



Mécanique & Vibrations Intégration en temps des équations du mouvement (Séance 1)

Patrick ROZYCKI, Pascal COSSON, Laurent GORNET

Ecole Centrale de Nantes



Plan du cours

- Introduction
- Principes généraux de l'intégration en temps des équations différentielles
- Schémas d'intégration adaptés aux systèmes différentiels d'ordre 1
- Schémas d'intégration adaptés aux systèmes différentiels d'ordre 2
- Equations différentielles non linéaires
- Prise en compte des équations de liaison

Unités consistantes en dynamique										Choix multiples ?	
	MASS	LENGTH	TIME	FORCE	STRESS	ENERGY	DENSITY	YOUNG'S	GRAVITY		
Choix :1	kg	m	s	N	Pa	J	7.83e+03	2.07e+11	15.65	9.806	$m s^{-2}$
	kg	cm	s	1.0e-02 N			7.83e-03	2.07e+09	1.56e+03	9.806e+02	
	kg	cm	ms	1.0e+04 N			7.83e-03	2.07e+03	1.56	9.806e-04	
	kg	cm	us	1.0e+10 N			7.83e-03	2.07e-03	1.56e-03	9.806e-10	
	kg	mm	ms	kN	GPa	kN-mm	7.83e-06	2.07e+02	15.65	9.806e-03	
	g	cm	s	dyne	dyne/cm ²	erg	7.83e+00	2.07e+12	1.56e+03	9.806e+02	$Kg m^{-3}$
	g	cm	us	1.0e+07 N	mbar	Ncm	7.83e+00	2.07e+00	1.56e-03	9.806e-10	
	g	mm	s	1.0e-06 N	Pa		7.83e-03	2.07e+11	1.56e+04	9.806e+03	
Choix :2	g	mm	ms	N	MPa	N-mm	7.83e-03	2.07e+05	15.65	9.806e-03	
	ton	mm	s	N	MPa	N-mm	7.83e-09	2.07e+05	1.56e+04	9.806e+03	$mm s^{-2}$
	lbf-s ² /in	in	s	lbf	psi	lbf-in	7.33e-04	3.00e+07	6.16e+02	386	
	slug	ft	s	lbf	psf	lbf-ft	1.52e+01	4.32e+09	51.33	32.17	MPa
	kgf-s ² /mmmm		s	kgf	kgf/mm ²	kgf-mm	7.98e-10	2.11e+04	1.56e+04	9.806e+03	
	kg	mm	s	mN	1.0e+03 Pa		7.83e-06	2.07e+08		9.806e+03	
	g	cm	ms	1.0e+1 N	1.0e+05 Pa		7.83e+00	2.07e+06		9.806e-04	

Cours n°1

Equations de Lagrange, Euler explicite, Euler implicite

Introduction

- L'évolution dans le temps de nombreux systèmes peut être modélisée,
 - ✓ par un système d'équations différentielles (linéaire ou non linéaire) en Mécanique des **solides indéformables**
 - ✓ ou par un système d'équations aux dérivées partielles en Mécanique des **solides déformables**. On utilise des modèles éléments finis pour obtenir un système d'équations différentielles (linéaires ou non-linéaires).

Mécanique des solides indéformables

- L'évolution dans le temps de nombreux systèmes de **Mécanique des solides indéformables** peut être modélisée par un système d'équations différentielles (linéaire ou non linéaire)
- Démarche de modélisation et recherche de la solution en **Dynamique des structures (indéformables)** :
 - Mise en équation à l'aide des **Equations de Lagrange**
=> système d'équations différentielles à résoudre
 - Recherche de la solution numérique du système d'équations différentielles avec une **méthode numérique d'intégration en temps**

Dynamique des Solides indéformables : systèmes discrets (1/5)

Mise en équations de systèmes mécaniques composés de solides indéformables

➔ Modèle défini par un nombre fini de variables

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

Misé en

➔ Mise en équations par P.F.D.

