* X *est un ensemble non vide quelconque et* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, on note* $\mathcal{F}(X, E)$ *l'ensemble des fonctions* $f : X \to E$*. Alors* $\big(\mathcal{F}(X, E), +, .\big)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, les lois étant définies par*

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f + g : t \mapsto f(t) + g(t),\ \lambda.f : t \mapsto \lambda.f(t).$$

2. *Espace vectoriel produit* \积空间\ *: soit* E_1*, ...,* E_n *des espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$*. Le produit cartésien* $E = E_1 \times \cdots \times E_n$*, c'est-à-dire l'ensemble des* n*-uplets* $(x_1, \cdots, x_n)$ *avec* $x_i \in E_i$*, peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *en posant*

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n).$$

Définition 11
On appelle E *l'espace vectoriel produit des espaces vectoriels* E_1*, ...,* E_n*.*

Exemple 12 —

1. *On obtient une autre justification du fait que l'espace des suites* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. C'est l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{K}$*.*
2. *L'espace vectoriel* $\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n}$*.*

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 13
On dit que $F \subset E$ *est un sous-espace vectoriel* \子空间\ *si* $F \neq \emptyset$ *et si*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F, \lambda x + \mu y \in F.$$

Proposition 14
Si F *est un sous-espace vectoriel du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $(E, +, .)$*, alors* $(F, +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Preuve — Vous pouvez faire la vérification sans problème. □

Remarque 15 — *Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Pour montrer qu'un espace est un espace vectoriel, on montrera le plus souvent que c'est un sous-espace vectoriel d'un sous-espace plus grand.*

Espaces vectoriels de référence :

1. $\mathbb{K}^n$;

2. $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, les applications de $I \subset \mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.
3. $\mathcal{F}(X, E)$, où X est une partie non-vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

EXEMPLE 16 — *Prouver que les espaces suivants sont des espaces vectoriels :*

1. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est presque nulle si tous les termes de la suite sont nuls à partir d'un certain rang : il existe $N \in \mathbb{N}$ telle pour tout $n \geq N$, $u_n = 0$. On note $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des suites presque nulles de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
2. *Montrer que $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel où $k \in \mathbb{N}$ et I un intervalle non vide, non réduit à un point de $\mathbb{R}$.*

PROPOSITION 17
Toute intersection de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Preuve — Soit $x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i$ où les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E. Alors $\lambda x + \mu y \in F_i$ pour tout $i \in I$ et donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i\in I} F_i$. □

EXERCICE 18 —

1. *Montrer que les ensembles*
$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}),\ \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}),\ \mathcal{D}(I, \mathbb{R}),\ \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$$
où $k \in \mathbb{N}^*$ et où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.
2. *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?*
   — *les cercles d'équation* $x^2 + y^2 = 1$ *et* $(x-1)^2 + y^2 = 1$ *;*
   — *les droites d'équation* $2x + 3y = 1$ *et* $2x + 3y = 0$.
3. *L'ensemble S_0 des fonctions d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivables et solutions de l'équation différentielle*
$$4\,y'' + 2\,y' + 3\,y = 0 \tag{E_0}$$
est-il un espace vectoriel ? Même question pour l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle
$$4\,y'' + 2\,y' + 3\,y = 1 \tag{E}$$

1.2.1 Combinaisons linéaires et parties génératrices

Si A une partie de E, on montre ici que le plus petit espace vectoriel contenant A est l'intersection des espaces vectoriels contenant E et c'est encore l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A.

§ *1. Combinaisons linéaires*

DÉFINITION 19
On dit que x est une combinaison linéaire \线性组合\ *de x_1, ..., x_n s'il existe λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que*
$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

PROPOSITION 20
Une partie $F \subset E$ d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel ssi F est non vide et F est stable par combinaison linéaire \对线性组合是封闭的\ *: pour tous x_1, ..., $x_n \in F$ et tous λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{K}$,*
$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in F.$$

Preuve — $\Leftarrow$: une récurrence simple montre que si x_1, ..., x_n appartiennent à un sous-espace vectoriel F, alors toute combinaison linéaire de ces éléments reste dans F.
$\Rightarrow$: immédiat. □

Définition 21
Soit x_1, ..., $x_n \in E$. On note l'ensemble des combianisons linéaires de x_1, ..., x_n

$$\mathrm{vect}(x_1, \cdots, x_n) = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Exemple 22 —

1. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni de $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, soit $e_1(0,1,2)$ et $e_2(0,2,3)$. Alors $Vect(e_1, e_2)$ est le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2. On a $k = 2e_1 - e_2 \in \mathrm{vect}\,(e_1, e_2)$ et $j = e_1 - 2k = -3e_1 + 2e_2 \in \mathrm{vect}\,(e_1, e_2)$, donc $\mathrm{vect}\,(j, k) \subset \mathrm{vect}\,(e_1, e_2)$. Et réciproquement, $e_1, e_2 \in \mathrm{vect}\,(j, k)$, d'où $\mathrm{vect}\,(e_1, e_2) = \mathrm{vect}\,(j, k)$.*
2. *Soit $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$. On a*

$$P = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+2y\\-x+3y\end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

§ *2. Parties génératrices*

Définition 23

1. *Si A est une partie de E, on appelle sous-espace engendré par A l'intersection $\overline{A}$ des sous-espaces vectoriels contenant A.*
2. *Si F est un sous-espace vectoriel et si $\overline{A} = F$, on dit que que A est une partie génératrice de F.*

Proposition 24
Le sous-espace $\overline{A}$ engendré par A est égal à l'ensemble $\widehat{A}$ des combinaisons linéaires de A.

Preuve — Comme $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel contenant A, il contient toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A, c'est-à-dire $\widehat{A}$: $A \subset \widehat{A} \subset \overline{A}$. Il suffit donc de montrer que $\widehat{A}$ est lui-même un sous-espace vectoriel : soit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i$, avec $x_i, y_i \in A$ et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu\beta_i y_i$ est bien une combinaison linéaire d'éléments de A et donc est dans $\widehat{A}$. $\widehat{A}$ est un sous-espace vectoriel contenant A, il est donc contenu dans $\overline{A}$. ☐

Remarque 25 — *On a bien monré que $\widehat{A} = \overline{A}$ et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. En particluier, $Vect(x_1, \cdots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant x_1, ...,x_n.*

Exemple 26 — *Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix}2x-y\\x+2y\\3x-2y\end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{K}^2 \right\} \subset \mathbb{K}^3$. Alors F est un sous-espace vectoriel car*

$$F = \{x\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$$

1.2.2 Somme d'espaces vectoriels

Corollaire 27
Soit F_1, ..., F_n des sous-espaces vectoriels de E. Alors l'ensemble

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mid \forall i\ x_i \in F_i \right\}$$

est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les F_i.

