



Mécanique & Vibrations

Intégration en temps des équations du mouvement (séance 4)

Patrick ROZYCKI, Pascal COSSON, Laurent GORNET

Ecole Centrale de Nantes



Cours n°4

Newmark

Equations linéaires

Equations non linéaires

Objectif

Recherche de la solution numérique d'une équation ou d'un système d'équations différentielles linéaires ou non linéaires avec une méthode numérique d'intégration en temps de Newmark (implicite ou explicite)

Exemples présentés :

Exemple d'un oscillateur linéaire

- Schéma Newmark explicite et Newmark implicite

Exemple d'un oscillateur non linéaire

- Schéma avec Newmark explicite ou Newmark implicite

Schémas d'intégration adaptés aux systèmes différentiels d'ordre 2

➤ Schéma de NEWMARK $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}_j + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{j+1}$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_j + \Delta t \gamma \ddot{q}_{j+1}$$

Avec : $\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma \Delta t \\ \omega_0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & +\Delta t & \Delta t^2 (0.5 - \beta) \\ 0 & 1 & \Delta t (1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{bmatrix}$$

q_j
 \dot{q}_j
 \ddot{q}_j



q_{j+1}
 \dot{q}_{j+1}
 \ddot{q}_{j+1}

Schémas d'intégration adaptés aux systèmes différentiels d'ordre 2

➤ Schéma de NEWMARK – matrice d'amplification

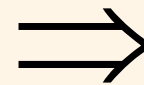
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \Delta t^2 \\ 0 & 1 & -\gamma \Delta t \\ \omega_0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & +\Delta t & \Delta t^2(0.5 - \beta) \\ 0 & 1 & \Delta t(1 - \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j &= -\omega_0^2 q_j \\ \ddot{q}_{j+1} &= -\omega_0^2 q_{j+1} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \beta \Delta t^2 \omega_0^2 & 0 \\ \gamma \Delta t \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t^2(0.5 - \beta)\omega_0^2 & +\Delta t \\ -(1 - \gamma)\Delta t \omega_0^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

de la forme

$$[B] \begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = ([B]^{-1} \times [C]) \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

➤ Calcul Symbolique

Schéma de NEWMARK – matrice d'amplification

```
clear all; close all; clc; format short e;
```

```
dt1= sym('dt1','real'); w0= sym('w0','real');
```

```
be= sym('be','real'); ga= sym('ga','real');
```

```
C = [1 - dt1 * dt1 * (0.5 - be) * w0 * w0 , dt1 ; - (1 - ga) * dt1 * w0 * w0 , 1]
```

```
B = [1+be*dt1*dt1* w0 * w0 , 0 ; ga*dt1* w0 * w0 ,1]
```

```
A = inv(B) * C
```

```
%vecteurs et valeurs propres
```

```
[z,d]=eig( (inv(B) ) * C)
```

```
re = real(d)
```

```
im = imag(d)
```

```
mo=abs(d)
```

```
mo= simplify(mo)
```

```
% Donner des valeurs des paramètres w0, dt1, be, ga
```

```
% eval(mo)
```

Schémas d'intégration adaptés aux systèmes différentiels d'ordre 2

➤ Schéma de NEWMARK – matrice d'amplification

$$\begin{bmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta \omega_0^2 \Delta t^2)} & \frac{\Delta t}{1 + \beta \omega_0^2 \Delta t^2} \\ -\omega_0^2 \Delta t \left[1 - \frac{\gamma \omega_0^2 \Delta t^2}{2(1 + \beta \omega_0^2 \Delta t^2)} \right] & 1 - \frac{\gamma \omega_0^2 \Delta t^2}{1 + \beta \omega_0^2 \Delta t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{bmatrix}$$

$[A]$ matrice d'amplification

Schémas d'intégration adaptés aux systèmes différentiels d'ordre 2

- Schéma de NEWMARK – matrice d'amplification
- Recherche de la condition de stabilité

$$\det \left[A - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\text{On pose } \xi^2 = \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{1 + \beta \omega_0^2 \Delta t^2}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda \left[2 - \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \xi^2 \right] + 1 - \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \xi^2 = 0$$

- Condition de stabilité : choisir β, γ pour avoir :

$$\|\lambda_1\| \leq 1 \quad \|\lambda_2\| \leq 1$$

Recherche de la condition de stabilité

$$\det \left[A - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda \left[2 - \xi^2 \right] + 1 - \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \xi^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On souhaite : $\Delta \leq 0 \Rightarrow \lambda_1 = \rho e^{i\varphi}$ et $\lambda_2 = \rho e^{-i\varphi}$

$$\Rightarrow \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\omega_0^2 \Delta t^2}$$

$$\varphi = \text{Arct} \left(\frac{\xi \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \xi^2}}{1 - \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \xi^2} \right)$$

$$\rho = \sqrt{1 - \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \xi^2}$$

➤ Condition de stabilité

$$\|\rho\| \leq 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\omega_0^2 \Delta t^2} \Rightarrow \text{choix } \beta = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_1 = \rho e^{i\varphi} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \rho e^{-i\varphi}$$


$$\rho = \sqrt{1 - \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \xi^2}$$

$$\varphi = \text{Arct} \left(\frac{\xi \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 \xi^2}}{1 - \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \xi^2} \right)$$

✓ cas particulier no 1: méthode des trapèzes

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{4}$$

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{q}_{j+1}$$
$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$