$$\{A(\Sigma / R_g)\} = \{\mathcal{T}_{F_{ext} \rightarrow \Sigma}\}$$

➔ Mise en équations par LAGRANGE

Dynamique des Solides indéformables : systèmes discrets (2/5)

$$\delta A = \delta \mathcal{T}$$

➔ δA travail des quantités d'accélération

$$\delta A = \sum_{i=1}^N A_i \delta x_i \quad \text{avec} \quad A_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial E_c}{\partial x_i}$$

➔ $\delta \mathcal{T}$ travail virtuel des efforts intérieurs et extérieurs au système

$$\delta \mathcal{T} = \delta W - \sum_{i=1}^N \frac{\partial E_p}{\partial x_i} \delta x_i$$

travail des efforts intérieurs et extérieurs ne dérivant pas d'un potentiel

Dynamique des Solides indéformables : systèmes discrets (3/5)

- équations du mouvement

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial E_c}{\partial x_i} + \frac{\partial E_p}{\partial x_i} = Q_i \quad i=1, \dots, N$$

avec $\delta W = \sum_{i=1}^N Q_i \delta x_i$

➔ autre écriture

Lagrangien $L = E_c - E_p$

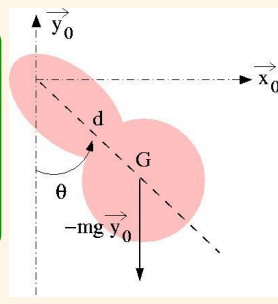
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad \left(\frac{\partial E_p}{\partial \dot{x}_i} = 0 \right)$$

Dynamique des Solides indéformables : systèmes discrets (4/5)

- Exemple du pendule simple Horloge



- $E_c = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2$
- $E_p = -mgd \cos \theta + Cte$
- $\delta W = 0$



$$I \ddot{\theta} + mgd \sin \theta = 0$$

Hypothèse des petits mouvements : $\theta \quad \dot{\theta} \quad \ddot{\theta} \ll 1$

➔ équations du mouvement linéarisées

$$I \ddot{\theta} + mgd \theta = 0$$

Horlogerie :

Pourquoi les montres indiquent toujours 10H10 dans les publicités :

La raison initiale est historique : **Louis XVI**, passionné d'**horlogerie**, est monté sur l'échafaud, avant de se faire décapiter, à **10h10**.

Pour lui rendre hommage, les horlogers présentaient les montres arrêtées à cette heure là.

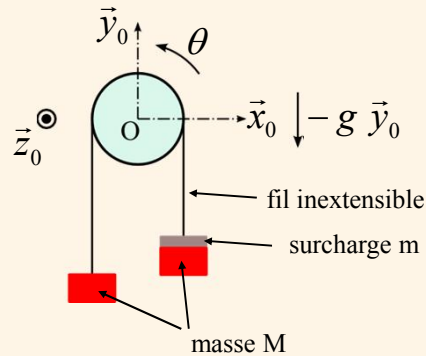


La tradition est conservée **10h10**
Pourquoi ?



Dynamique des Solides indéformables : systèmes discrets (5/5)

➤ Exemple de la machine d'ATWOOD



poulie parfaite de rayon R et de moment d'inertie I

- $E_c(\Sigma / R_0) = \frac{I + (2M + m)R^2}{2} \dot{\theta}^2$
- $E_p(\Sigma / R_0) = mg R \theta + Cte$
- $\delta W = 0$

➤ Ecrire l'équation de Lagrange

$$[I + (2M + m)R^2] \ddot{\theta} = -mg R \quad \Rightarrow$$

$$R \ddot{\theta} = \frac{-mg}{\frac{I}{R^2} + 2M + m}$$

Mécanique des solides déformables

- L'évolution dans le temps de nombreux systèmes de Mécanique des **solides déformables** peut être modélisée

✓ par un système d'équations différentielles (linéaire ou non linéaire)

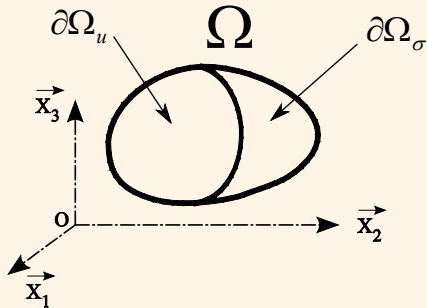
Démarche en **Dynamique des structures (déformables)** :