Remarque 28 —

1. *En particulier, $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$.*
2. *On a vect$(x_1, \cdots, x_n) = \overline{A}$ avec $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$, donc c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les x_i.*

Exemple 29 —

1. $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.
2. $\mathbb{R}^3 = \{(0, y, z)\ ,\ y, z \in \mathbb{R}\} + \{(x, y, 0)\ ,\ x, y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}[X] = \{(u_n) \in \mathbb{R}[X],\ u_0 = 0\} + \{P \in \mathbb{R}[X],\ u_1 = 0\}$.
   En effet, $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ avec $v_0 = 0$, $v_n = u_n$ si $n > 0$ et $w_0 = u_0$, $w_n = 0$, si $n > 0$.

1.3 Applications linéaires

1.3.1 Définitions et exemples

Définition 30

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et u une application de E dans F. On dit que

1. *u est linéaire si $\forall x, y \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,alors $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$.*
2. *u est un endomorphisme (ou un opérateur) si $F = E$: $u : E \to E$.*
3. *u est un isomorphisme, si u est bijective.*
4. *u est un automorphisme, si u est un isomorphisme et $E = F$.*

Exemple 31 —

1. *Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ fixé, l'application $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$ est un automorphisme de E appelé homothétie de rapport λ.*
2. *$u : (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
3. *L'application $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais ce n'est pas un automorphisme (le noyau n'est pas nul).*

Proposition 32

Soit u un isomorphisme de E sur F, alors sa réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Preuve — Il faut vérifier que u^{-1} est linéaire : Soit y et y' dans F. Il existe x et x' dans E tels que $u(x) = y$ et $u(x') = y'$. Alors

$$u^{-1}(\lambda y + \mu y') = u^{-1}(\lambda u(x) + \mu u(x')) \overset{u \text{ lin.}}{=} u^{-1}(u(\lambda x + \mu x')) = \lambda x + \mu x' = \lambda u^{-1}(y) + \mu u^{-1}(y'),$$

et u^{-1} est bien linéaire. □

Remarque 33 — *Une application linéaire $u : E \to F$ est en particulier un morphisme du groupe $(E, +)$ dans le groupe $(F, +)$ et donc $u(0) = 0$ et u est injective ssi son noyau est réduit à 0.*

1.3.2 L'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$

Définition 34

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Proposition 35

L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ a une structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec les lois

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E, F),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (u + v)(x) = u(x) + v(x) \text{ et } (\lambda u)(x) = \lambda u(x).$$

Preuve — Il faut vérifier toutes les conditions, c'est long mais pas difficile, donc un bon exercice. □

Proposition 36
Soit E, F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f$ est linéaire : $g \circ f \in \mathcal{L}(F,G)$.

Preuve — On calcule

$$(g \circ f)(\lambda x + \mu y) = g(f(\lambda x + \mu y)) \overset{f \text{ lin.}}{=} g(\lambda f(x) + \mu f(y)) \overset{g \text{ lin.}}{=} \lambda g(f(y)) + \mu g(f(y)),$$

et $g \circ f$ est bien linéaire. □

Exemple 37 — *L'application $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_n + nu_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme.*

1.4 Sommes directes

Définition 38
On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont en sommes directes si $F \cap G = \{0\}$ et note alors $F \oplus G$. De plus, si $E = F + G$, alors on dit que F et G sont supplémentaires :

$$E = F \oplus G \iff (E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0\}).$$

Proposition 39
Avec les notations précédentes $E = F \oplus G$ si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

Preuve — Si tout x dans E s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$, alors certainement $E = F + G$ et si $x \in F \cap G$, alors on peut choisir $(x_F, x_G) = (x, 0)$ ou $(x_F, x_G) = (0, x)$ et l'unicité implique $x_F = x_G = 0$, ce qui montre que $F \cap G = \{0\}$.
Et si $E = F \oplus G$, alors certainement il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$, tel que $x = x_F + x_G$.

□

Exemple 40 —

1. *Soit $D_1 = \mathbb{K}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $D_2 = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. On a $\mathbb{K}^2 = D_1 \oplus \mathbb{D}_2$ car*
   (a) *Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in D_1 \cap D_2$, alors $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. On en déduit que $\lambda = \mu = 2\mu$, donc $\lambda = \mu = 0$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.*
   (b) *Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$. On cherche λ, $\mu \in \mathbb{K}$ tels que*
   $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu\\2\lambda+\mu\end{pmatrix}.$$
   On trouve $\lambda = y - x$ et $\mu = 2x - y$. Donc $\overrightarrow{u} \in D_1 + D_2$.
2. *On verra que deux droites vectorielles D_1 et D_2 distinctes dans le plan sont supplémentaires : $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$.*
   Dans $\mathbb{R}^3$, vous pouvez montrer que deux droites vectorielles distinctes sont en somme directe mais ne sont pas supplémentaires l'une de l'autre : on verra que l'on a besoin de rajouter une troisième droite D_3. On va définir la somme directe de 3 (ou plus) espaces $E = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$.
3. *Soit $D = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Alors $\mathbb{K}^3 = D \oplus P$ car*
   (a) *Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in D \cap P$, alors il existe λ, μ, $\nu \in \mathbb{K}^3$ tels que*
   $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

La deuxième coordonnée donne $\mu = 0$, puis la première donne $\lambda = 0$ et enfin $\nu = 0$, donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(b) *De plus, si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, on cherche λ, μ et $\nu \in \mathbb{K}$, tels que*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \mu \\ \mu + \nu \end{pmatrix}.$$

La seconde coordonnée donne $\nu = y$, puis la première donne $\lambda = x - y$ et enfin $\nu = z - y$.