$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{vmatrix} \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} \end{vmatrix}$$

pour un oscillateur linéaire non amorti

- ✓ schéma stable
- ✓ schéma précis

✓ cas particulier no 2 : $\gamma = \frac{1}{2}$ $\beta = 0$

$$(1) \quad q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$$

$$\dot{q}_j = \frac{q_{j+1} - q_{j-1}}{2\Delta t}$$

$$(2) \quad \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$

$$\ddot{q}_j = \frac{q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}}{\Delta t^2}$$

 méthode des différences finies centrées : faire sur (1) et (2)

$$f(t_j + \Delta t) = f(t_j) + \Delta t \dot{f}(t_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{f}(t_j) + o(\Delta t^2)$$

Avec (1) + (2)

$$f(t_j - \Delta t) = f(t_j) - \Delta t \dot{f}(t_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{f}(t_j) + o(\Delta t^2)$$

Avec (1) - (2)

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(t_j + \Delta t) + f(t_j - \Delta t) - 2f(t_j) = \Delta t^2 \ddot{f}(t_j) + o(\Delta t^2) \\ \Rightarrow \ddot{f}(t_j) = \frac{f(t_j + \Delta t) + f(t_j - \Delta t) - 2f(t_j)}{\Delta t^2} + o(1) \end{array} \right.$$

$$\dot{f}(t_j) = \frac{f(t_j + \Delta t) - f(t_j - \Delta t)}{2\Delta t} + o(\Delta t)$$

✓ cas particulier no 2 : $\gamma = \frac{1}{2} \quad \beta = 0$

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$

Résolution de $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ $q(0) = q_0$ $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$

➤ initialisation $\ddot{q}_0 = -\omega_0^2 q_0$

➤ incrément j $q_j \quad \dot{q}_j \quad \ddot{q}_j$

➤ incrément j+1 $q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$

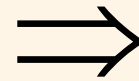
$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1}$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$

✓ cas particulier no 2 : $\gamma = \frac{1}{2}$ $\beta = 0$

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$



$$\dot{q}_j = \frac{q_{j+1} - q_{j-1}}{2\Delta t}$$

$$\ddot{q}_j = \frac{q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}}{\Delta t^2}$$

❖ convention

$$\dot{q}_{j+1/2} = \dot{q}\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta t}$$

$$\dot{q}_{j-1/2} = \dot{q}\left(t_j - \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{q_j - q_{j-1}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_j = \frac{q_{j+1} + q_{j-1} - 2q_j}{\Delta t^2} = \frac{\dot{q}_{j+1/2} - \dot{q}_{j-1/2}}{\Delta t}$$

✓ cas particulier no 2 : $\gamma = \frac{1}{2} \quad \beta = 0$

Résolution de $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ avec $q(0) = q_0 \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$

➤ initialisation $\ddot{q}_0 = -\omega_0^2 q_0 \quad \dot{q}_{1/2} = \dot{q}_0 + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_0$

➤ incrément j $q_j \quad \dot{q}_{j+1/2} \quad \ddot{q}_j$

➤ incrément j+1

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_{j+1/2}$$
$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 q_{j+1}$$
$$\dot{q}_{j+3/2} = \dot{q}_{j+1/2} + \Delta t \ddot{q}_{j+1}$$

✓ cas particulier no 2 : $\gamma = \frac{1}{2} \quad \beta = 0$

Différences finies centrées

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$

Résolution de $\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0$

$$q(0) = q_0 \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

$$\ddot{q}(0) = \ddot{q}_0 = -\omega_0^2 \sin q_0$$

➤ initialisation $q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0 = -\omega_0^2 \sin(q_0)$

➤ incrément j $q_j \quad \dot{q}_j \quad \ddot{q}_j$

➤ incrément j+1 $q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 \sin q_{j+1}$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$

➤ Schéma de NEWMARK
Explicite

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \beta = 0$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0$$

```
dt1 = 0.001
t1 = (0:dt1:T0)'
np1 = size(t1,1)
q1 = zeros(np1,1)
dq1 = zeros(np1,1)
energ1 = zeros(np1,1)
```

