北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Géométrie 2

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

28 février 2020

Table des matières

Chapitre 1 Espaces vectoriels

Table des matières du chapitre

Dans cette partie on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps. Le plus souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais on peut aussi avoir $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier.

1.1 Définitions - Premières propriétés

1.1.1 Défintions - Exemples

Définition 1
Un triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$-esopace vectoriel \域$\mathbb{K}$上的线性空间 / 向量空间\ *si*

1. *E muni de la loi interne : $(x, y) \mapsto x + y$, est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0 ou $\overrightarrow{0}$;*
2. *E est muni de la loi externe $(\lambda, x) \mapsto \lambda.x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E telle que pour tous x, $y \in E$ et tous λ, $\mu \in \mathbb{K}$,*
   (a) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$.
   (b) $\lambda(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.
   (c) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
   (d) $1.x = x$.

Les éléments de E s'appellent vecteurs \向量\ *et les éléments de $\mathbb{K}$ les scalaires* \标量\.

Remarque 2 —

1. *Si E est un ensemble, une loi de composition interne est une application $E \times E \to E$. La loi . est une application $\mathbb{K} \times E \to E$, ce n'est pas une loi interne ; on dit que c'est une loi externe.*
2. *Comme pour les anneaux, on notera toujours les lois + et . et le plus souvent on oubliera même de mettre le point : $2.\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{u}$.*
3. *On écrira souvent E est un espace vectoriel sans préciser le corps $\mathbb{K}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.*

Exemple 3 —

1. *Un espace vectoriel n'est jamais vide, car il contient au moins $\overrightarrow{0}$. Et $E = \{\overrightarrow{0}\}$ est un espace vectoriel pour n'importe quel corps de scalaires $\mathbb{K}$. L'addition et la multiplication par un scalaire sont uniquement déterminés !*

2. L'espace $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel où un vecteur $\overrightarrow{u}$ est défini par ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La somme et le produit par un scalaire sont définis par :

$$\forall \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix},\ \lambda \,.\, \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont vérifiés.

3. De la même manière, l'espace $\mathbb{K}^2$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où un vecteur $\overrightarrow{u}$ est défini par ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La somme et le produit par un scalaire sont définis par :

$$\forall \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix},\ \lambda \,.\, \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont encore vérifiés.

4. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec

$$\begin{cases} \forall \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, & \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \lambda . \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Tous les axiomes d'un espace vectoriel sont encore vérifiés.

1.1.2 Premières propriétés

Proposition 4
Dans un espace vectoriel, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$:

1. $\lambda . \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \iff \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$;
2. $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$.

Preuve — On a par exemple $\lambda . \overrightarrow{0} = \lambda . (\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \lambda . \overrightarrow{0} + \lambda \overrightarrow{0}$ donc $\lambda . \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. De plus, si $\lambda . \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ et $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \lambda . \overrightarrow{x} = 1 . \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. □

Définition 5
Si A et B sont des parties de E, on pose :

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\},$$
$$\lambda . A = \{\lambda . a \mid a \in A\},$$
$$\mathbb{K} . a = \{\lambda . a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Exemple 6 — *Dans $\mathbb{K}^2$, on pose $A = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathbb{K}^2 = A + B$.*

Remarque 7 — *Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors c'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais ils n'ont pas les mêmes propriétés. Par exemple, $E = \mathbb{C}.1 = \mathbb{R}.1 + \mathbb{R}.i$. La "droite complexe" représente un plan en tant qu'espace vectoriel. Nous préciserons ce phénomène dans la suite du cours.*
Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors si $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ est un sous-corps, E est aussi un $\mathbb{K}'$-espace vectoriel.
Par exemple $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : $\mathbb{R} = \mathbb{R}.1$. C'est donc un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, mais $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}.1$.