(c) *Soit $D = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.*

On vérifie que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in D \cap P$, donc D et P ne sont pas en somme directe.

Théorème 41
Soit F_1, ..., F_n des sous espaces vectoriels de E et u l'application linéaire surjective :

$$F_1 \times \cdots \times F_n \to F = F_1 + \cdots + F_n,\ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto u(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *u est un isomorphisme d'espace vectoriels.*
2. *Tout $x \in F$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, avec $x_i \in F_i$.*
3. *$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ entraîne $x_i = 0$ pour tout i.*
4. *Pour tout i, $F_i \cap \sum_{i \neq j} F_j = \{0\}$.*

Preuve — 2/ dit que u est bijective et 3/ qu'elle est injective donc bijective puisque u est toujours surjective. On en déduit donc que 1/, 2/ et 3/ sont équivalentes.
3/ $\Rightarrow$ 4/ s'il existe $x_i \in F_i \cap \sum_{i \neq j} F_j$, alors $x_i = \sum_{i \neq j} x_j$, donc $0 = x_i - \sum_{i \neq j} x_j$, et d'après le 3/ on en déduit que $x_i = x_j = 0$. Donc 4/ est vérifiée.
4/ $\Rightarrow$ 3/ Supposons $\sum x_i = 0$. S'il existe un i tel que $x_i \neq 0$ alors $x_i = -\sum_{i \neq j} x_j \in F_i \cap \sum_{i \neq j} F_j$, ce qui contredit 4/. □

Définition 42
Lorsque les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on dit que la somme des F_i est directe ou que F est la somme directe des F_i. On écrit

$$F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \quad \text{où} \quad F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n.$$

Remarque 43 —

1. *On a $\mathbb{K}^3 = \mathbb{K}. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, car tout vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs :*

$$\overrightarrow{u} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. *D'après 3/* $F = F_1 \oplus F_2 \cdots \oplus F_n$ *si et seulement si tout vecteur* $x \in F$ *se décompose de manière unique dans* F_1, ..., F_n : $x = x_1 + \cdots + x_n$. *On en déduit par récurrence que c'est équivalent à montrer par exemple (l'ordre étant indifférent)*

$$\Big(\cdots\big((F_1 \oplus F_2) \oplus F_3\big) \oplus \cdots \oplus F_{n-1}\Big) \oplus F_n.$$

3. *Montrez que* $D_1 = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $D_2 = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ *et* $D_3 = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ *sont en somme directe. On vérifie que* $D_1 \cap D_2 = \{0\}$, *puis si* $u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (D_1 \oplus D_2) \cap D_3$, *alors il existe* λ, μ *et* $\nu \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = 3\mu + 2\nu & (a) \\ 0 = 2\mu + \nu & (b) \\ \lambda = \mu + 2\nu & (c) \end{cases}.$$

   De $(a) - (c)$ *on trouve* $\mu = 0$, *la seconde coordonée donne* $\nu = 0$ *et finalement* $\lambda = 0$. *Ce qui montre bien que* $D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$. *On a en fait* $\mathbb{K}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$. *Vous pouvez le vérifier ou attendre la partie sur la dimension d'un espace vectoriel.*

4. *Mais si pour montrer que* F_1 *et* F_2 *sont en somme directe il suffit de motrer que* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, *ce n'est plus vrai pour* $n \geq 3$:

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\},\ i \neq j\ F_i \cap F_j = \{0\} \not\Rightarrow F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$$

   comme le montre l'exemple dans $\mathbb{R}^2$: $F_1 = \langle i \rangle$, $F_2 = \langle j \rangle$ *et* $F_3 = \langle i + j \rangle$.

5. *Nous admettrons qu'un sous-espace* $F \subset E$ *admet toujours un supplémentaire. L'exemple ci-dessus montre qu'un supplémentaire n'est pas unique.*
   Par contre, on peut montrer que deux supplémentaires à un même espace sont toujours isomorphes.

1.5 Familles libres, familles génératrices, bases

1.5.1 Familles libres

§ 1. *Définition*

DÉFINITION 44

1. *Une famille de vecteurs* $(e_1, \cdots, e_m)$ *est libre si elle vérifie :*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i = 0 \text{ si et seulement si } \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i.$$

   On dit aussi que les vecteurs x_1, ..., x_n *sont linéairement indépendants* \线性无关\.

2. *Une famille de vecteurs* $(e_i)_{i \in I}$ *non nécessairement finie est libre si toute sous famille finie* $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_m})$ *est libre. On dit aussi que les vecteurs* e_i *sont linéairement indépendants.*

3. *Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée, c'est-à-dire si et seulement si il existe* $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_m})$ *une sous-famille et* λ_1, ..., λ_m **non tous nuls** *tels que*

$$\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_m e_{i_m} = 0,$$

   et on dit alors que les vecteurs e_i *sont linéairement dépendants* \线性相关\.

EXEMPLE 45 —

1. *Une famille de deux vecteurs* (e_1, e_2) *est liée si et seulement si* e_1 *et* e_2 *sont colinéaires* \共线\.

2. *Une famille de trois vecteurs (e_1, e_2, e_3) dans $\mathbb{R}^3$ est libre si et seulement si ils ne sont pas coplanaires (leur déterminant est non nul).*
3. *Attention $(1, i)$ est libre dans $\mathbb{R}$ mais est liée dans $\mathbb{C}$.*

Exemple 46 —

1. *Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $\big((1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)\big)$ est libre.*
2. *Dans $\mathbb{K}[X]$, on pose $X^0 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X^k = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{k}, 1, 0 \cdots)$. La famille $(X^0, X^1, \cdots, X^n, \cdots)$ est libre.*
3. *Si α_1, ..., α_n est une suite de nombres strictement décroissante, alors $(e^{\alpha_1 x}, \cdots, e^{\alpha_n x})$ est libre : procéder par récurrence et supposer une relation de dépendance entre m vecteurs multiplier par un $e^{-\alpha_i x}$, dériver et en déduire une relation de dépendance entre $m-1$ de dépendance entre $m-1$ vecteurs. Conclure.*
4. *La famille $(e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.*
5. *Une sous-famille d'une famille libre est libre.*

§ *2. Caractérisation*

Proposition 47
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs telle que $e_1 \neq 0$ et pour tout $2 \leq i \leq n$, $e_i \notin \operatorname{vect}(e_1, \cdots, e_{i-1})$, alors la famille est libre.

