Mécanique & Vibrations
Intégration en temps des équations du mouvement (séance 2)

Patrick ROZYCKI, Pascal COSSON, Laurent GORNET
Ecole Centrale de Nantes

Cours n°2
Dynamique des structures

Euler explicite, Euler implicite
RUNGE KUTTA, NEWMARK

Principes généraux de l'intégration en temps des équations différentielles

✓ Dans de nombreuses situations, les équations régissant l'évolution du système considéré se traduisent par une équation différentielle reliant un vecteur paramètre et ses dérivées par rapport au temps

exemple en Dynamique des Solides pour une structure (éventuellement élastique)

$$\boxed{[M(q(t))]\{\ddot{q}(t)\} + f(q(t), \dot{q}(t), t) = 0}$$

➢ résolution discrète à des instants donnés $t_0, \ldots, t_i, \ldots, t_N$

à l'instant t_j on note
$$\begin{cases} q(t_j) & = & q_j \\ \dot{q}(t_j) & = & \dot{q}_j \\ \ddot{q}(t_j) & = & \ddot{q}_j \end{cases}$$

$$\boxed{\dot{q}(t_j) = \lim_{h \to 0} \frac{q(t_j) - q(t_j \pm h)}{\pm h}} \qquad \boxed{\ddot{q}(t_j) = \lim_{h \to 0} \frac{\dot{q}(t_j) - \dot{q}(t_j \pm h)}{\pm h}}$$

$$\boxed{[M(q_j)]\{\ddot{q}_j\} + f(q_j, \dot{q}_j, t_j) \quad = 0}$$

Principes généraux de l'intégration en temps des équations différentielles

équation du mouvement à l'instant t_j $\boxed{[M(q_j)]\{\ddot{q}_j\} + f(q_j, \dot{q}_j, t_j) \quad = 0}$

➢ transformer le système d'équations différentielles en remplaçant les expressions

$$\boxed{\dot{q}(t_j) = \lim_{h \to 0} \frac{q(t_j) - q(t_j \pm h)}{\pm h}} \qquad \boxed{\ddot{q}(t_j) = \lim_{h \to 0} \frac{\dot{q}(t_j) - \dot{q}(t_j \pm h)}{\pm h}}$$

par des différences finies, exprimant des relations entre (q_j), $(\dot{q}_j)$ et $(\ddot{q}_j)$

équations différentielles $\rightarrow$ équations algébriques

Principes généraux de l'intégration en temps des équations différentielles

- dans le cadre de la Dynamique des Structures, deux grandes familles de méthodes pour intégrer en temps les équations du mouvement
  - ✓ les méthodes qui vont transformer l'équation différentielle du second ordre en un système équations différentielles du premier ordre

$$\boxed{\left\{q^{(n)}(t)\right\}+f\left(\left\{q(t)\right\},\left\{q^{(1)}(t)\right\},\cdots,\left\{q^{(n-1)}(t)\right\},t\right)=0}$$

$$\{U\}=\begin{vmatrix} q(t) \\ q^{(1)}(t) \\ \vdots \\ q^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \qquad \left\{U^{(1)}\right\}=\begin{vmatrix} q^{(1)}(t) \\ q^{(2)}(t) \\ \vdots \\ q^{(n)}(t) \end{vmatrix}$$

$\left\{U(t)\right\}$ vecteur d'état du système

$$\boxed{\left\{U^{(1)}(t)\right\}+F\left(\left\{U(t)\right\},t\right)=0}$$

  - ✓ les méthodes qui vont permettre de résoudre directement une équation différentielle du second ordre de la forme

$$\left[M\left(q(t)\right)\right]\left\{\ddot{q}(t)\right\}+f\left(q(t),\dot{q}(t),t\right)=0$$

Schémas d'intégration adaptés aux systèmes différentiels d'ordre 1

notations : $\{U(t)\}=\begin{vmatrix} q(t) \\ q^{(1)}(t) \\ \vdots \\ q^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$ $\qquad \left\{U(t_j)\right\}=U_j \qquad \left\{\dot{U}(t_j)\right\}=\dot{U}_j$

vecteur d'état du système

forme générale : $\boxed{U_{j+1}=\sum_{k=1}^{j+1}\alpha_k\,U_{j+1-k}-\Delta t\sum_{k=0}^{j+1}\beta_k\,\dot{U}_{j+1-k}}$ avec $\Delta t=t_{j+1}-t_j$