EXEMPLE 8 — *On verra que $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n... mais il existe aussi des epsaces vectoriels de dimension infinie et ils sont très courants. Par exemple $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{K}$. On définit l'addition et la multiplication par un scalaire :*

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

REMARQUE 9 — *Montrer qu'un triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel. Comme dans le cas des groupes, des anneaux ou des corps, on va le plus souvent montrer que le triplet est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu : c'est le paragraphe suivant. mais avant cela, nous avons besoin de connaître des espaces de références. La proposition ci-dessous nous donne deux types très utiles.*

PROPOSITION 10

1. *Si X est un ensemble non vide quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions $f : X \to E$. Alors $\big(\mathcal{F}(X, E), +, .\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les lois étant définies par*

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f + g : t \mapsto f(t) + g(t),\ \lambda.f : t \mapsto \lambda.f(t).$$

2. *Espace vectoriel produit \积空间\ : soit E_1, ..., E_n des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Le produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, c'est-à-dire l'ensemble des n-uplets $(x_1, \cdots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$, peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ en posant*

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n).$$

DÉFINITION 11
On appelle E l'espace vectoriel produit des espaces vectoriels E_1, ..., E_n.

EXEMPLE 12 —

1. *On obtient une autre justification du fait que l'espace des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. C'est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.*
2. *L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n}$.*

1.2 Sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 13
On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel \子空间\ si $F \neq \emptyset$ et si

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F, \lambda x + \mu y \in F.$$

PROPOSITION 14
Si F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$, alors $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. Vous pouvez faire la vérification sans problème. □

REMARQUE 15 — *Tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Pour montrer qu'un espace est un espace vectoriel, on montrera le plus souvent que c'est un sous-espace vectoriel d'un sous-espace plus grand.*

Espaces vectoriels de référence :

1. $\mathbb{K}^n$;
2. $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, les applications de $I \subset \mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.
3. $\mathcal{F}(X, E)$, où X est une partie non-vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

EXEMPLE 16 — *Prouver que les espaces suivants sont des espaces vectoriels :*

1. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est presque nulle si tous les termes de la suite sont nuls à partir d'un certain rang : il existe $N \in \mathbb{N}$ telle pour tout $n \geq N$, $u_n = 0$. On note $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des suites presque nulles de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
2. *Montrer que $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel où $k \in \mathbb{N}$ et I un intervalle non vide, non réduit à un point de $\mathbb{R}$.*

PROPOSITION 17
Toute intersection de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Preuve — Soit $x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i$ où les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E. Alors $\lambda x + \mu y \in F_i$ pour tout $i \in I$ et donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i\in I} F_i$. □

EXERCICE 18 —

1. *Montrer que les ensembles*
$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}),\ \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}),\ \mathcal{D}(I, \mathbb{R}),\ \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$$
où $k \in \mathbb{N}^*$ et où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.
2. *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?*
   — *les cercles d'équation* $x^2 + y^2 = 1$ *et* $(x-1)^2 + y^2 = 1$;
   — *les droites d'équation* $2x + 3y = 1$ *et* $2x + 3y = 0$.
3. *L'ensemble S_0 des fonctions d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivables et solutions de l'équation différentielle*
$$4\,y'' + 2\,y' + 3\,y = 0 \tag{E_0}$$
est-il un espace vectoriel ? Même question pour l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle
$$4\,y'' + 2\,y' + 3\,y = 1 \tag{E}$$

1.2.1 Combinaisons linéaires et parties génératrices

Si A une partie de E, on montre ici que le plus petit espace vectoriel contenant A est l'intersection des espaces vectoriels contenant E et c'est encore l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A.

§ *1. Combinaisons linéaires*

DÉFINITION 19
On dit que x est une combinaison linéaire \线性组合\ *de x_1, ..., x_n s'il existe λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que*
$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

PROPOSITION 20
Une partie $F \subset E$ d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel ssi F est non vide et F est stable par combinaison linéaire \对线性组合是封闭的\ *: pour tous x_1, ..., $x_n \in F$ et tous λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{K}$,*
$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in F.$$

Preuve — $\Leftarrow$: une récurrence simple montre que si x_1, ..., x_n appartiennent à un sous-espace vectoriel F, alors toute combinaison linéaire de ces éléments reste dans F.
$\Rightarrow$: immédiat. $\square$