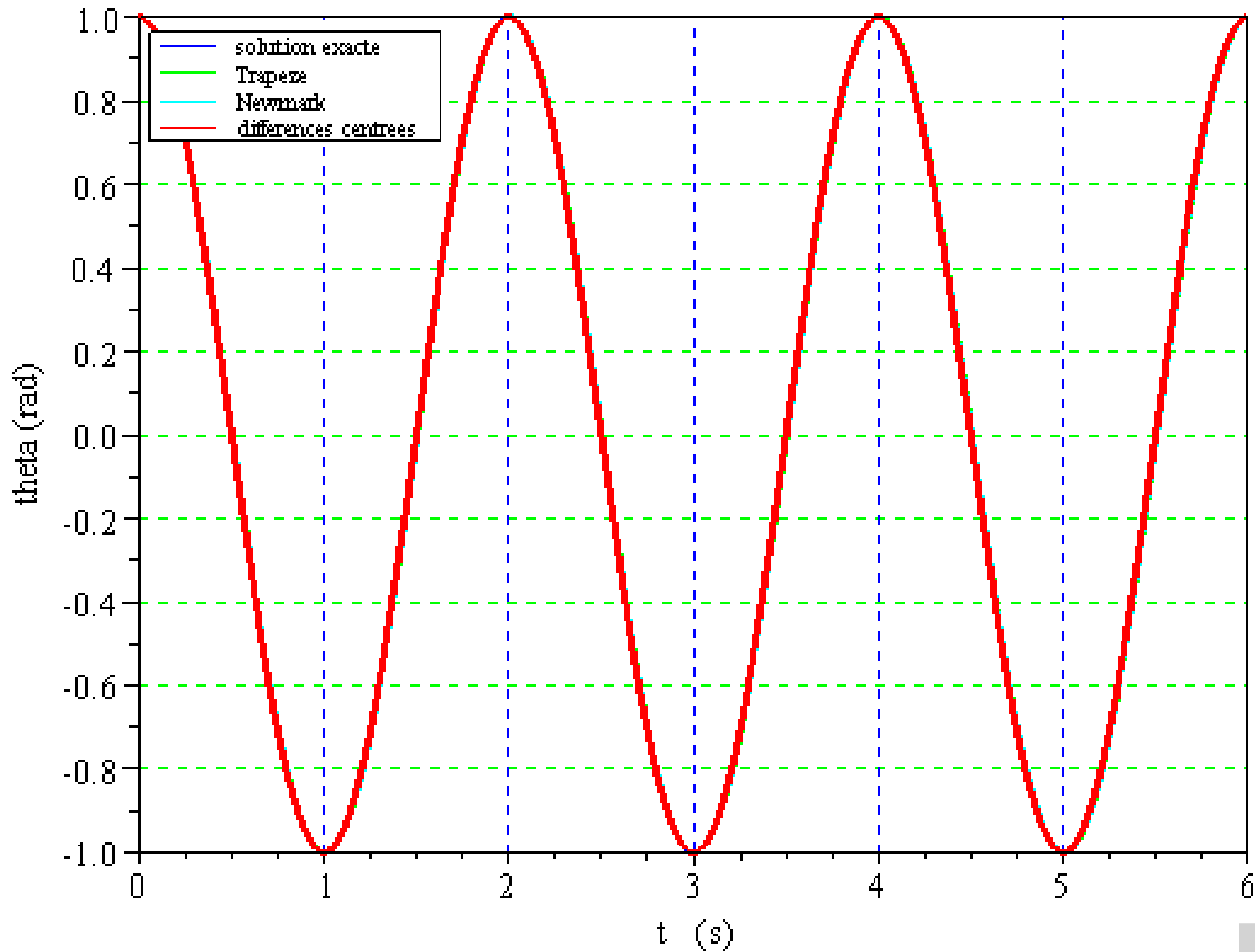
```
q1(1) = q0
dq1(1) = dq0
ddq0c = -w0c * sin(q0)
```

```
for inc = 2 : np1
    q1(inc) = q1(inc-1) + dt1 * dq1(inc-1)
                + dt1*dt1*0.5*ddq0c

    ddqc = -w0c * sin(q1(inc))
    dq1(inc) = dq1(inc-1) +
                0.5*dt1 * (ddq0c + ddqc)

    ddq0c = ddqc
end
energ1 = 0.5 * (dq1.*dq1) - w0c * cos(q1)
```

Lignes à modifier en fonction de l'exemple à traiter



$\Delta t = 20 \text{ ms}$



Equations différentielles non linéaires

- Méthodes qui vont transformer l'équation différentielle du second ordre en une équation différentielle d'ordre 1 et qui vont utiliser un schéma d'intégration adapté aux équations différentielles d'ordre 1

schéma d'intégration de RUNGE KUTTA



équation différentielle :

$$\{U^{(1)}(t)\} + F(\{U(t)\}, t) = 0$$

forme générale :

$$U_{j+1} = \sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k U_{j+1-k} - \Delta t \sum_{k=0}^{j+1} \beta_k \dot{U}_{j+1-k}$$

incrément j :

$$\left| \begin{array}{c} U_0 \\ \dot{U}_0 \end{array} \right', \dots, \left| \begin{array}{c} U_j \\ \dot{U}_j \end{array} \right'$$

incrément j+1

✓ cas d'un schéma explicite : $\beta_0 = 0$

calcul direct

$$U_{j+1} = \sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k U_{j+1-k} - \Delta t \sum_{k=1}^{j+1} \beta_k \dot{U}_{j+1-k}$$

$$\{\dot{U}_{j+1}\} + F(\{U_{j+1}\}, t_{j+1}) = 0$$

exemple

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0$$

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}$$

EULER explicite

➤ incrément j

$$q_j \quad \dot{q}_j \quad \ddot{q}_j$$

➤ incrément j+1

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \begin{vmatrix} \dot{q}_j \\ \ddot{q}_j \end{vmatrix}$$

Solution explicite

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 \sin q_{j+1}$$

incrément j+1

✓ cas d'un schéma implicite : $\beta_0 \neq 0$

$$U_{j+1} = \sum_{k=1}^{j+1} \alpha_k U_{j+1-k} - \Delta t \beta_0 \dot{U}_{j+1} - \Delta t \sum_{k=1}^{j+1} \beta_k \dot{U}_{j+1-k}$$

$$\{\dot{U}_{j+1}\} + F(\{U_{j+1}\}, t_{j+1}) = 0$$

calcul direct impossible, **nécessité d'une résolution itérative** à chaque incrément

Exemple : EULER implicite

exemple

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0$$

$$\begin{vmatrix} q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_j \\ \dot{q}_j \end{vmatrix} + \Delta t \begin{vmatrix} \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \ddot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} + \omega_0^2 \sin q_{j+1} = 0 \end{cases}$$

Méthode prédiction correction à utiliser!