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \vdots \\ q^{(n-1)}{}_{j+1} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{j+1}\alpha_k\begin{vmatrix} q_{j+1-k} \\ \vdots \\ q^{(n-1)}{}_{j+1-k} \end{vmatrix}-\Delta t\,\beta_0\begin{vmatrix} q^{(1)}{}_{j+1} \\ \vdots \\ q^{(n)}{}_{j+1} \end{vmatrix}-\Delta t\sum_{k=1}^{j+1}\beta_k\begin{vmatrix} q^{(1)}{}_{j+1-k} \\ \vdots \\ q^{(n)}{}_{j+1-k} \end{vmatrix}$$

- ✓ $\beta_0=0$: schémas explicites
- ✓ $\beta_0\neq 0$: schémas implicites

Schémas d'intégration adaptés aux systèmes différentiels d'ordre 1

forme générale : $U_{j+1} = \sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k U_{j+1-k} - \Delta t \sum_{k=0}^{j+1} \beta_k \dot{U}_{j+1-k}$

✓ cas $\beta_0 = 0$: schémas explicites

$$\begin{aligned} U_{j+1} &= \alpha_1 U_j + \cdots + \alpha_{j+1} U_0 \\ &\quad - \Delta t \left(\beta_1 \dot{U}_j + \cdots + \beta_{j+1} \dot{U}_0 \right) \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{j+1} + F\left(U_{j+1}, t_{j+1}\right) = 0$$

$\left| \begin{array}{l} U_j \\ \dot{U}_j \end{array} \right.$ $\longrightarrow$ $\left| \begin{array}{l} U_{j+1} \\ \dot{U}_{j+1} \end{array} \right.$

instant t_j instant t_{j+1}

Schémas d'intégration adaptés aux systèmes différentiels d'ordre 1

forme générale : $U_{j+1} = \sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k U_{j+1-k} - \Delta t \sum_{k=0}^{j+1} \beta_k \dot{U}_{j+1-k}$

✓ cas $\beta_0 \neq 0$: schémas implicites

$$\begin{aligned} U_{j+1} + \Delta t\, \beta_0 \dot{U}_{j+1} &= \alpha_1 U_j + \cdots + \alpha_{j+1} U_0 \\ &\quad - \Delta t \left(\beta_1 \dot{U}_j + \cdots + \beta_{j+1} \dot{U}_0 \right) \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{j+1} + F\left(U_{j+1}, t_{j+1}\right) = 0$$

$\left| \begin{array}{l} U_j \\ \dot{U}_j \end{array} \right.$ $\longrightarrow$ $\left| \begin{array}{l} U_{j+1} \\ \dot{U}_{j+1} \end{array} \right.$

instant t_j instant t_{j+1}

Application à la Dynamique des Structures

$$\boxed{[M(q(t))]\{\ddot{q}(t)\} + f\big(q(t),\dot{q}(t),t\big) = 0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \\ & [M(q(t))] \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \{\dot{q}(t)\} \\ \{\ddot{q}(t)\} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\{\dot{q}(t)\} \\ f\big(q(t),\dot{q}(t),t\big) \end{vmatrix} = 0$$

vecteur d'état du système $\{U(t)\} = \begin{vmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{vmatrix}$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \\ & [M(q(t))] \end{bmatrix} \{\dot{U}(t)\} + \{F(U(t),t)\} = 0}$$

notations : $\{U(t_j)\} = U_j \qquad \{\dot{U}(t_j)\} = \dot{U}_j$

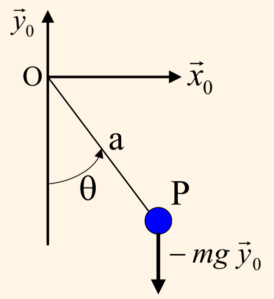
$$\boxed{U_{j+1} = \sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k U_{j+1-k} - \Delta t \sum_{k=0}^{j+1} \beta_k \dot{U}_{j+1-k}}$$

forme générale : $\boxed{\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k \begin{vmatrix} q_{j+1-k} \\ \dot{q}_{j+1-k} \end{vmatrix} - \Delta t\, \beta_0 \begin{vmatrix} \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} \end{vmatrix} - \Delta t \sum_{k=1}^{j+1} \beta_k \begin{vmatrix} \dot{q}_{j+1-k} \\ \ddot{q}_{j+1-k} \end{vmatrix}}$