DÉFINITION 21
Soit x_1, ..., $x_n \in E$. On note l'ensemble des combianisons linéaires de x_1, ..., x_n

$$\mathrm{vect}(x_1, \cdots, x_n) = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

EXEMPLE 22 —

1. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni de $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, soit $e_1(0,1,2)$ et $e_2(0,2,3)$. Alors $Vect(e_1, e_2)$ est le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2. On a $k = 2e_1 - e_2 \in \mathrm{vect}\,(e_1, e_2)$ et $j = e_1 - 2k = -3e_1 + 2e_2 \in \mathrm{vect}\,(e_1, e_2)$, donc $\mathrm{vect}\,(j, k) \subset \mathrm{vect}\,(e_1, e_2)$. Et réciproquement, $e_1, e_2 \in \mathrm{vect}\,(j, k)$, d'où $\mathrm{vect}\,(e_1, e_2) = \mathrm{vect}\,(j, k)$.*
2. *Soit $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$. On a*

$$P = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+2y\\-x+3y\end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

§ *2. Parties génératrices*

DÉFINITION 23

1. *Si A est une partie de E, on appelle sous-espace engendré par A l'intersection $\overline{A}$ des sous-espaces vectoriels contenant A.*
2. *Si F est un sous-espace vectoriel et si $\overline{A} = F$, on dit que que A est une partie génératrice de F.*

PROPOSITION 24
Le sous-espace $\overline{A}$ engendré par A est égal à l'ensemble $\widehat{A}$ des combinaisons linéaires de A.

Preuve — Comme $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel contenant A, il contient toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A, c'est-à-dire $\widehat{A}$: $A \subset \widehat{A} \subset \overline{A}$. Il suffit donc de montrer que $\widehat{A}$ est lui-même un sous-espace vectoriel : soit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_i$, avec $x_i, y_i \in A$ et $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu\beta_i y_i$ est bien une combinaison linéaire d'éléments de A et donc est dans $\widehat{A}$. $\widehat{A}$ est un sous-espace vectoriel contenant A, il est donc contenu dans $\overline{A}$. $\square$

REMARQUE 25 — *On a bien monré que $\widehat{A} = \overline{A}$ et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. En particluier, $Vect(x_1, \cdots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant x_1, ...,x_n.*

EXEMPLE 26 — *Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix}2x-y\\x+2y\\3x-2y\end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{K}^2 \right\} \subset \mathbb{K}^3$. Alors F est un sous-espace vectoriel car*

$$F = \{x\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$$

1.2.2 Somme d'espaces vectoriels

Corollaire 27
Soit F_1, ..., F_n des sous-espaces vectoriels de E. Alors l'ensemble

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mid \forall i \ x_i \in F_i \right\}$$

est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les F_i.

Remarque 28 —

1. *En particulier, $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$.*
2. *On a vect$(x_1, \cdots, x_n) = \overline{A}$ avec $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$, donc c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les x_i.*

Exemple 29 —

1. $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.
2. $\mathbb{R}^3 = \{(0, y, z)\ ,\ y, z \in \mathbb{R}\} + \{(x, y, 0)\ ,\ x, y \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathbb{R}[X] = \{(u_n) \in \mathbb{R}[X],\ u_0 = 0\} + \{P \in \mathbb{R}[X],\ u_1 = 0\}$.
   En effet, $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ avec $v_0 = 0$, $v_n = u_n$ si $n > 0$ et $w_0 = u_0$, $w_n = 0$, si $n > 0$.