Preuve — On procède par récurrence sur n, pour $n = 1$ la propriété est évidente. Pour $n \geq 2$, si on a relation de dépendance $\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n e_n = 0$, alors $\lambda_n = 0$ car sinon

$$e_n = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_{n-1} e_{n-1}) \in \operatorname{vect}(e_1, \cdots, e_{n-1}),$$

ce qui contredit les hypothèses, et donc on a une relation de dépendance entre e_1, ..., e_{n-1}, et comme par récurrence cette famille est libre, on en déduit que les λ_i sont nuls pour tout i et la famille est libre. ☐

Proposition 48
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe, $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre de F et $(y_1, \cdots, y_m)$ une famille libre de G. Alors $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ est une famille libre de $F \oplus G$.

Preuve — Supposns $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m = 0$, alors

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = -(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m)$$

mais ce vecteur appartient à $F \cap G$, or ces deux espaces sont en somme directe, donc c'est le vecteur nul, et tous les α_i et les β_i sont nuls puisque les familles (x_i) et (y_i) sont libres, ce qui permet de conclure. ☐

1.5.2 Familles génératrices

Définition 49
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E si vect$(x_i,\ i \in I) = E$.

Exemple 50 —

1. *La famille $\big((1, 0 \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)\big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}$.*
2. *X^0, ..., X^n engendrent $\mathbb{K}_n[X] = \{(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \mid \forall k \geq n+1,\ u_k = 0\}$, l'ensemble des suites dont les termes sont tous nuls à partir du rang $n+1$.*
3. *$(X^0, \cdots, X^n, \cdots)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$ (il n'existe pas de famille génératrice finie de $\mathbb{K}[X]$!).*
4. *La famille (f_1, f_2) de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ avec $f_1(1, 1)$ et $f_2(1, -1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.*

PROPOSITION 51
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E et $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille génératrice de F et $(y_1, \cdots, y_m)$ une famille génératrice de G. Alors $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ est une famille génératrice de $F + G$.

Preuve — Tout élément $z \in F + G$ s'écrit $z = x_F + y_G$ avec $x_F \in F$ et $y_G \in G$, et par hypothèse $x_F = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ et $y_G = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_m y_m$. Donc

$$z = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_m y_m,$$

et $z \in \text{vect}\,(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ et la famille est bien génératrice. □

1.5.3 Bases

§ *1. Définitions*

DÉFINITION 52
Une base \基\ d'un espace vectoriel E est une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E qui est à la fois libre et génératrice.

EXEMPLE 53 —

1. *$(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
2. *(f_1, f_2, f_3) avec $f_1(1,1,0)$, $f_2(1,0,1)$ et $f_3(0,1,0)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
3. *On appelle base canonique de $\mathbb{R}^n$ la base $(e_1, \cdots, e_n)$, où e_i est le vecteur $(0 \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ le 1 étant en i-ème position.*
4. *Deux vecteurs non colinéaires dans le plan ou trois vecteurs non coplanaires dans $\mathbb{R}^3$ forment une base !*

THÉORÈME 54
Tout $\mathbb{K}$-espace vectorieln E, $E \neq \{0\}$ admet une base (mais elle n'est pas nécessairement finie !)

DÉFINITION 55
Soit E un espace vectoriel qui admet une base finie $(e_1, \cdots, e_n)$. On appelle coordonnées \坐标\ du vecteur $u \in E$ dans cette base l'unique n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ tel que

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

REMARQUE 56 — *L'existence vient du fait que la famille est génératrice, l'unicité du fait qu'elle est libre : supposons qu'il existe des autres coordonnées $u = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ et en prenant la différence $(x_1 - y_1)e_1 + \cdots + (x_n - y_n)e_n = 0$, d'où $x_i = y_i$ pour tout i.*

§ *2. Caractérisation*

PROPOSITION 57
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $(x_1, \cdots, x_n)$ une base de F et $(y_1, \cdots, y_m)$ une base de G. Alors

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \text{ est une base de } F + G \text{ ssi } F \text{ et } G \text{ sont en somme directe.}$$

Preuve — Si $F \oplus G$, on a vu que la famille était libre et génératrice. D'autre part si $0 \neq a \in F \cap G$, alors x s'écrit dans la base des x_i et dans la base des y_i

$$a = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m$$

et a sécrit de deux manières avec des vecteurs de la famille $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$: ce n'est pas une base. □

REMARQUE 58 — *Pour montrer que $E = F \oplus G$, il suffit de trouver une base de F et une base de G et montrer qu'en les concaténant on obtient une base de E.*

Exemple 59 — *On a $\mathbb{R}^3$ est la somme directe du plan P d'équation $x+y+z=0$ et de la droite D engendrée par le vecteur $n(1,1,1)$. Une base de P est $e_1(1,-1,0)$ et $e_2(1,0,-1)$, donc (e_1,e_2,n) est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Proposition 60
Si E est engendré par une famille à n éléments $(e_1,\cdots,e_n)$, alors toute famille libre $(f_1,\cdots,f_m)$ a au plus n éléments (c'est-à-dire $m \leq n$).

Preuve — On procède par récurrence sur n. Le cas $n=1$ est évident.
Supposons $\mathcal{P}(n)$: "un espace vectoriel engendré par n éléments, alors toute famille libre a au plus n éléments" est vrai.
Montrons $\mathcal{P}(n+1)$: supposons que E est engendré par $n+1$ éléments et soit $(f_1,\cdots,f_m)$ une famille libre, on veut montrer que $m \leq n+1$.
Si pour tout i, $f_i \in \text{vect}(e_1,\cdots,e_n)$, alors $(f_1,\cdots,f_m)$ est une famille libre d'un espace engendré par n éléments et donc $m \leq n$.
Sinon, il existe i_0 tel que

$$f_{i_0} = \lambda_{i_0} e_{n+1} + \text{ une combinaison linéaire des } e_1, \ldots, e_n \text{ avec } \lambda_{i_0} \neq 0.$$

Mais pour tout $i \in \{1,\cdots,m\}$

$$f_i = \lambda_i e_{n+1} + \text{ une combinaison linéaire des } e_1, \ldots, e_n.$$

donc pour $i \neq i_0$, la famille des vecteurs $f_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} f_{i_0} \in \text{vect}(e_1,\cdots,e_n)$ est libre et dans un espace engendré par n vecteurs d'où par récurrence $m-1 \leq n$ et donc $m \leq n+1$ et la démonstration est terminée.
Remarquez que l'on a en fait appliqué la méthode du pivot de Gauss en choisissant la ligne i_0 pour éliminer le vecteur e_{n+1}.
□

Corollaire 61
(Fondamental) Toute base d'un espace vectoriel engendré par n éléments a au plus n éléments.