Exemple utilisé pour présenter les schémas d'intégration

➢ pendule simple

$$\boxed{ma^2\,\ddot{\theta} + mga\sin\theta = 0}$$



❖ Hypothèse des petits mouvements :

$$\theta \qquad \dot{\theta} \qquad \ddot{\theta} \qquad << \quad 1$$

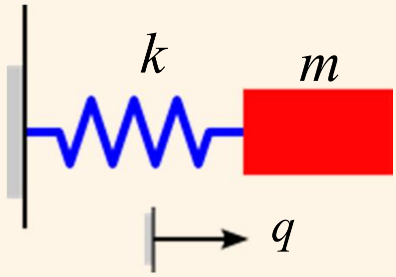
$\Longrightarrow$ équation du mouvement linéarisée

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\theta = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^{\,2}\,\theta = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_0^{\,2} = \frac{g}{a}$$

❖ à l'instant t_j $\qquad q_j = \theta(t_j) \qquad \dot{q}_j = \dot{\theta}(t_j) \qquad \ddot{q}_j = \ddot{\theta}(t_j)$

Exemple utilisé pour présenter les schémas d'intégration

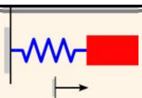
➢ oscillateur linéaire



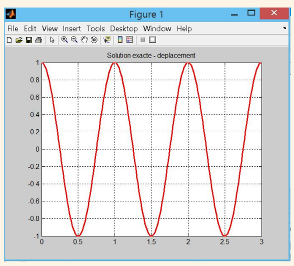
$$\ddot{q} + \frac{k}{m} q = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{q} + \omega_0^{\,2}\, q = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_0^{\,2} = \frac{k}{m}$$

❖ à l'instant t_j $\quad q_j = q(t_j) \quad \dot{q}_j = \dot{q}(t_j) \quad \ddot{q}_j = \ddot{q}(t_j)$

➢ oscillateur linéaire

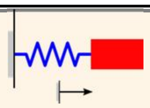


➢Solution Exacte




```
clear all; close all ; clc
T0   = 3 ; w0   = 2 * pi ; w0c  = w0 * w0 ;
q0   = 1. ; dq0  = 0.0
dte   = 0.01
te = (0:dte:T0)  ; % t=0:dte:3;
tic;
ind =1;
for t= te
     q(ind)    = q0 * cos(w0 * t) + dq0/w0 * sin(w0 * t) ;
     dq(ind)   = -w0 * q0 * sin(w0 * t) + dq0 * cos(w0 * t) ;
     ddq(ind) = - w0c * q(ind) ;
     energe(ind) = 0.5*( dq(ind)* dq(ind) + w0c *(q(ind)^2));
ind = ind+1;
end ; toc; q=  q';
```

➢ oscillateur linéaire

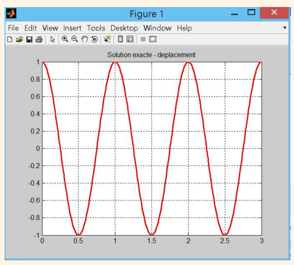


```
clear all; close all ; clc
T0    = 3 ; w0    = 2 * pi ; w0c   = w0 * w0 ;
q0    = 1. ; dq0   = 0.0    ;  dte    = 0.01  ;
te = (0:dte:T0)'  ;
npe    = size(te,1)  ;
qe     = zeros(npe,1) ;
dqe    = zeros(npe,1) ;
energe = zeros(npe,1);
 tic;
qe     = q0 * cos(w0 * te) + dq0/w0 * sin(w0 * te) ;
dqe    = -w0 * q0 * sin(w0 * te) + dq0 * cos(w0 * te) ;
 ddqe = - w0c * qe;
energe = 0.5*(dqe .* dqe + w0c * (qe.^2))  ; toc;
```

➢Solution Exacte vectorielle

➢ Les sorties possibles

```
plot(te,qe,te, dqe,te, ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(qe,dqe,qe, ddqe, '-r','Linewidth',2)
plot(qe,ddqe, '-r','Linewidth',2)

plot(te,qe, '-r','Linewidth',2)
```



➢ Schéma d'EULER explicite

$$\boxed{\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}} \qquad \boxed{\ddot{q} + \omega_0^{\,2}\, q = 0}$$

- à l'instant t_j $\quad q_j \quad \dot{q}_j \quad \ddot{q}_j$ connus
- à l'instant t_{j+1} $\quad q_{j+1} \quad \dot{q}_{j+1} \quad \ddot{q}_{j+1}$ à déterminer