1.3 Applications linéaires

1.3.1 Définitions et exemples

Définition 30
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et u une application de E dans F. On dit que

1. *u est linéaire si $\forall x, y \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$.*
2. *u est un endomorphisme (ou un opérateur) si $F = E$: $u : E \to E$.*
3. *u est un isomorphisme, si u est bijective.*
4. *u est un automorphisme, si u est un isomorphisme et $E = F$.*

Exemple 31 —

1. *Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ fixé, l'application $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$ est un automorphisme de E appelé homothétie de rapport λ.*
2. *$u : (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
3. *L'application $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais ce n'est pas un automorphisme (le noyau n'est pas nul).*

Proposition 32
Soit u un isomorphisme de E sur F, alors sa réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Preuve — Il faut vérifier que u^{-1} est linéaire : Soit y et y' dans F. Il existe x et x' dans E tels que $u(x) = y$ et $u(x') = y'$. Alors

$$u^{-1}(\lambda y + \mu y') = u^{-1}(\lambda u(x) + \mu u(x')) \overset{u \text{ lin.}}{=} u^{-1}(u(\lambda x + \mu x')) = \lambda x + \mu x' = \lambda u^{-1}(y) + \mu u^{-1}(y'),$$

et u^{-1} est bien linéaire. □

Remarque 33 — *Une application linéaire $u : E \to F$ est en particulier un morphisme du groupe $(E, +)$ dans le groupe $(F, +)$ et donc $u(0) = 0$ et u est injective ssi son noyau est réduit à 0.*

1.3.2 L'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(E,F)$

DÉFINITION 34
On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

PROPOSITION 35
L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ a une structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec les lois

$$\forall u,v \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (u+v)(x) = u(x)+v(x) \text{ et } (\lambda u)(x) = \lambda u(x).$$

Preuve — Il faut vérifier toutes les conditions, c'est long mais pas difficile, donc un bon exercice. □

PROPOSITION 36
Soit E, F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g\circ f$ est linéaire : $g\circ f \in \mathcal{L}(F,G)$.

Preuve — On calcule

$$(g\circ f)(\lambda x+\mu y) = g(f(\lambda x+\mu y)) \overset{f \text{ lin.}}{=} g(\lambda f(x)+\mu f(y)) \overset{g \text{ lin.}}{=} \lambda g(f(y))+\mu g(f(y)),$$

et $g\circ f$ est bien linéaire. □

EXEMPLE 37 — *L'application $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_n + nu_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme.*

1.4 Sommes directes

DÉFINITION 38
On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont en sommes directes si $F\cap G=\{0\}$ et note alors $F\oplus G$. De plus, si $E=F+G$, alors on dit que F et G sont supplémentaires :

$$E = F\oplus G \iff (E=F+G \text{ et } F\cap G=\{0\}).$$

PROPOSITION 39
Avec les notations précédentes $E=F\oplus G$ si et seulement si pour tout $x\in E$, il existe un unique couple $(x_F,x_G)\in F\times G$ tel que $x=x_F+x_G$.

Preuve — Si tout x dans E s'écrit de manière unique $x=x_F+x_G$, alors certainement $E=F+G$ et si $x\in F\cap G$, alors on peut choisir $(x_F,x_G)=(x,0)$ ou $(x_F,x_G)=(0,x)$ et l'unicité implique $x_F=x_G=0$, ce qui montre que $F\cap G=\{0\}$.
Et si $E=F\oplus G$, alors certainement il existe $(x_F,x_G)\in F\times G$, tel que $x=x_F+x_G$.

□

EXEMPLE 40 —

1. *Soit $D_1 = \mathbb{K}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $D_2=\mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. On a $\mathbb{K}^2 = D_1\oplus\mathbb{D}_2$ car*
   (a) *Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in D_1\cap D_2$, alors $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. On en déduit que $\lambda=\mu=2\mu$, donc $\lambda=\mu=0$ et $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.*
   (b) *Soit $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^2$. On cherche λ, $\mu\in\mathbb{K}$ tels que*
   $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu\\2\lambda+\mu\end{pmatrix}.$$
   On trouve $\lambda=y-x$ et $\mu=2x-y$. Donc $\overrightarrow{u}\in D_1+D_2$.
2. *On verra que deux droites vectorielles D_1 et D_2 distinctes dans le plan sont supplémentaires : $\mathbb{R}^2=D_1\oplus D_2$.*
   Dans $\mathbb{R}^3$, vous pouvez montrer que deux droites vectorielles distinctes sont en somme directe mais ne sont pas supplémentaires l'une de l'autre : on verra que l'on a besoin de rajouter une troisième droite D_3. On va définir la somme directe de 3 (ou plus) espaces $E=D_1\oplus D_2\oplus D_3$.