➤ résolution itérative à chaque incrément

EULER implicite prédiction correction

$$\begin{cases} q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \Delta t \ddot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1} + \omega_0^2 \sin q_{j+1} = 0 \end{cases}$$

➤ incrément j valeurs calculées

$$q_j \quad \dot{q}_j \quad \ddot{q}_j$$

➤ incrément j+1 estimation

$$q_{j+1} = q_{j+1}^* \quad \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_{j+1}^* \quad \ddot{q}_{j+1} = \ddot{q}_{j+1}^*$$

$$\text{correction } q_{j+1} = q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1} \quad \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_{j+1}^* + \Delta \dot{q}_{j+1}$$

$$\ddot{q}_{j+1} = \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1}$$

$$\text{calcul des corrections } \Delta \ddot{q}_{j+1} = \dots$$

$$\text{Et tester le résidu } \Delta q_{j+1} = \Delta t \Delta \dot{q}_{j+1} \quad \Delta \dot{q}_{j+1} = \Delta t \Delta \ddot{q}_{j+1}$$

$$\text{Avec Linéarisation } \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1} + \omega_0^2 \sin(q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}) = 0$$

Δq_{j+1} est petit

$$\text{Car : } \Delta \ddot{q}_{j+1} + \Delta q_{j+1} \times \omega_0^2 \cos q_{j+1}^* = -(\ddot{q}_{j+1}^* + \omega_0^2 \sin q_{j+1}^*) \Rightarrow \Delta q_{j+1} = \dots$$

➤ Méthodes qui vont permettre de résoudre directement l'équation différentielle du second ordre : schéma explicite (résolution directe)

équation du mouvement

$$[M(q(t))]\{\ddot{q}(t)\} + f(q(t), t) = 0$$

Cas d'un schéma de NEWMARK explicite

$$\gamma = 0.5 \quad \beta = 0$$

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$

➤ incrément j

$$q_j, \dot{q}_j, \ddot{q}_j$$

➤ incrément j+1

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$$

$$\{\ddot{q}_{j+1}\} = -[M(q_{j+1})]^{-1} f(q_{j+1}, t_{j+1})$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$

➤ Méthodes qui vont permettre de résoudre directement l'équation différentielle du second ordre : schéma explicite (résolution directe)

application $\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0$

Cas d'un schéma de NEWMARK explicite $\gamma = 0.5$ $\beta = 0$

$$q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$

➤ incrément j q_j , \dot{q}_j , \ddot{q}_j

➤ incrément j+1 $q_{j+1} = q_j + \Delta t \dot{q}_j + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_j$

$$\ddot{q}_{j+1} = -\omega_0^2 \sin q_{j+1}$$

$$\dot{q}_{j+1} = \dot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_j + \frac{\Delta t}{2} \ddot{q}_{j+1}$$

- Méthodes qui vont permettre de résoudre directement l'équation différentielle du second ordre : schéma explicite (résolution directe)

Remarque : équation du mouvement de la forme

$$[M(q(t))]\{\ddot{q}(t)\} + f(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

fonction $f(q(t), \dot{q}(t), t)$



Même avec un schéma des différences finies centrées, suivant les cas, il faut mettre en place une résolution itérative pour chaque incrément.

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q + \omega_1^2 \sin \dot{q}t = 0$$

- Méthodes qui vont permettre de résoudre directement l'équation différentielle du second ordre : schéma implicite (méthode itérative)

équation du mouvement

$$[M(q(t))]\{\ddot{q}(t)\} + f(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

- incrément j

$$[M(q_j)]\{\ddot{q}_j\} + f(q_j, \dot{q}_j, t_j) = 0$$

- incrément j+1

- ✓ estimation

$$q_{j+1} = q_{j+1}^* \quad \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_{j+1}^* \quad \ddot{q}_{j+1} = \ddot{q}_{j+1}^*$$

- ✓ correction

$$q_{j+1} = q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1} \quad \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_{j+1}^* + \Delta \dot{q}_{j+1}$$

$$\ddot{q}_{j+1} = \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1}$$

- ✓ calcul des corrections

$$[M(q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1})] \{\ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1}\} + f(q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1}, \dot{q}_{j+1}^* + \Delta \dot{q}_{j+1}, t_{j+1}) = 0$$

- Méthodes qui vont permettre de résoudre directement l'équation différentielle du second ordre : schéma implicite (méthode itérative)

application : résolution de $\ddot{q} + \omega_0^2 \sin q = 0$ avec un schéma de NEWMARK

- incrément j $q_j \quad \dot{q}_j \quad \ddot{q}_j$

- incrément $j+1$

- ✓ estimation

$$q_{j+1} = q_{j+1}^* \quad \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_{j+1}^* \quad \ddot{q}_{j+1} = \ddot{q}_{j+1}^*$$

- ✓ correction

$$q_{j+1} = q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1} \quad \dot{q}_{j+1} = \dot{q}_{j+1}^* + \Delta \dot{q}_{j+1}$$

$$\ddot{q}_{j+1} = \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1}$$

avec

$$\Delta q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{q}_{j+1}$$

ou

$$\Delta \ddot{q}_{j+1} = \Delta q_{j+1} / \beta \Delta t^2$$

- ✓ calcul des corrections

$$\Delta \ddot{q}_{j+1} + \Delta q_{j+1} \times \omega_0^2 \cos q_{j+1}^* = -(\ddot{q}_{j+1}^* + \omega_0^2 \sin q_{j+1}^*)$$