Corollaire 62
(Très pratique) Toute famille libre à n éléments dans un espace E engendré par n éléments est une base.

Preuve — Soit une famille libre libre $(e_1,\cdots,e_n)$ libre.
Montrons que la famille est génératrice : soit $x \in E$, alors $(e_1,\cdots,e_n,x)$ est liée car a $n+1$ éléments et E engendré par n éléments : $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \lambda x = 0$ avec les λ_i non tous nuls. Mais si $\lambda = 0$, alors ceci contredit $(e_1,\cdots,e_n)$ libre, donc $\lambda \neq 0$, mais alors

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} e_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} e_n,$$

et x appartient bien à l'espace engendré par les e_i qui donc forment une famille génératrice, donc une base puisque libre. □

Exemple 63 — *$f_1(1,2,0)$, $f_2(1,0,3)$ et $f_3(0,1,0)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$ donc est une base (car $\mathbb{R}^3$ est engendré par 3 vecteurs !).*

Chapitre 2 Espaces vectoriels en dimension finie

2.1 Dimension d'un espace vectoriel

2.1.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 64
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de dimension finie si E admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple 65 —

1. *$\mathbb{K}^n$ est de dimension finie.*
2. *$\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.*

2.1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 66
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$. Alors

1. *E admet une base finie.*
2. *Toute base de E a le même nombre déléments n.*

On dit alors que E est de dimension n sur $\mathbb{K}$, ce que l'on note $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ ou plus simplement $\dim E = n$. Par convention si $E = \{0\}$, $\dim E = 0$.

Preuve — 1/ On va consruire explicitement une base : supposons que $E = \text{vect}\,(f_1, \cdots, f_m)$
On choisit $e_1 \in \{f_1, \cdots, f_m\}$ non nul (existe car $E \neq \{0\}$).
Puis on choisit $e_2 \in \{f_1, \cdots, f_m\} \setminus \{e_1\}$ tel que $e_2 \notin \text{vect}(e_1)$.
Puis on choisit $e_3 \in \{f_1, \cdots, f_m\} \setminus \{e_1, e_2\}$ tel que $e_3 \notin \text{vect}(e_1, e_2)$, etc.
On continue tant qu'il existe r, $e_r \in \{f_1, \cdots, f_m\} \setminus \{e_1, \cdots, e_{r-1}\}$, $e_r \notin \text{vect}\,(e_1, \cdots, e_{r-1})$.
On s'arrête donc si $\forall i$, $f_i \in \text{vect}(e_1, \cdots, e_r\}$ et la famille $(f_1, \cdots, f_m)$ étant génératrice, on en déduit que $(e_1, \cdots, e_r)$ l'est aussi.
De plus, comme pour tout $2 \leq i \leq r$, $e_i \notin \text{vect}(e_1, \cdots, e_{i-1})$, la famille est libre.
On en déduit que $(e_1, \cdots, e_r)$ est une base.
2/ Si $(e_1, \cdots, e_r)$ et $(e'_1, \cdots, e'_n)$ sont deux bases de E, alors $(e_1, \cdots, e_r)$ est une famille génératrice et $(e'_1, \cdots, e'_n)$ est une famille libre, le théorème de la fin du chapitre précédent nous dit que $n \leq r$. De même, on montre que $n \leq r$ et donc $n = r$, ce que nous voulions. □

Remarque 67 — *On a en fait montrer que l'on peut extraire une base de toute famille génératrice.*

2.1.3 Exemples

Exemple 68 —

1. *$\mathbb{K}^n$ est de dimension n car $(e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ en est une base.*
2. *$\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$ car $(1, X, \cdots, X^n)$ en est une base.*
3. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on pose $e_1(1,1,0)$, $e_2(0,1,2)$, $e_3(-1,0,2)$ et $e_4(0,1,1)$. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice. On a $e_2 \notin \text{vect}(e_1)$, $e_3 \in \text{vect}(e_1, e_2)$ et $e_4 \notin \text{vect}(e_1, e_2)$. Donc la famille (e_1, e_2, e_4) est une base de $\mathbb{R}^3$.*

DÉFINITION 69
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel.

1. *Si F est de dimension 1, on dit que F est une droite vectorielle.*
2. *Si F est de dimension 2, on dit que F est un plan vectoriel.*
3. *Si F est de dimension $n-1$, F est un hyperplan de E.*

2.1.4 Caractérisation des bases en dimension finie

PROPOSITION 70
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors

$$(f_1, \cdots, f_n) \text{ est une base } \iff (f_1, \cdots, f_n) \text{ est libre } \iff (f_1, \cdots, f_n) \text{ est génératrice}$$

Preuve — Si $(f_1, \cdots, f_n)$ libre et non génératrice, alors il existe $x \in E$, $x \notin \mathrm{vect}(f_1, \cdots, f_m)$ et alors en posant $f_{n+1} = x$, on obtient une famille libre à $n+1$ éléments ce qui contredit que E est engendré par n éléments ; donc la famille est génératrice et donc une base.
2/ Si $(f_1, \cdots, f_n)$ est génératrice, mais pas libre, alors il existe un f_i qui sécrit comme une combinaison linéaire des autres f_j. Supposons, quitte à permuter les éléments, que c'est f_n, alors $(f_1, \cdots, f_{n-1})$ est encore génératrice ; mais alors E est engendré par $n-1$ éléments et $(e_1, \cdots, e_n)$ ne peut pas être libre, ce qui est absurde puisque c'est une base. On en déduit que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre, donc c'est une base. On en déduit l'équivalence. □

EXEMPLE 71 — *Prenons la famille (f_1, f_2, f_3) avec $f_1(1,0,2)$, $f_2(1,1,2)$ et $f_3(2,0,2)$.*
On a $e_1(1,0,0) = f_3 - f_1$, $e_2 = f_2 - f_1$ et $e_3 = f_1 - 1/2 f_3$, donc la famille est génératrice dans $\mathbb{R}^3$; c'est une base puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

2.1.5 Théorème de la base incomplète

On vient de voir que d'une famille génératrice, on peut extraire une base, ici on étudie le processus inverse :

THÉORÈME 72
Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, \cdots, e_n)$, $n \geq 1$ et soit $(f_1, \cdots, f_m)$ une famille libre. On peut complèter la famille $(f_1, \cdots, f_m)$ en une base $(f_1, \cdots, f_n)$, et de plus on peut choisir les vecteurs f_{m+1}, ..., f_n parmi les e_i.