3. *Soit* $D = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ *et* $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. *Alors* $\mathbb{K}^3 = D \oplus P$ *car*

   (a) *Si* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in D \cap P$, *alors il existe* λ, μ, $\nu \in \mathbb{K}^3$ *tels que*

   $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

   La deuxième coordonnée donne $\mu = 0$, *puis la première donne* $\lambda = 0$ *et enfin* $\nu = 0$, *donc* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

   (b) *De plus, si* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, *on cherche* λ, μ *et* $\nu \in \mathbb{K}$, *tels que*

   $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu\\\mu\\\mu+\nu\end{pmatrix}.$$

   La seconde coordonnée donne $\nu = y$, *puis la première donne* $\lambda = x - y$ *et enfin* $\nu = z - y$.

   (c) *Soit* $D = \mathbb{K}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ *et* $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

   On vérifie que $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} \in D \cap P$, *donc* D *et* P *ne sont pas en somme directe.*

Théorème 41
Soit F_1, ..., F_n *des sous espaces vectoriels de* E *et* u *l'application linéaire surjective :*

$$F_1 \times \cdots \times F_n \to F = F_1 + \cdots + F_n,\ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto u(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u *est un isomorphisme d'espace vectoriels.*
2. *Tout* $x \in F$ *s'écrit de façon unique* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, *avec* $x_i \in F_i$.
3. $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ *entraîne* $x_i = 0$ *pour tout* i.
4. *Pour tout* i, $F_i \cap \sum_{i \neq j} F_j = \{0\}$.

Preuve — 2/ dit que u est bijective et 3/ qu'elle est injective donc bijective puisque u est toujours surjective. On en déduit donc que 1/, 2/ et 3/ sont équivalentes.
3/ $\Rightarrow$ 4/ s'il existe $x_i \in F_i \cap \sum_{i\neq j} F_j$, alors $x_i = \sum_{i \neq j} x_j$, donc $0 = x_i - \sum_{i\neq j} x_j$, et d'après le 3/ on en déduit que $x_i = x_j = 0$. Donc 4/ est vérifiée.
4/ $\Rightarrow$ 3/ Supposons $\sum x_i = 0$. S'il existe un i tel que $x_i \neq 0$ alors $x_i = -\sum_{i\neq j} x_j \in F_i \cap \sum_{i \neq j} F_j$, ce qui contredit 4/. $\square$

Définition 42
Lorsque les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on dit que la somme des F_i *est directe ou que* F *est la somme directe des* F_i. *On écrit*

$$F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \quad \text{où} \quad F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n.$$

REMARQUE 43 —

1. *On a* $\mathbb{K}^3 = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{K}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{K}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, *car tout vecteur* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ *s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs :*
$$\overrightarrow{u} = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$
2. *D'après 3/* $F = F_1 \oplus F_2 \cdots \oplus F_n$ *si et seulement si tout vecteur* $x \in F$ *se décompose de manière unique dans* F_1, ..., F_n : $x = x_1 + \cdots + x_n$. *On en déduit par récurrence que c'est équivalent à montrer par exemple (l'ordre étant indifférent)*
$$\Big(\cdots\big((F_1 \oplus F_2) \oplus F_3\big) \oplus \cdots \oplus F_{n-1}\Big) \oplus F_n.$$
3. *Montrez que* $D_1 = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $D_2 = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ *et* $D_3 = \mathbb{K}.\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ *sont en somme directe. On vérifie que* $D_1 \cap D_2 = \{0\}$, *puis si* $u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (D_1 \oplus D_2) \cap D_3$, *alors il existe* λ, μ *et* $\nu \in \mathbb{K}$ *tels que*
$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = 3\mu + 2\nu & (a)\\ 0 = 2\mu + \nu & (b)\\ \lambda = \mu + 2\nu & (c)\end{cases}.$$
De $(a) - (c)$ *on trouve* $\mu = 0$, *la seconde coordonée donne* $\nu = 0$ *et finalement* $\lambda = 0$. *Ce qui montre bien que* $D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$. *On a en fait* $\mathbb{K}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$. *Vous pouvez le vérifier ou attendre la partie sur la dimension d'un espace vectoriel.*
4. *Mais si pour montrer que* F_1 *et* F_2 *sont en somme directe il suffit de motrer que* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, *ce n'est plus vrai pour* $n \geq 3$:
$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\},\ i \neq j\ F_i \cap F_j = \{0\} \not\Rightarrow F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$$
comme le montre l'exemple dans $\mathbb{R}^2$: $F_1 = \langle i \rangle$, $F_2 = \langle j \rangle$ *et* $F_3 = \langle i + j \rangle$.
5. *Nous admettrons qu'un sous-espace* $F \subset E$ *admet toujours un supplémentaire. L'exemple ci-dessus montre qu'un supplémentaire n'est pas unique.*
Par contre, on peut montrer que deux supplémentaires à un même espace sont toujours isomorphes.