Mise en équation à l'aide de la **méthode des Eléments Finis**
 \Rightarrow système d'équations différentielles à résoudre

Recherche d'un solution en temps du système d'équations :
 Méthode de superposition modale (linéaire uniquement)
 ou **Méthode numérique par intégration en temps**

Modélisation des systèmes continus déformables

➤ Comportement élastique d'une structure élastique (HPP)



$u(x, t)$	champ de déplacement
$\varepsilon(u)$	champ de déformation
$\sigma(u)$	champ de contraintes
E	tenseur élasticité

✓ équations locales

$$\operatorname{div} \sigma(u) + F_v = \rho \ddot{u}$$

✓ lois de comportement linéaire

$$\sigma(u) = E : \varepsilon(u)$$

$$\text{avec } \varepsilon(u) = \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2}$$

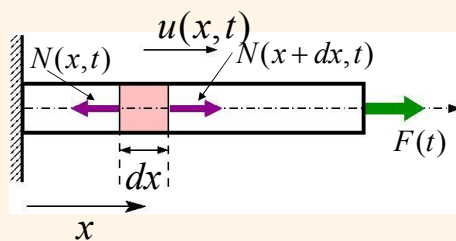
✓ conditions aux limites

$$u(x, t) = u_d(x, t) \quad x \in \partial\Omega_u$$

$$\sigma(u) \cdot n = T_d(x, t) \quad x \in \partial\Omega_\sigma$$

Modélisation des systèmes continus déformables

➤ exemple d'une barre en traction-compression



$u(x, t)$	déplacement d'une section droite
$N(x, t)$	effort normal
E	module d'YOUNG
ρ	masse volumique

✓ équations locales

$$\rho S \ddot{u} = N_{,x}(x, t)$$

✓ lois de comportement

$$N(x, t) = E S u_{,x}(x, t)$$

✓ conditions aux limites

$$u(0, t) = 0$$

$$N(\ell, t) = F(t)$$

✓ équations locales

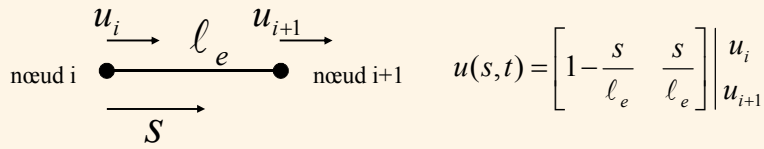
$$\rho \ddot{u} - E u_{,xx}(x, t) = 0$$

✓ conditions aux limites

$$u(0, t) = 0 \quad ES u_{,x}(\ell, t) = F(t)$$

Modélisation des systèmes continus déformables

➤ exemple d'une barre en traction-compression : discrétisation du modèle continu



assemblage

$$Ec_e = \frac{1}{2} [\dot{u}_i \quad \dot{u}_{i+1}] \rho S \ell_e \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} \longrightarrow Ec = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}$$

$$Ed_e = \frac{1}{2} [u_i \quad u_{i+1}] \frac{ES}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \longrightarrow Ed = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\}$$

$$\partial W = \{\partial q\}^T \{\Phi(t)\}$$

Solution par superposition modale ou intégration en temps

$$\boxed{[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{\Phi(t)\}} \quad \text{LAGRANGE}$$

Modélisation des systèmes continus déformables

➤ exemple d'une poutre en flexion : discrétisation du modèle continu

4 variables nodales ➔ approximation cubique

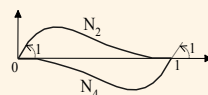
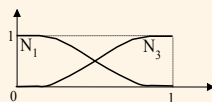
$$v(x,t) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle \begin{Bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Maths}$$

Identification nodale

$$v(x,t) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \begin{Bmatrix} v_i(t) \\ \theta_i(t) \\ v_j(t) \\ \theta_j(t) \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Physique}$$