Preuve — La preuve est toujours sur le même algorithme :

1. Si pour tout j, $e_j \in \mathrm{vect}(f_1, \cdots, f_m)$, alors $(f_1, \cdots, f_m)$ est génératrice, et par hypothèse, elle est libre, donc c'est une base et on a fini.
2. Sinon, soit j tel que $e_j \notin \mathrm{vect}(f_1, \cdots, f_m)$, on pose $f_{m+1} = f_j$

et on recommence avec $m := m+1$, l'algorithme s'arrête après au plus n étapes ; on obtient ainsi une base $(f_1, \cdots, f_n)$ ayant les propriétés désirées. □

EXEMPLE 73 — *Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (i, j, k) et soit le vecteur $e_1(1,1,1)$. On a $i \notin \mathrm{vect}(e_1)$ et $j \notin \mathrm{vect}(e_1, i)$ donc (e_1, i, j) est une base de $\mathbb{R}^3$, car de dimension 3.*

2.2 Sous-epaces vectoriels en dimension finie

2.2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

PROPOSITION 74
Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. *F est de dimension finie, et $\dim F \leq \dim E$;*
2. *De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.*

EXEMPLE 75 —

1. *Dans* $E = \mathbb{R}^4$, *soit* $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t = 0\}$, *alors les vecteurs* $(1,-1,0,0)$, $(1,0,-1,0)$ *et* $(1,0,0,-1)$ *forment une famille libre, donc* F *est de dimension au moins* 3 *mais* $F \neq \mathbb{R}^4$ *car* $(1,0,0,0) \notin F$, *donc* $\dim F \leq 3$. *On en déduit que* F *est de dimension* 3 *et une base de* F *est donnée par les vecteurs* $(1,-1,0,0)$, $(1,0,-1,0)$ *et* $(1,0,0,-1)$
2. *Dans* $E = \mathbb{R}^4$, *on pose* $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y = 0 \text{ et } z+t = 0\}$.
   Alors G *contient les vecteurs* $g_1(0,0,1,-1)$, $g_2(1,-1,0,0)$ *donc* $vect(g_1, g_2) \subset G$.
   De plus, si $(x,y,z,t) \in G$, *alors* $(x,y,z,t) = (x,-x,z,-z)$ *puisque* $x+y = 0$ *et* $z+t = 0$ *; donc* $(x,y,z,t) = xg_1 + zg_2 \in \mathrm{vect}\,(g_1,g_2)$. *On en déduit que* $G = \mathrm{vect}\,(g_1, g_2)$ *famille libre à deux éléments, donc c'est une base de* G *qui est de dimension* 2.

2.2.2 Produits

PROPOSITION 76
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie. Alors*

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Preuve — En effet, si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, et $(f_1, \cdots, f_m)$ une base de F, alors vérifie facilement que la famille

$$\big((e_1,0), \cdots, (e_n,0), (0,f_1), \cdots, (0,f_m)\big)$$

est libre et génératrice, donc une base de $E \times F$. □

2.2.3 Sommes

PROPOSITION 77
Soient F *et* G *deux sous espaces vectoriels de* E *de dimension finie. Alors*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Preuve — Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de $F \cap G$ que l'on complète en

$$\begin{cases} (e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n) \text{ base de } F \\ (e_1, \cdots, e_p, e'_{p+1}, \cdots, e'_m) \text{ base de } G \end{cases}$$

et alors on vérifie facilement que $(e_1, \cdots, e_p, e_p+1, \cdots, e_n, e'_{p+1}, \cdots, e'_m)$ est une famille libre qui engendre $F+G$ et donc est une de $F+G$. On a donc, $\dim F+G = n+m-p$, $\dim E = n$, $\dim F = m$ et $\dim F \cap G = p$. □

COROLLAIRE 78
(Très utile) Soit F, $G \subset E$, $(f_1, \cdots, f_l)$ *une base de* F *et* $(g_1, \cdots, g_m)$ *une base de* G. *Alors*

$$F \oplus G \iff \dim(F+G) = \dim F + \dim G \iff (f_1, \cdots, f_l, g_1, \cdots, g_m) \ \textit{ est une base de } \ F+G$$

Preuve — En effet, d'après la proposition ci-cessus, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$ si et seulement si $\dim F \cap G = 0$, c'est-à-dire $F \cap G = \{0\}$.
Et on a déjà vu que F et G sont en somme directe ssi les deux bases mise bout à bout (concaténées) forment une base de la somme. □

REMARQUE 79 —

1. *De même* $F_1 \oplus \cdots \oplus F_l$ *si et seulement si* $\dim(F_1 + \cdots + F_l) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_l$ *si et seulement en concaténant une base de chaque* F_i *on obtient une base de la somme des* F_i.
2. *L'intersection de deux plans vectoriels distincts dans* $\mathbb{R}^3$ *est de dimension* 1 *(la situation change complètement du point de vue affine : les plans peuvent être parallèles).*
3. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n, *et* F *un sous-espace vectoriel de dimension* p, *alors tout supplémentaire est de dimension* $n-p$.