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \times \dot{q}_j$$
$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \times \ddot{q}_j$$
$$\ddot{q}_{j+1} = -\,\omega_0^{\,2}\, q_{j+1}$$

$$\begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} \end{vmatrix}$$

➢ Schéma d'EULER explicite (1/2)

➢Méthode 1

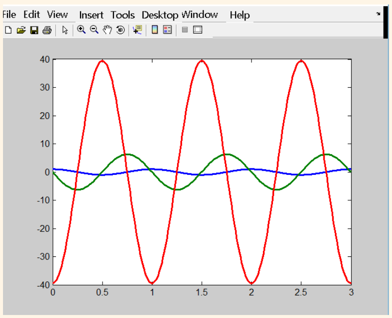
```
dt1    = 0.05  ; T0=3 ;
q0 =1;   dq0=0 ; w0c=2*pi ;
t1 = (0:dt1:T0)'           ;
np1    = size(t1,1)                 ;
q1     = zeros(np1,1)               ;
dq1    = zeros(np1,1)               ;
ddq1   = zeros(np1,1)               ;
energ1 = zeros(np1,1)               ;

q1(1)  = q0 ;dq1(1) = dq0            ;
ddq1(1) = -w0c * q1(1)               ;
```

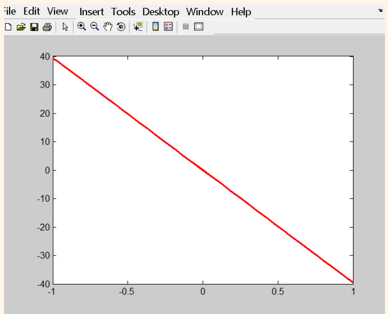
➢ Schéma d'EULER explicite (2/2)

```
%     Euler  Explicite
%     sans matrice d'amplification
for inc = 2 : np1                              ;
    q1(inc)     = q1(inc-1) + dt1 * dq1(inc-1)     ;
   dq1(inc)     = dq1(inc-1) + dt1 * ddq1(inc-1)   ;
  ddq1(inc)     = -w0c * q1(inc)               ;
end;
energ1 = 0.5*(dq1 .* dq1 + w0c * (q1 .^2)) ;
plot(t1,q1,'b-','Linewidth',3)
```

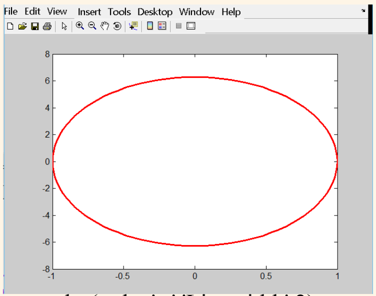


```
ifig=1
figure(ifig);
   plot(te,q, '-r','Linewidth',2)
   title('Solution exacte - déplacement')
   xlabel('t   (s)')                         ;
   ylabel('q')
   grid
ifig= ifig+1;
   figure(ifig)
   plot(te, energe, '-r','Linewidth',2)
   plot(te,q,te, dq,te, ddq, '-r','Linewidth',2)
   plot(q,dq,q, ddq, '-r','Linewidth',2)
   plot(q,ddq, '-r','Linewidth',2)
```





plot(q, ddq, '-r','Linewidth',2)



plot(q,dq, '-r','Linewidth',2)

➢ Schéma d'EULER explicite – avec matrice d'amplification

➢Méthode 2

$$\boxed{\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}}$$

$$\ddot{q}_{j+1} + \omega_0^{\ 2}\, q_{j+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{q}_{j+1} = -\,\omega_0^{\ 2}\, q_{j+1}}$$

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\,\omega_0^{\ 2}\,\Delta t & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix}$$

$[A]$ matrice d'amplification

Matlab :