Approximation nodale

$$\text{Fonctions d'interpolation} \quad \begin{cases} N_1(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3 \\ N_3(s) = 3s^2 - 2s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} N_2(s) = \ell(s - 2s^2 + s^3) \\ N_4(s) = \ell(-s^2 + s^3) \end{cases} \quad s = \frac{x}{\ell}$$



Modélisation des systèmes continus déformables

➤ exemple d'une poutre en flexion : discrétisation du modèle continu

$$2E_d = \int_0^{\ell_e} EI (v_{,xx})^2 dx = \int_0^{\ell_e} v_{,xx}^T EI v_{,xx} dx$$

Matrice raideur élémentaire associée à l'énergie de déformation élastique de flexion

$$v_{,xx} = \langle N_{,xx} \rangle \{U_e\}$$

$$2E_d = \{U_e\}^T \int_0^{\ell_e} \langle N_{,xx} \rangle^T EI \langle N_{,xx} \rangle dx \{U_e\}$$

$$\rightarrow [K_e] = \int_0^{\ell_e} \langle N_{,xx} \rangle^T EI \langle N_{,xx} \rangle dx$$

Matrice raideur élémentaire $[K_e] \{U_e\} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$

Modélisation des systèmes continus déformables

➤ exemple d'une poutre en flexion : discrétisation du modèle continu

$$2E_{c_e} = \int_0^{\ell_e} \rho S (v) ^2 dx$$

Matrice masse élémentaire associée à l'énergie de cinétique de flexion

$$v = \langle N \rangle \{U_e\} \quad m = \rho S \ell_e$$

$$2E_{c_e} = \{U_e\}^T \int_0^{\ell_e} \langle N \rangle^T \rho S \langle N \rangle dx \{U_e\}$$

$$E_{c_e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{v}_i & \dot{\theta}_i & \dot{v}_j & \dot{\theta}_j \end{bmatrix} \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ 22\ell & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 54 & 13\ell & 156 & -22\ell \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{v}_j \\ \dot{\theta}_j \end{Bmatrix}$$

Assemblage

$$E_c = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad E_d = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad \partial W = \{\partial q\}^T \{\Phi(t)\}$$

Solution par superposition modale ou intégration en temps

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{\Phi(t)\}$$

LAGRANGE

Dynamique des structures

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{\Phi(t)\}$$

Equation sans amortissement, solution par superposition modale :

$$\{q\} = \{q_0\} \quad \text{et} \quad \{\dot{q}\} = \{\dot{q}_0\} \quad \{q(t)\} = ?$$

Oscillations libres :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$$

Oscillateur à n degrés de liberté

$$\{q(t)\} = \Phi(t)\{x\}$$

Valeurs propres et vecteurs propres :

$$[[K] - \omega^2 [M]]\{x\} = 0$$

$$\det [[K] - \omega^2 [M]] = 0 \quad \text{Pulsations propres}$$

La réponse forcée harmonique : $\{\Phi(t)\} = \cos(\omega t)\{s\}$

Les résonances à éviter : $\omega = \omega_i$ Forme du mode $\{x\}_{\omega_i}$

Modélisation des Vibrations des systèmes continus :

Utiliser le code Eléments Finis Cast3M : www-cast3m.cea.fr

Modélisations : barre, poutre, plaque et tridimensionnelle

Solution statique

$$[K]\{q\} = \{\Phi(t_0)\}$$

Solution en dynamique

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{\Phi(t)\}$$

(matrices M, C K : Masse, amortissement et rigidité)

Solution en superposition modale (uniquement en linéaire ☺)

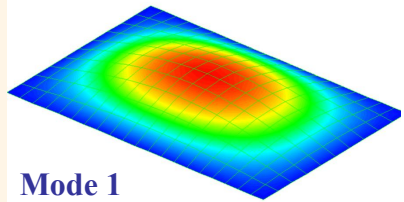
Solution avec un schéma numérique pour l'intégration en temps :

Newmarck, ... (en linéaire et non linéaire ☺)