EXEMPLE 80 — *Déterminer un supplémentaire de* $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y = 0 \text{ et } z+t = 0\}$ *dans* $\mathbb{R}^4$. *On a vu que les vecteurs* $e_1(1,-1,0,0)$ *et* $e_2(0,0,1,-1)$. *Pour trouver* H *un supplémentaire de* G, *on complète la famille* (e_1,e_2) *en une base suivant l'algorithme habituel :* $e_3(1,0,0,0) \notin \mathrm{vect}(e_1,e_2)$ *et* $e_4(0,0,1,0) \notin \mathrm{vect}(e_1,e_2,e_3)$, *donc* (e_1,e_2,e_3,e_4) *est une base de* $\mathbb{R}^4$ *et* $H = \mathrm{vect}(e_3,e_4)$ *est un supplémentaire de* G.

2.2.4 Rang d'une famille

DÉFINITION 81
On appelle rang d'une famille $(e_1, \cdots, e_l)$ *de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel engendré par ceux-ci*

$$\operatorname{rg}(e_1, \cdots, e_l) = \dim \operatorname{vect}(e_1, \cdots, e_l).$$

PROPOSITION 82
Le rang de la famille $(e_1, \ldots, e_l)$ *est inférieur à* l *et il vaut exactement* l *si et seulement si elle est libre.*

COROLLAIRE 83
Si $\dim E = n$*, alors* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est de rang* n *si et seulement si c'est une base.*

2.3 Sous-espaces affines

Ici, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2.3.1 Définitions et premières propriétés

§ *1. Définitions*

DÉFINITION 84
Une partie $\mathcal{F}$ *de* E *est un sous-espace affine de* E*, s'il existe un élément* $A \in E$ *et* F *un sous-espace vectoriel tels que*

$$\mathcal{F} = \{A + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F\}.$$

On dit que que $\mathcal{F}$ *passe par* A*, a pour direction* F *et on écrit* $\mathcal{F} = A + F$*.*

REMARQUE 85 —

1. *Si* $B \in \mathcal{F}$*, alors* $B = A + \overrightarrow{u}$*,* $u \in F$*, on note* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \in F$ *et* $\mathcal{F}$ *est l'ensemble des points* B *tels que* $\overrightarrow{AB} \in F$*.*
2. *Un espace affine n'est jamais vide.*

EXEMPLE 86 —

1. *Soit une droite* $\mathcal{D}$ *affine de* $\mathbb{R}^2$ *d'équation* $ax + by = c$ *est un sous -espace affine de direction la droite vectorielle* $D : ax + by = 0$ *et passant* $(0, \frac{c}{b})$ *si* $b \neq 0$ *ou* $(\frac{a}{c}, 0)$ *sinon. En effet, si* $M(x, y), M'(x', y') \in \mathcal{P}$*, alors* $\overrightarrow{M'M}(x - x', y - y')$ *vérifie l'équation de* P*.*
2. *De même, le plan affine* $\mathcal{P}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *d'équation* $ax + by + cz = d$ *est un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^3$ *de direction le plan vectoriel déquation* $P : ax + by + cz = 0$*.*

§ *2. Premières propriétés*

PROPOSITION 87
Avec les notations précédentes, on a

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ *si et seulement si* $A = B$*.*
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. $\forall A, B, C \in \mathcal{F}$*,* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(Relation de Chasles).*

Proposition 88
Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F et passant par A. Alors

$$\forall B \in \mathcal{F},\ \mathcal{F} = \{B + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in F\},$$

et en particulier la direction F de $\mathcal{F}$ ne dépend pas du point A.

Preuve — On a une bijection

$$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F},\ A + \overrightarrow{u} \mapsto A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{u} = B + \overrightarrow{u}.$$

Ceci montre que l'espace vectoriel F est uniquement déterminée par $\mathcal{F}$. Ceci justifie la définition : F est **la** direction de $\mathcal{F}$. □

Définition 89
Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de direction F, on dit que $\mathcal{F}$ est de dimension $\dim F$.

Remarque 90 — *On dira qu'un sous-espace affine de dimension 1 est une droite affine, un espace de dimension 2 est un plan affine et un sous-espace de dimension $n-1$ dans E de dimension n est un hyperplan affine.*

2.3.2 Exemples

§ *1. Hyperplans affines* Soit $n \geq 2$ un entier et α_1, ..., α_n et β des réels non tous nuls. L'ensemble $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ défini par

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta\}$$

est un hyperplan affine passant par un point M à déterminer : si $\alpha_1 \neq 0$, on peut prendre $M = (\frac{\beta}{\alpha_1}, 0 \cdots, 0)$ et d'hyperplan vectoriel

$$H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

L'espace vectoriel H est de dimension $n-1$: on suppose par exemple $\alpha_1 \neq 0$ et alors la famille

$$\big((-\alpha_2, \alpha_1, 0 \cdots, 0), \cdots, (-\alpha_n, 0, \cdots, 0, \alpha_1)\big)$$

est une famille de $n-1$ vecteur. On vérifie immédiatement qu'elle est libre. Donc $\dim H \geq n-1$. Mais $H \neq \mathbb{R}^n$, car $(1, 0 \cdots, 0) \notin H$, donc $\dim H \leq n-1$. On déduit que $\dim H = n-1$ et que

$$\big((-\alpha_2, \alpha_1, 0 \cdots, 0), \cdots, (-\alpha_n, 0, \cdots, 0, \alpha_1)\big)$$

est une base de H.

§ *2. Équations différentielles* On cherche l'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions f telles que $f' = af + b$ avec $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note S l'ensemble des fonctions qui vérifient $y' = ay$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de direction S :

$$\mathcal{S} = \varphi + S$$

avec φ une solution particulière.

Exemple 91 — *On cherche les fonctions telles que* $f' + \dfrac{t}{1+t^2} f = \dfrac{1+2t^2}{1+t^2}$.
Une solution particulière est la fonction $f(t) = t$. On cherche maintenant toutes les fonctions f telles que $f' + \dfrac{t}{1+t^2} f = 0$. On remarque que $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$, donc

$$f' + \frac{t}{1+t^2} f = 0 \iff \left(f' + \frac{t}{1+t^2} f\right) e^{1/2\ln(1+t^2)} = 0 \iff \left(f e^{1/2\ln(1+t^2)}\right)' = \big(f\sqrt{1+t^2}\big)' = 0$$

On en déduit que $f = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. C'est donc une droite vectorielle et $\mathcal{S}$ est unr droite affine : $\mathcal{S} = \{\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}} + t,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

§ *3. Suites définies par une récurrence double*

PROPOSITION 92
Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle équation caractéristique de la suite l'équation :

$$(*) : X^2 - aX - b = 0.$$

Alors il existe des réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. *$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$, si $(*)$ admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2*
2. *$u_n = A\lambda^n + Bn\lambda^n$ si $(*)$ admet une racine double λ*
3. *$u_n = A\rho^n \cos n\theta + B\rho^n \sin n\theta$ sinon $(*)$ admet deux racines complexes distinctes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$.*

Les constantes A et B se déterminent en fonction de u_0 et u_1.