➤ incrément $j+1$: $t = t_{j+1}$

$$q_{j+1}^* = q_{j+1}^0 \quad \dot{q}_{j+1}^* = \dot{q}_{j+1}^0 \quad \ddot{q}_{j+1}^* = \ddot{q}_{j+1}^0$$

test : $\left| \ddot{q}_{j+1}^* + \omega_0^2 \sin q_{j+1}^* \right| < \varepsilon$

$$\begin{cases} q_{j+1}^* = q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1}^* = \dot{q}_{j+1}^* + \Delta \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1}^* = \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1} \end{cases}$$

calcul des nouvelles valeurs

$$\begin{cases} q_{j+1}^* = q_{j+1}^* + \Delta q_{j+1} \\ \dot{q}_{j+1}^* = \dot{q}_{j+1}^* + \Delta \dot{q}_{j+1} \\ \ddot{q}_{j+1}^* = \ddot{q}_{j+1}^* + \Delta \ddot{q}_{j+1} \end{cases}$$

calcul de la correction

$$\begin{cases} \Delta q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{q}_{j+1} \\ \Delta \dot{q}_{j+1} = \gamma \Delta t \Delta \ddot{q}_{j+1} \\ \Delta \ddot{q}_{j+1} + \Delta q_{j+1} \times \omega_0^2 \cos q_{j+1}^* = -(\ddot{q}_{j+1}^* + \omega_0^2 \sin q_{j+1}^*) \end{cases}$$

oui

non

avec $\Delta q_{j+1} = \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{q}_{j+1}$ donc $\Delta \ddot{q}_{j+1} = \dots$

➤ incrément $j+2$: $t = t_{j+2}$

➤ **Newmark implicite**

Equation différentielle 2^e ordre

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q (1 + a q^2) = 0$$

$$\Delta \ddot{q}_{n+1} = ?$$

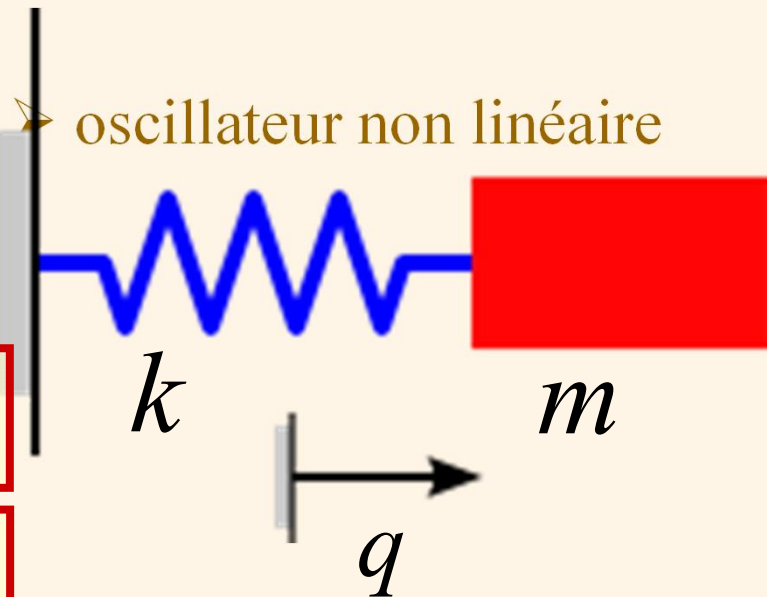
Calcul de la correction :

$$f(\ddot{q}_{n+1}^* + \Delta \ddot{q}_{n+1}, q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1}) = 0$$

$$\ddot{q}_{n+1}^* + \Delta \ddot{q}_{n+1} + \omega_0^2 (q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1}) (1 + a (q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1})^2) = 0$$

$$f(\ddot{q}_{n+1}^* + \Delta \ddot{q}_{n+1}, q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1}) = 0 =$$

$$f(\ddot{q}_{n+1}^*, q_{n+1}^*) + \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}^*} \Delta q_{n+1} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_{n+1}^*} \Delta \ddot{q}_{n+1}$$



avec :

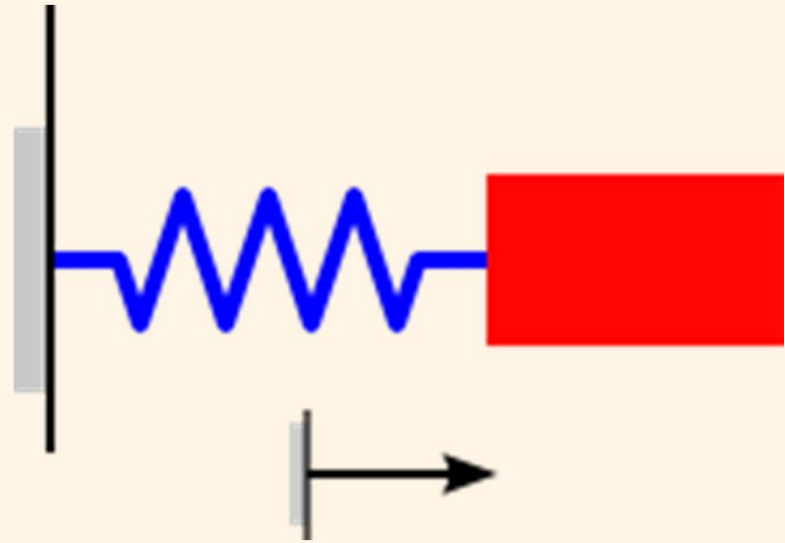
$$\Delta q_{n+1} = \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{q}_{n+1}$$