1.5 Familles libres, familles génératrices, bases

1.5.1 Familles libres

§ *1. Définition*

DÉFINITION 44

1. *Une famille de vecteurs* $(e_1, \cdots, e_m)$ *est libre si elle vérifie :*
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i = 0 \text{ si et seulement si } \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i.$$
On dit aussi que les vecteurs x_1, ..., x_n *sont linéairement indépendants* \线性无关\.
2. *Une famille de vecteurs* $(e_i)_{i \in I}$ *non nécessairement finie est libre si toute sous famille finie* $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_m})$ *est libre. On dit aussi que les vecteurs* e_i *sont linéairement indépendants.*

3. *Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée, c'est-à-dire si et seulement si il existe* $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_m})$ *une sous-famille et* λ_1, ..., λ_m **non tous nuls** *tels que*

$$\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_m e_{i_m} = 0,$$

et on dit alors que les vecteurs e_i *sont linéairement dépendants* \线性相关\.

EXEMPLE 45 —

1. *Une famille de deux vecteurs* (e_1, e_2) *est liée si et seulement si* e_1 *et* e_2 *sont colinéaires* \共线\.
2. *Une famille de trois vecteurs* (e_1, e_2, e_3) *dans* $\mathbb{R}^3$ *est libre si et seulement si ils ne sont pas coplanaires (leur déterminant est non nul).*
3. *Attention* $(1, i)$ *est libre dans* $\mathbb{R}$ *mais est liée dans* $\mathbb{C}$.

EXEMPLE 46 —

1. *Dans* $\mathbb{K}^n$, *la famille* $\big((1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)\big)$ *est libre.*
2. *Dans* $\mathbb{K}[X]$, *on pose* $X^0 = (1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $X^k = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{k}, 1, 0 \cdots)$. *La famille* $(X^0, X^1, \cdots, X^n, \cdots)$ *est libre.*
3. *Si* α_1, ..., α_n *est une suite de nombres strictement décroissante, alors* $(e^{\alpha_1 x}, \cdots, e^{\alpha_n x})$ *est libre : procéder par récurrence et supposer une relation de dépendance entre* m *vecteurs multiplier par un* $e^{-\alpha_i x}$, *dériver et en déduire une relation de dépendance entre* $m-1$ *de dépendance entre* $m-1$ *vecteurs. Conclure.*
4. *La famille* $(e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$ *est libre.*
5. *Une sous-famille d'une famille libre est libre.*

§ 2. *Caractérisation*

PROPOSITION 47
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ *une famille de vecteurs telle que* $e_1 \neq 0$ *et pour tout* $2 \leq i \leq n$, $e_i \notin \operatorname{vect}(e_1, \cdots, e_{i-1})$, *alors la famille est libre.*

Preuve — On procède par récurrence sur n, pour $n = 1$ la propriété est évidente. Pour $n \geq 2$, si on a relation de dépendance $\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n e_n = 0$, alors $\lambda_n = 0$ car sinon

$$e_n = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_{n-1} e_{n-1}) \in \operatorname{vect}(e_1, \cdots, e_{n-1}),$$

ce qui contredit les hypothèses, et donc on a une relation de dépendance entre e_1, ..., e_{n-1}, et comme par récurrence cette famille est libre, on en déduit que les λ_i sont nuls pour tout i et la famille est libre. □

PROPOSITION 48
Soit F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *en somme directe,* $(x_1, \cdots, x_n)$ *une famille libre de* F *et* $(y_1, \cdots, y_m)$ *une famille libre de* G. *Alors* $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ *est une famille libre de* $F \oplus G$.