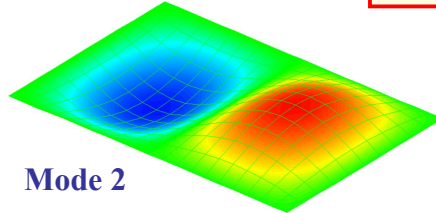
Vibrations libres :

Modèle Eléments Finis (type plaque)

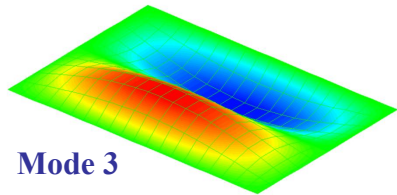
Valeurs propres ω_i et vecteurs propres (déformées modales) : $\{x\}_{\omega_i}$



Mode 1



Mode 2



Mode 3

Les solutions : ω_i et $\{x\}_{\omega_i}$ de

$$\det[[K] - \omega^2 [M]] = 0$$

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{x\} = 0$$

Solution en temps par superposition modale (en linéaire)

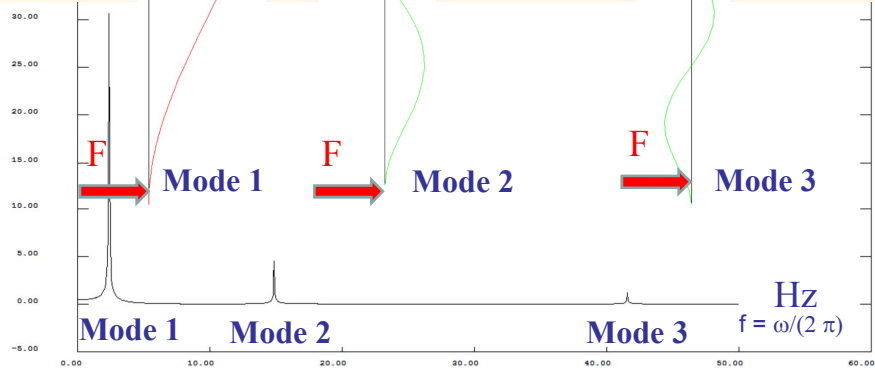
Recherche des modes par des vibrations forcées: $F = F \cos(\omega t)$

Modèle EF Poutre : Valeurs propres et vecteurs propres :

Déplacement sous la force

$$\omega = \omega_i$$

$$\{x\}_{\omega_i}$$



$$\det[[K] - \omega^2 [M]] = 0$$

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{x\} = 0$$

Equation de la Dynamique des espèces

➤ MALTHUS Thomas (1766 – 1834)

- L'évolution dans le temps de la population peut être modélisée
 - ✓ par une équation différentielle et par un système d'équations différentielles pour deux populations
 - ✓ Recherche d'une solution numérique avec une méthode numérique d'intégration en temps
 - ✓ Equation différentielle du premier ordre

Exemple traité avec Euler explicite, des difficultés numériques apparaissent en fonction du pas de temps retenu

Dynamique des populations (1/7)

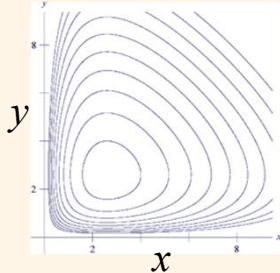
➤ MALTHUS Thomas (1766 – 1834)

Principe de base : dans un espace vaste réunissant toutes les conditions favorables à la vie, si il n'y a pas de pression du milieu et en absence de facteurs limitants (guerres, famines...), la population $N(t)$ d'une espèce varie de la façon suivante :

$$\frac{dN}{dt} = r N$$

r : taux intrinsèque d'accroissement naturel

➤ Système de deux espèces de type proie prédateur : équations de LOTKA-VOLTERRA



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) - Bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -Cy(t) + Dx(t)y(t) \end{cases}$$

Dynamique des populations (2/7)

➤ VERHULST Pierre-François (1804 – 1849)