On obtient :

$$\Delta \ddot{q} = \dots$$

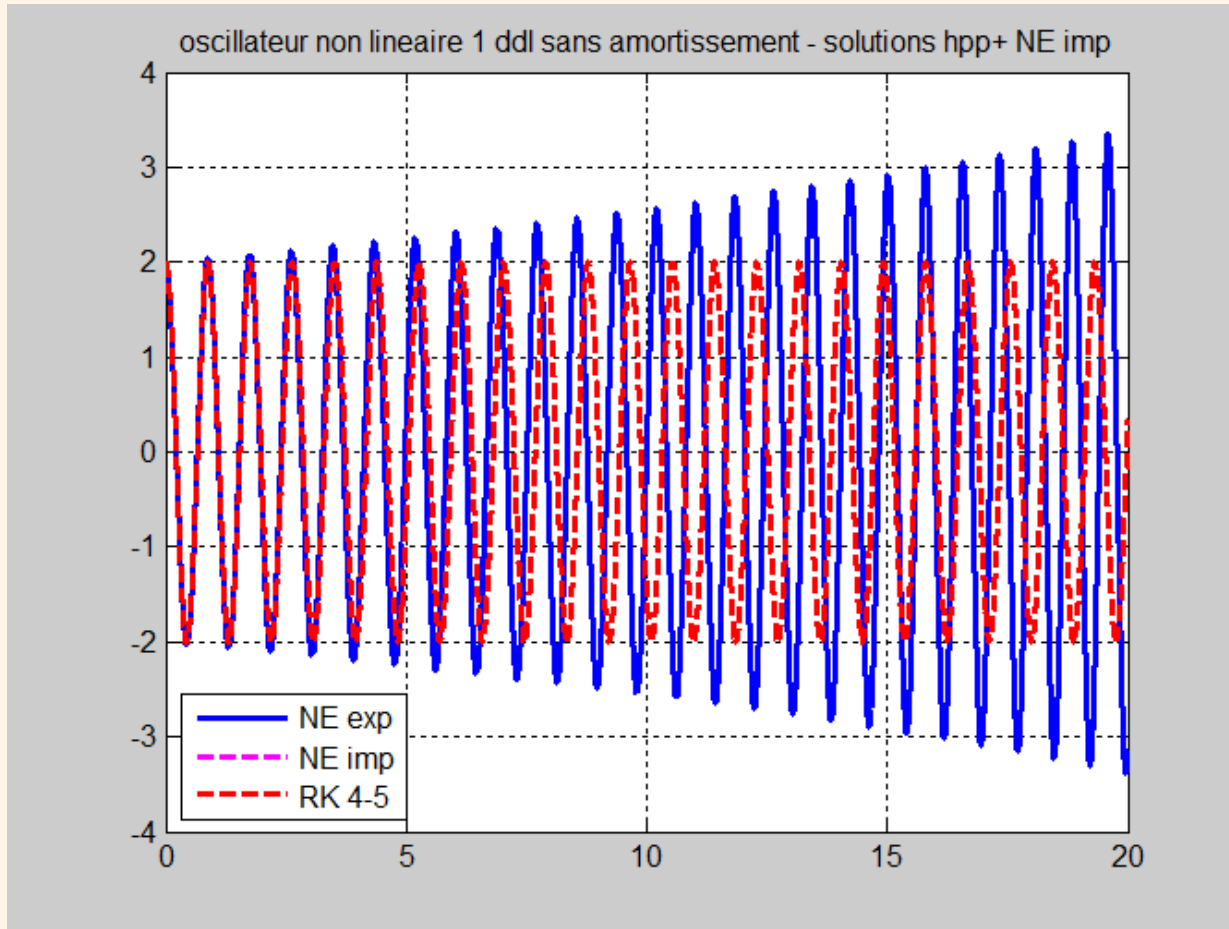
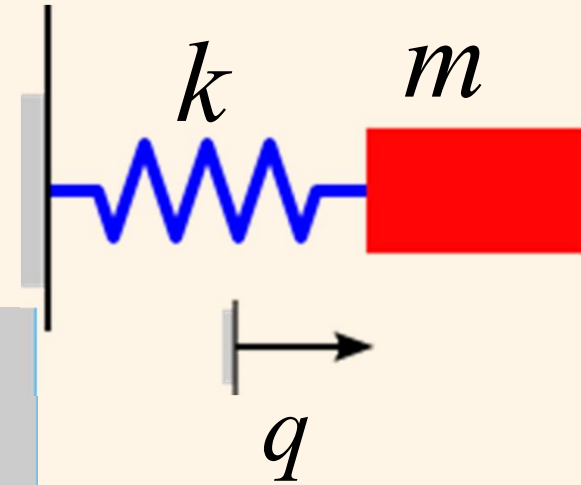
➤ **Newmark implicite**

Equation différentielle 2^e ordre



$$\Delta \ddot{q}_{n+1} = - \frac{f(\ddot{q}_{n+1}^*, \dot{q}_{n+1}^*, q_{n+1}^*)}{\frac{\partial f}{\partial \ddot{q}_{n+1}^*} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_{n+1}^*} \beta \Delta t^2}$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q (1 + a q^2) = 0$$



➤ Newmark implicite pour un système de deux équations

Système différentiel 2^e ordre

$$f_1 \left({}_1\ddot{q}_{n+1}, {}_1\dot{q}_{n+1}, {}_1q_{n+1}, {}_2\ddot{q}_{n+1}, {}_2\dot{q}_{n+1}, {}_2q_{n+1} \right) = 0$$

$$f_2 \left({}_1\ddot{q}_{n+1}, {}_1\dot{q}_{n+1}, {}_1q_{n+1}, {}_2\ddot{q}_{n+1}, {}_2\dot{q}_{n+1}, {}_2q_{n+1} \right) = 0$$