Preuve — Supposns $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m = 0$, alors

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = -(\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m)$$

mais ce vecteur appartient à $F \cap G$, or ces deux espaces sont en somme directe, donc c'est le vecteur nul, et tous les α_i et les β_i sont nuls puisque les familles (x_i) et (y_i) sont libres, ce qui permet de conclure. □

1.5.2 Familles génératrices

DÉFINITION 49
Soit $(x_i)_{i \in I}$ *une famille de vecteurs de* E. *On dit que* $(x_i)_{i \in I}$ *est une famille génératrice de* E *si* $\operatorname{vect}(x_i,\ i \in I) = E$.

Exemple 50 —

1. *La famille* $\big((1,0\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)\big)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{K}$.
2. X^0, ..., X^n *engendrent* $\mathbb{K}_n[X]=\{(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[X]\mid\forall k\geq n+1,\ u_k=0\}$, *l'ensemble des suites dont les termes sont tous nuls à partir du rang* $n+1$.
3. $(X^0,\cdots,X^n,\cdots)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}[X]$ *(il n'existe pas de famille génératrice finie de* $\mathbb{K}[X]$ *!).*
4. *La famille* (f_1,f_2) *de vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ *avec* $f_1(1,1)$ *et* $f_2(1,-1)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 51
Soit F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *et* $(x_1,\cdots,x_n)$ *une famille génératrice de* F *et* $(y_1,\cdots,y_m)$ *une famille génératrice de* G. *Alors* $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$ *est une famille génératrice de* $F+G$.

Preuve — Tout élément $z\in F+G$ s'écrit $z=x_F+y_G$ avec $x_F\in F$ et $y_G\in G$, et par hypothèse $x_F=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$ et $y_G=\mu_1y_1+\cdots+\mu_my_m$. Donc

$$z=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n+\mu_1y_1+\cdots+\mu_my_m,$$

et $z\in\operatorname{vect}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$ et la famille est bien génératrice. □

1.5.3 Bases

§ *1. Définitions*

Définition 52
Une base \基\ *d'un espace vectoriel* E *est une famille* $(e_i)_{i\in I}$ *de vecteurs de* E *qui est à la fois libre et génératrice.*

Exemple 53 —

1. $(1,i)$ *est une base de* $\mathbb{C}$ *comme* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
2. (f_1,f_2,f_3) *avec* $f_1(1,1,0)$, $f_2(1,0,1)$ *et* $f_3(0,1,0)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
3. *On appelle base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *la base* $(e_1,\cdots,e_n)$, *où* e_i *est le vecteur* $(0\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ *le* 1 *étant en* i*-ème position.*
4. *Deux vecteurs non colinéaires dans le plan ou trois vecteurs non coplanaires dans* $\mathbb{R}^3$ *forment une base !*

Théorème 54
Tout $\mathbb{K}$*-espace vectorieln* E, $E\neq\{0\}$ *admet une base (mais elle n'est pas nécessairement finie !)*

Définition 55
Soit E *un espace vectoriel qui admet une base finie* $(e_1,\cdots,e_n)$. *On appelle coordonnées* \坐标\ *du vecteur* $u\in E$ *dans cette base l'unique* n*-uplet* $(x_1,\cdots,x_n)$ *tel que*

$$u=x_1e_1+\cdots+x_ne_n.$$

Remarque 56 — *L'existence vient du fait que la famille est génératrice, l'unicité du fait qu'elle est libre : supposons qu'il existe des autres coordonnées* $u=y_1e_1+\cdots+y_ne_n$ *et en prenant la différence* $(x_1-y_1)e_1+\cdots+(x_n-y_n)e_n=0$, *d'où* $x_i=y_i$ *pour tout* i.