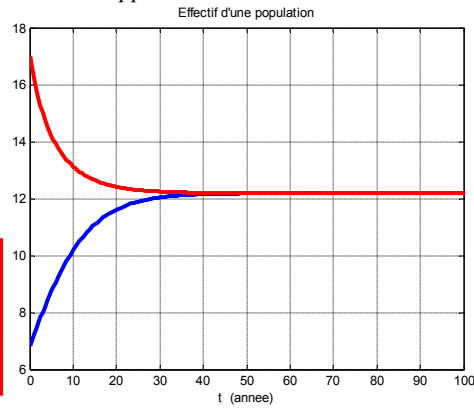
$$\frac{dN}{dt} = N(n(N) - m(N))$$

- $n(N)$ taux de natalité supposé être une fonction affine décroissante
- $m(N)$ taux de mortalité supposé être une fonction affine croissante

$$\frac{dN}{dt} = a N \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

- Résolution exacte

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1 \right) \times e^{-at}}$$



Dynamique des populations (3/7)

- Résolution itérative

- à l'instant $t_n = n \Delta t$

$$\begin{aligned} N(t_n) &= N_n \\ \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=t_n} &= \dot{N}_n \end{aligned}$$

- à l'instant $t_{n+1} = (n+1) \Delta t$

$$N_{n+1} = N_n + \dot{N}_n \Delta t$$

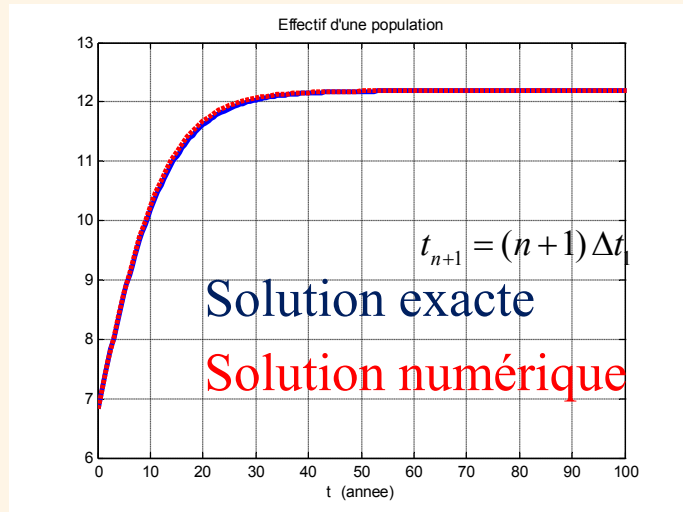
$$\frac{N_{n+1} - N_n}{\Delta t} = a N_n \left(1 - \frac{N_n}{K} \right)$$

Euler Explicite

soit : $v_{n+1} = (1 + a \Delta t) v_n (1 - v_n)$ (suite logistique)

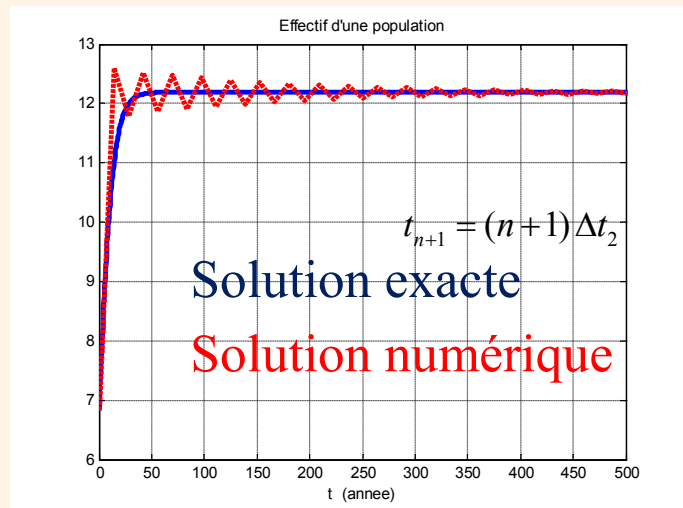
avec $v_n = \frac{a \Delta t N_n}{(1 + a \Delta t) K}$

Dynamique des populations (4/7)