Calcul des corrections : faire les développements limités

$$f_1^* \left({}_1\ddot{q}_{n+1}^* + \Delta {}_1\ddot{q}_{n+1}, {}_1\dot{q}_{n+1}^* + \Delta {}_1\dot{q}_{n+1}, {}_1q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1}, {}_2\ddot{q}_{n+1}^* + \Delta {}_2\ddot{q}_{n+1}, {}_2\dot{q}_{n+1}^* + \Delta {}_2\dot{q}_{n+1}, {}_2q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1} \right) = 0$$

$$f_2^* \left({}_1\ddot{q}_{n+1}^* + \Delta {}_1\ddot{q}_{n+1}, {}_1\dot{q}_{n+1}^* + \Delta {}_1\dot{q}_{n+1}, {}_1q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1}, {}_2\ddot{q}_{n+1}^* + \Delta {}_2\ddot{q}_{n+1}, {}_2\dot{q}_{n+1}^* + \Delta {}_2\dot{q}_{n+1}, {}_2q_{n+1}^* + \Delta q_{n+1} \right) = 0$$

➤ Newmark implicite pour un système de deux équations

Système différentiel 2^e ordre

Calcul des corrections, faire le développements limités :

$$f_1^* = 0$$

$$f_2^* = 0$$

Liaisons de Newmark :

$${}_1\Delta q_{n+1} = \beta \Delta t^2 {}_1\Delta \ddot{q}_{n+1}$$

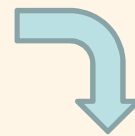
$${}_1\Delta \dot{q}_{n+1} = \gamma \Delta t {}_1\Delta \ddot{q}_{n+1}$$

$${}_2\Delta q_{n+1} = \beta \Delta t^2 {}_2\Delta \ddot{q}_{n+1}$$

$${}_2\Delta \dot{q}_{n+1} = \gamma \Delta t {}_2\Delta \ddot{q}_{n+1}$$

On obtient les corrections :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta {}_1\ddot{q}_{n+1} \\ \Delta {}_2\ddot{q}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_1^* \\ -f_2^* \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ?$$

A calculer !

$$\begin{Bmatrix} \Delta {}_1\ddot{q}_{n+1} \\ \Delta {}_2\ddot{q}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -f_1^* \\ -f_2^* \end{Bmatrix}$$