§ *2. Caractérisation*

Proposition 57
Soit F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E, $(x_1,\cdots,x_n)$ *une base de* F *et* $(y_1,\cdots,y_m)$ *une base de* G. *Alors*

$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ est une base de $F+G$ ssi F et G sont en somme directe.

Preuve — Si $F \oplus G$, on a vu que la famille était libre et génératrice. D'autre part si $0 \neq a \in F \cap G$, alors x s'écrit dans la base des x_i et dans la base des y_i

$$a = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m$$

et a sécrit de deux manières avec des vecteurs de la famille $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$: ce n'est pas une base. □

Remarque 58 — *Pour montrer que $E = F \oplus G$, il suffit de trouver une base de F et une base de G et montrer qu'en les concaténant on obtient une base de E.*

Exemple 59 — *On a $\mathbb{R}^3$ est la somme directe du plan P d'équation $x+y+z=0$ et de la droite D engendrée par le vecteur $n(1,1,1)$. Une base de P est $e_1(1,-1,0)$ et $e_2(1,0,-1)$, donc (e_1, e_2, n) est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Proposition 60

Si E est engendré par une famille à n éléments $(e_1, \cdots, e_n)$, alors toute famille libre $(f_1, \cdots, f_m)$ a au plus n éléments (c'est-à-dire $m \leq n$).

Preuve — On procède par récurrence sur n. Le cas $n=1$ est évident.
Supposons $\mathcal{P}(n)$: "un espace vectoriel engendré par n éléments, alors toute famille libre a au plus n éléments" est vrai.
Montrons $\mathcal{P}(n+1)$: supposons que E est engendré par $n+1$ éléments et soit $(f_1, \cdots, f_m)$ une famille libre, on veut montrer que $m \leq n+1$.
Si pour tout i, $f_i \in \text{vect}(e_1, \cdots, e_n)$, alors $(f_1, \cdots, f_m)$ est une famille libre d'un espace engendré par n éléments et donc $m \leq n$.
Sinon, il existe i_0 tel que

$$f_{i_0} = \lambda_{i_0} e_{n+1} + \text{ une combinaison linéaire des } e_1, \ldots, e_n \text{ avec } \lambda_{i_0} \neq 0.$$

Mais pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$

$$f_i = \lambda_i e_{n+1} + \text{ une combinaison linéaire des } e_1, \ldots, e_n.$$

donc pour $i \neq i_0$, la famille des vecteurs $f_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} f_{i_0} \in \text{vect}(e_1, \cdots, e_n)$ est libre et dans un espace engendré par n vecteurs d'où par récurrence $m-1 \leq n$ et donc $m \leq n+1$ et la démonstration est terminée.
Remarquez que l'on a en fait appliqué la méthode du pivot de Gauss en choisissant la ligne i_0 pour éliminer le vecteur e_{n+1}. □

Corollaire 61

(Fondamental) Toute base d'un espace vectoriel engendré par n éléments a au plus n éléments.

Corollaire 62

(Très pratique) Toute famille libre à n éléments dans un espace E engendré par n éléments est une base.

Preuve — Soit une famille libre libre $(e_1, \cdots, e_n)$ libre.
Montrons que la famille est génératrice : soit $x \in E$, alors $(e_1, \cdots, e_n, x)$ est liée car a $n+1$ éléments et E engendré par n éléments : $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \lambda x = 0$ avec les λ_i non tous nuls. Mais si $\lambda = 0$, alors ceci contredit $(e_1, \cdots, e_n)$ libre, donc $\lambda \neq 0$, mais alors

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} e_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} e_n,$$

et x appartient bien à l'espace engendré par les e_i qui donc forment une famille génératrice, donc une base puisque libre. □

Exemple 63 — *$f_1(1,2,0)$, $f_2(1,0,3)$ et $f_3(0,1,0)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$ donc est une base (car $\mathbb{R}^3$ est engendré par 3 vecteurs !).*