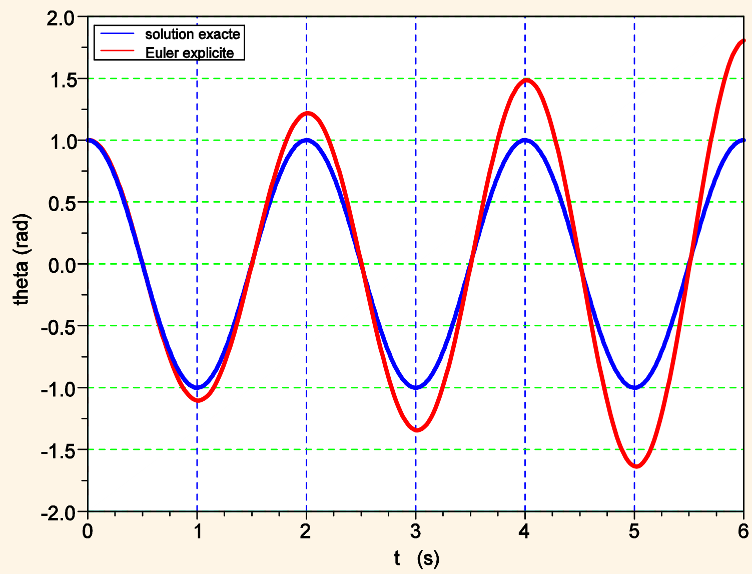
$$\boxed{[Z, \lambda] = eig(A)}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 - i\omega_0\,\Delta t \qquad Z_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -\,i\omega_0 \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 1 + i\omega_0\,\Delta t \qquad Z_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{vmatrix}}$$

➢ Schéma d'EULER explicite avec matrice d'amplification

```
 t1 = (0:dt1:T0)'  ;  np1   = size(t1,1);
 q = [q0;dq0]                          ;
 q1b = zeros(np1,1)                    ;
 q1b(1) = q0                           ;
A = [1 , dt1 ; -w0c * dt1  , 1]         ;
 for inc = 2 : np1                     ;
   q   = A * q                         ;
   q1b(inc) = q(1)                     ;
   dq1b(inc) = q(2)                      ;
end;
plot(t1,q1b,'b-','Linewidth',3)
plot(dq1b,q1b,'b-','Linewidth',3)
```

$\Delta t = 20$ ms

✓ décomposition spectrale de la matrice [A]

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -i\omega_0 & i\omega_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-i\omega_0\,\Delta t & \\ & 1+i\omega_0\,\Delta t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\omega_0 & -1\\ i\omega_0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{2i\,\omega_0}$$

avec $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -i\omega_0 & i\omega_0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}i\omega_0 & -1\\ i\omega_0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{2i\,\omega_0}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix}q_{j+1}\\ \dot q_{j+1}\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \Delta t\\ -\omega_0^{\,2}\,\Delta t & 1\end{bmatrix}\begin{vmatrix}q_j\\ \dot q_j\end{vmatrix}$$

soit $\begin{vmatrix}q_j\\ \dot q_j\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -i\omega_0 & i\omega_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-i\omega_0\,\Delta t)^j & \\ & (1+i\omega_0\,\Delta t)^j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\omega_0 & -1\\ i\omega_0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{2i\omega_0}\times\begin{vmatrix}q_0\\ \dot q_0\end{vmatrix}$

➢ Etude de la matrice d'amplification d'EULER explicite

```
% utilisation du calcul formel : étude des valeurs propres
dt1= sym('dt1','real');  w0= sym('w0','real');
A = [1 , dt1 ; -1 * w0 * w0  * dt1  , 1]
% Z : vecteurs et valeurs propres : d
[z,d]=eig(A); z ; d
 re = real(d)
 im = imag(d)
 mo=abs(d)
 zm= inv(z) ; C= z * (d * zm); C = simplify(C)
% matrice initiale changement de base !
```

✓ remarque : résolution d'une équation différentielle du premier ordre avec un schéma d'EULER explicite

➢ Un exemple :

$$\dot{q} + a\,q = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{q} + a\,\dot{q} = 0$$

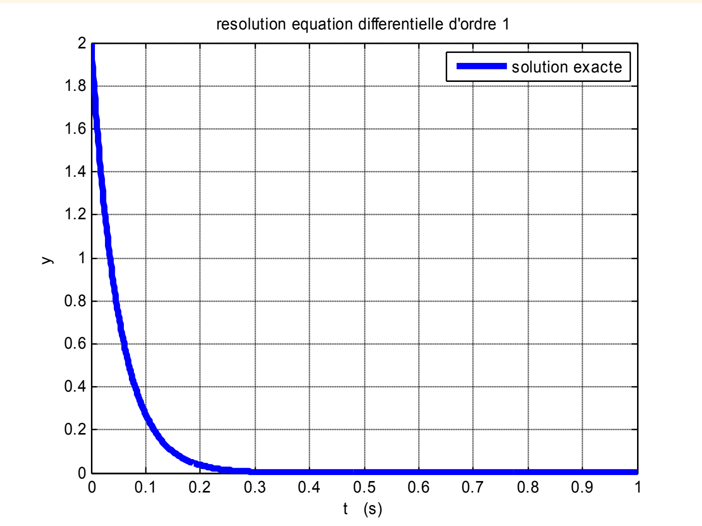
$$\boxed{\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a\,\Delta t & 0 \\ 0 & 1 - a\,\Delta t \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{-1 < 1 - a\,\Delta t < 1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} 0 < a \\ \Delta t < \dfrac{2}{a} \end{cases}}$$

Solution numérique Stable ? Instable ?