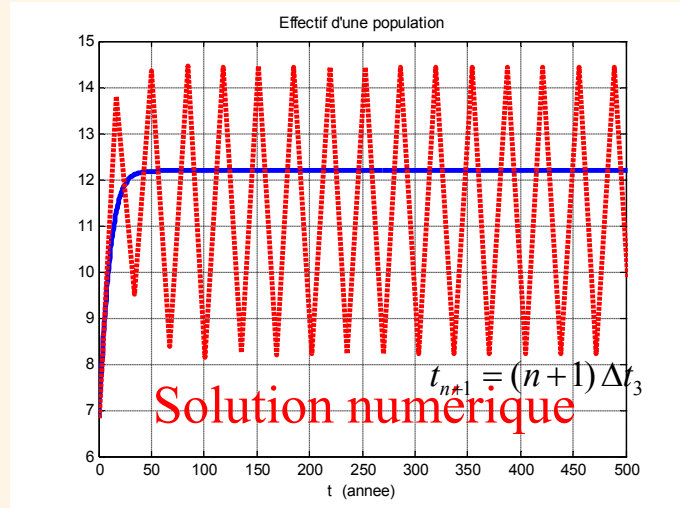
Solution numérique Stable
convergence vers la solution exacte sans oscillation

Dynamique des populations (5/7)



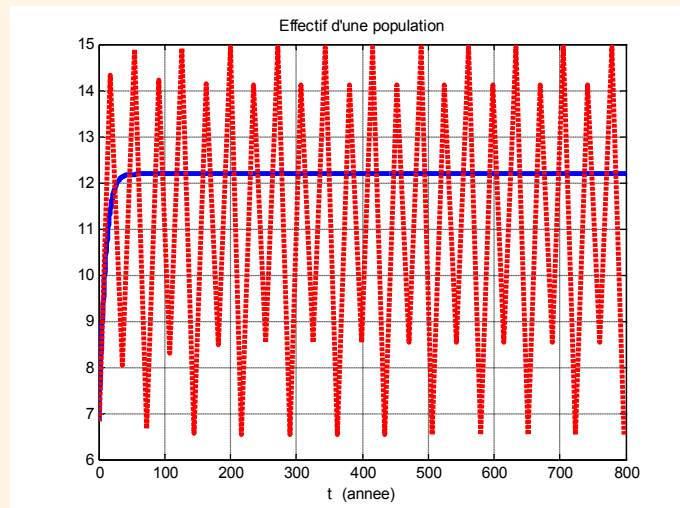
Solution numérique instable
convergence vers la solution exacte avec des oscillations

Dynamique des populations (6/7)



Oscillations entre deux valeurs

Dynamique des populations (7/7)



Oscillations entre quatre valeurs de la solution numérique

Dynamique des populations

➤ **Programmation avec Matlab** *Etudier le cours Matlab si nécessaire*

Programmer avec Matlab le modèle avec Euler Explicite :

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{\Delta t} = a N_n \left(1 - \frac{N_n}{K} \right) \quad \text{Euler Explicite}$$

Programmer avec Matlab le modèle avec Euler Implicite :

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{\Delta t} = a N_{n+1} \left(1 - \frac{N_{n+1}}{K} \right) \quad \text{Euler Implicite}$$

Comparer les résultats avec la solution analytique

Faire évoluer le pas de temps.

Que pensez-vous des résultats numériques ?

Quel est le pas de temps critique ?

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1 \right) \times e^{-at}}$$

Travaux dirigés : résolution numérique des équations du mouvement

Résumé du cours

Savoir utiliser une mise en équation par Lagrange :

Retrouver l'équation du mouvement du pendule simple

*Retrouver et rendre sur le serveur les principaux résultats éléments finis
barre et d'une poutre (matrice de rigidité et matrice de masse)*

Ouvrir le fichier : MecaNum_practice2019def.pdf

Lire l'introduction

Exercice 1 : traiter l'exercice Oscillateur conservatif à un degré de liberté

L'objectif est de programmer avec Matlab ou Scilab sur votre PC :

La solution analytique

La solution par Euler Explicite

La solution avec Euler implicite