Preuve — On note F, l'ensemble des suites y telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+2} = ay_{n+1} + by_n.$$

Soit les suites v et w définies par récurrence par $v_0 = w_1 = 1$, $v_1 = w_0 = 0$ et $v, w \in F$. On vérifie par récurrence que toute suite $y \in F$ s'écrit $y_n = y_0 v_n + y_1 w_n$ et que toute suite de cette forme appartient à F.
On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de base (v, w) donc de dimension 2.
Pour conclure, il suffit de montrer que les suites s et t forment une base où

1. $s = (\lambda_1)^n$ et $t = (\lambda_2)^n$;
2. $s = (\lambda)^n$ et $t = (n\lambda)^n$;
3. $s = (\rho^n \cos n\theta)$ et $t = (\rho^n \sin n\theta)$.

En fait, si λ racine de l'équation caractéristique, alors $(\lambda^n) \in F$: $a\lambda^{n+1} + b\lambda^n = \lambda^{n+2}$.
Et ceci marche encore si on considère $\lambda = \rho e^{i\theta}$ et $\overline{\lambda} \neq \lambda$ complexes non réels, et alors les parties réelle et imaginaire de (λ^n) vérifient encore la condition car

$$\operatorname{Re} \lambda^n = \frac{\lambda^n + \overline{\lambda}^n}{2} \text{ et } \operatorname{Im} \lambda = \frac{\lambda^n - \overline{\lambda}^n}{2i}.$$

Donc $(\lambda^n) = (\cos n\theta) + i(\sin n\theta)$ et $(\lambda^n) = (\cos n\theta) + i(\sin n\theta)$ Reste le cas λ racine double :

$$a(n+1)\lambda^{n+1} + bn\lambda^n - (n+2)\lambda^{n+2} = 0 \iff a\lambda - 2\lambda^2 = 0,$$

la dernière égalité résulte de $\lambda = a/2$, car λ racine double.
Il reste à prouver que la famille (s, t) est libre : on vérifie immédiatement que dans les trois cas $(\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix})$ est libre (ici, on utilise que 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique).
Ceci se généralise aux suites définies par une récurrence d'ordre $r \geq 3$. □

EXEMPLE 93 —

1. *Si $3u_n = 7u_{n-1} - 2u_{n-2}$ avec $u_0 = -1$ et $u_1 = 3$, alors $u_n = 2^{n+1} - (\frac{1}{3})^{n-1}$.*
2. *Si $u_n = -u_{n-1} - u_{n-2}$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, alors $u_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}$.*
3. *Si $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$ avec $u_0 = -1$ et $u_1 = 0$, alors $u_n = -2^n + n2^n$.*

PROPOSITION 94
Soit a, b et c sont des réels, $b \neq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c.$$

Alors u peut s'écrire $u = s + v$ où (s_n) est une suite particulière vérifiant la relation ci-dessus et F est l'espace vectoriel de la proposition précédente.

Preuve — On vérifie que si une suite s vérifie la relation de récurrence double ci-dessus, alors la suite $v = u - s$ vérifie la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n.$$

Ce qui termine la preuve. □

EXEMPLE 95 — *Soit (u_n), la suite définie par $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n + 3$ et $u_0 = u_1 = 1$. Calculer u_n en fonction de n.*
Pour cela, on cherche d'abord une suite particulière (s_n) vérifiant la relation $s_{n+2} = -s_{n+1} + 2s_n + 3$ sans conditions sur s_0 et s_1.
Il est normal de se demander si une suite constante $s_n = l$ ne ferait pas l'affaire, mais $l = -l + 2l + 3$ n'a pas de solution. On cherche alors (s_n) du type $s_n = ln$, et (s_n) est solution particulière pour $l = 1$.
Puis on résout la partie homogène : une suite (v_n) telle que

$$v_{n+2} = -v_{n+1} + 2v_n$$

s'écrit $v_n = A(1)^n + B(-2)^n$.
Enfin, la suite (u_n) se met sous la forme $u_n = s_n + v_n$ et on trouve A et B en vérifiant la relation pour $n = 0$ et $n = 1$: $A + B = 1$ et $1 + A - 2B = 1$, d'où $A = \frac{2}{3}$ et $B = \frac{1}{3}$. On a donc

$$u_n = n + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n.$$

2.3.3 Espaces affines et géométrie

§ *1. Intersection*

PROPOSITION 96
L'intersection de deux sous-espaces affines, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$ où F et G sont les directions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Preuve — Supposons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors il existe $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = A + G$. Donc $A + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \in F \cap G$, ce que nous voulions. □

REMARQUE 97 — *En particulier, pour étudier l'intersection de deux sous-espaces affines, il suffit de trouver un point de l'intersection, puis se ramenenr à l'étude de $E \cap F$ (dont on peut calculer la dimension.*

EXEMPLE 98 — *L'intersection de deux plans affines $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ dans $\mathbb{R}^3$ est soit l'ensemble vide, soit une droite, soit le plan lui-même, puisque $\dim P_1 \cap P_2$ est soit une droite, soit un plan (vectoriel).*

§ *2. Parallélisme*

DÉFINITION 99
Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux sous-espaces affines de direction F_1 et F_2.

1. *On dit que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont parallèles si $F_1 = F_2$.*
2. *On dit que $\mathcal{F}_1$ est parallèle à $\mathcal{F}_2$, si $F_1 \subset F_2$.*

EXEMPLE 100 — *Dans $\mathbb{R}^3$, les plans $P_1 : 2x + 3y + z = 1$ et $P_2 = 2x + 3y + z = 3$ sont parallèles.*