Pendule élastique

Non linéaire

- Energie cinétique et Energie potentielle

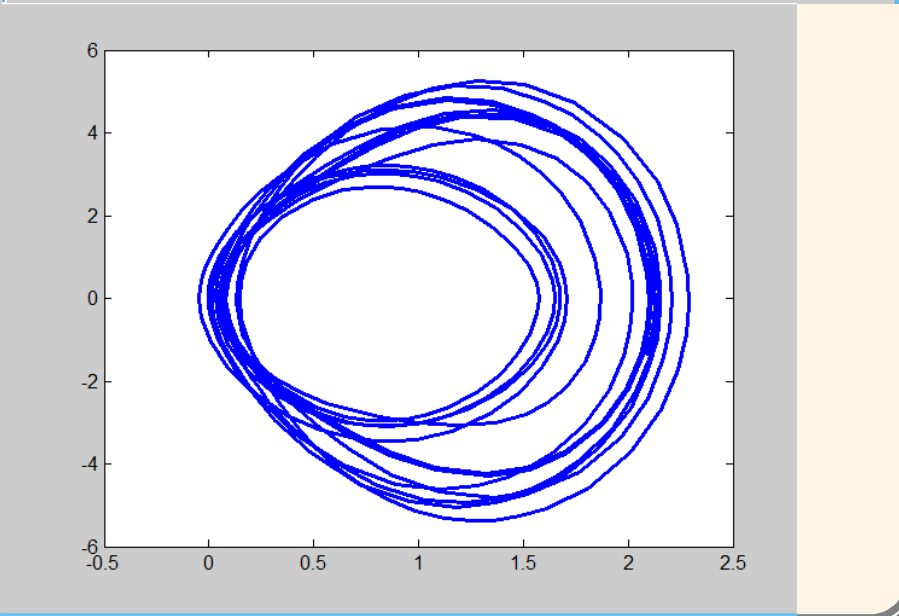
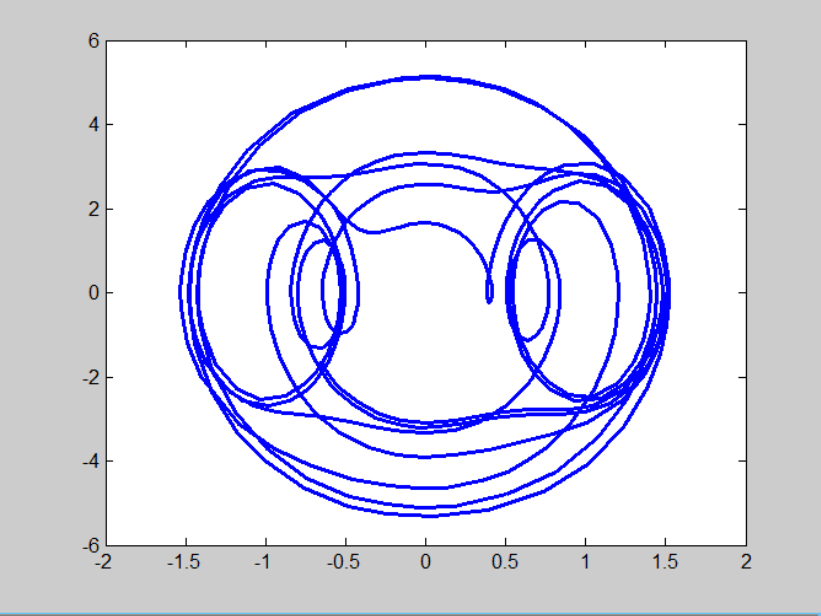
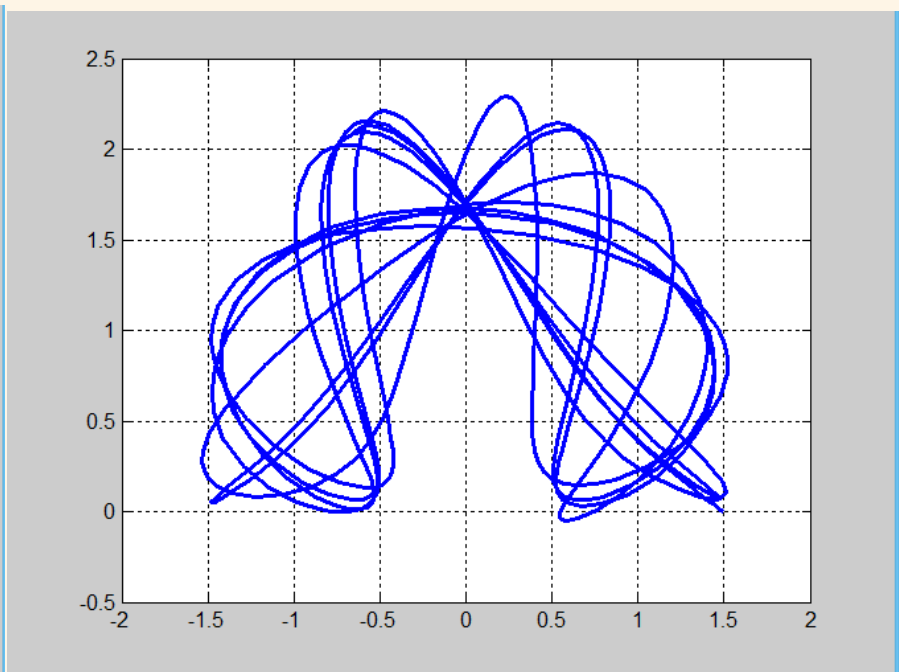
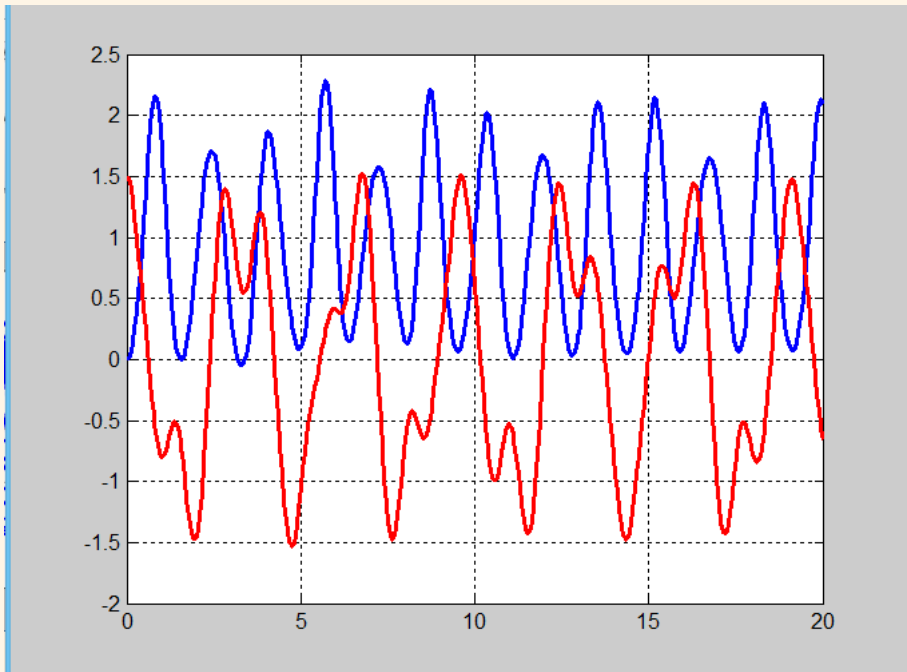
$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$E_p = -mgx + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \quad \text{avec} \quad l = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Equations du mouvement :

$$m \ddot{x} + k (l - l_0) \frac{x}{l} - m g = 0$$

$$m \ddot{y} + k (l - l_0) \frac{y}{l} = 0$$



Résumé

La plupart des schémas numériques implicites (Newmark implicite, trapèze... sont stables.

La plupart des schémas numériques explicites possèdent un pas de temps critique pour être stable

Les schémas explicites malgré leur stabilité plus limitée sont souvent utilisés en dynamique rapide des structures sur des temps très courts car les calculs sont simples (multiplications matrice par vecteur)

Conclusion du cours

- L'évolution dans le temps de nombreux systèmes en Mécanique des **solides indéformables et déformables** peut être modélisée,
 - ✓ par un système (linéaire ou non linéaire) d'équations différentielles
 - ✓ Il existe de nombreux schémas numériques mais en dynamique des structures les équations différentielles (linéaires ou non linéaires) du deuxième ordre sont traitées classiquement à l'aide de schéma de la famille de Newmarck
 - ✓ Bonne programmation de vos idées avec,
Matlab ou avec le code éléments finis Cast3M

FIN du cours
**Intégration en temps des équations du
mouvement en mécanique des solides
indéformable et déformable**

**Laurent GORNET,
Ecole Centrale Nantes 2020**