✓ remarque : résolution d'une équation différentielle du premier ordre avec un schéma d'EULER explicite

$$\boxed{\Delta t_c = 2 / a}$$



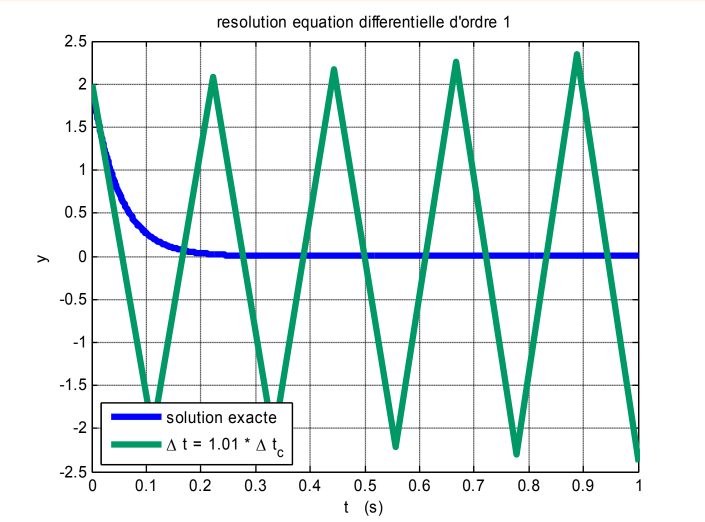
✓ remarque : résolution d'une équation différentielle du premier ordre avec un schéma d'EULER explicite

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{q} + a\,q = 0 \\ q_{j+1} = q_j + \Delta t\,\dot{q}_j \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_{j+1} = (1 - a\,\Delta t)\,q_j}$$

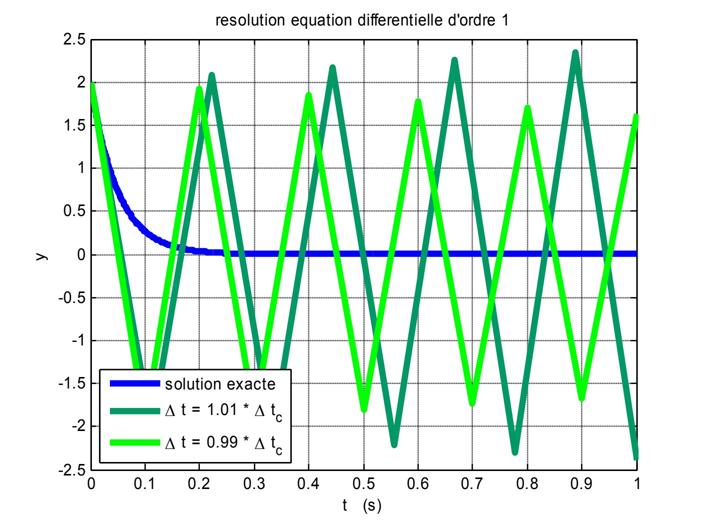
$$\boxed{\dot{q}_j + a\,q_j = 0}$$

$$\boxed{-1 < 1 - a\,\Delta t < 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l} 0 < a \\ \Delta t < \dfrac{2}{a} \end{array}\right.}$$

✓ remarque : résolution d'une équation différentielle du premier ordre avec un schéma d'EULER explicite $\boxed{\Delta t_c = 2/a}$



✓ remarque : résolution d'une équation différentielle du premier ordre avec un schéma d'EULER explicite $\boxed{\Delta t_c = 2/a}$



Travaux dirigés : résolution numérique des équations du mouvement

Résumé du cours séance 2 :
Les méthodes qui vont transformer l'équation différentielle du second ordre en un système équations différentielles du premier ordre

Oscillateur linéaire à un degré de liberté
Schéma Euler explicite

Travaux dirigés à faire :
Ouvrir le fichier : MecaNum_practice2019def.pdf

Exercice 2 : Traiter l'exercice étude d'un oscillateur linéaire amorti à un degré de liberté
L'objectif est de programmer avec Matlab ou Scilab sur votre PC :
La solution analytique , la solution par Euler Explicite