Corrigé du TD n° 1

Séries numériques

16 mars 2020

0.1 Généralités sur les suites

Exercice 1. Soit u une suite monotone dont une suite extraite est convergente. Montrer que u est convergente.

Soit $(u_{\rho(n)})$ une suite extraite conevrgente vers l ; alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\rho(n)} \leq l$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho(n) \geq n$, donc $u_n \leq u_{\rho(n)} \leq l$. La suite (u_n) est donc majorée par l, et comme par hypothèse elle est croissante, on en déduit qu'elle est convergente. Enfin, toute suite extraite d'une suite convegente converge et tend vers la même limite. On en déduit que (u_n) tend vers l.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que $v_n = 2u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge ssi $(v_n)_{n\geq 0}$ converge.

Le sens $\Rightarrow$: si $\lim u_n = l$, alors (v_n) est convergente et $\lim v_n = 2l$ (immédiat).
Le sens intéressant est $\Leftarrow$: On veut exprimer u_n en fonction de des v_n. Par récurrence, on peut montrer que

$$u_n = \frac{1}{2}v_{n-1} - \frac{1}{2^2}v_{n-2} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u_0$$

Le terme $\left(-\frac{1}{2}\right)^n u_0$ tend vers 0, on cherche donc la limite de

$$w_n = \frac{1}{2}v_{n-1} - \frac{1}{2^2}v_{n-2} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0.$$

Supposons que $\lim v_n = 3l$. D'après la question précédente, on veut montrer que $\lim w_n = l$.
Remarquez que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\,\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On en déduit que

$$(w_n - l) = \frac{1}{2}(v_{n-1} - 3l) - \frac{1}{2^2}(v_{n-2} - 3l) + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - 3l) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n l$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n l = 0$, donc pour montrer que (w_n) tend vers l, il suffit de montrer que la suite

$$x_n = \frac{1}{2}(v_{n-1} - 3l) - \frac{1}{2^2}(v_{n-2} - 3l) + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - 3l)$$

tend vers 0.
On peut séparer la somme comme dans la preuve du théorème de Césaro : pour tout $n \geq N$

$$|x_n| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left|-\frac{1}{2}\right|^{n-k+1} |v_k - 3l| + \sum_{k=N}^{n} \left|-\frac{1}{2}\right|^{n-k+1} |v_k - 3l|$$

On sait que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N,\ |v_n - 3l| \leq \varepsilon.$$

On pose $\max_{k\in[\![0,N-1]\!]} |v_k - 3l| = M_N$. En calculant la somme des termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on trouve

$$|x_n| \leq M_N \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} + \varepsilon \sum_{k=N}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} \leq M_N \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} + \varepsilon$$

Il existe $N' \in \mathbb{N}$, $N > N'$ tel que pour tout $n \geq N'$, $M_N \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \leq \varepsilon$ et alors $|x_n| \leq 2\varepsilon$. Quitte à remplacer ε par 2ε, on a montrer que (x_n) tend vers 0, ce qui termine la peuve.

Exercice 3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexes convergeant vers l. Étudier la convergence de la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$b_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k \text{ pour } \geq 0.$$

C'est la même preuve que l'exercice précédente en remarquant que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. Vous devrez aussi montrer que pour k fixé, $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ tend vers 0 avec n (pensez à étudier le quotient u_{n+1}/u_n).

Exercice 4. Montrer que la suite de terme général complexe z_n définie par la relation de récurrence $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$ converge et calculer sa limite (hint : poser $z_n = \rho_n\, e^{i\theta_n}$).

On écrit $z_n = \rho_n\, e^{i\theta_n}$ avec $\theta_n \in]-\pi;\pi]$, $\rho_n \geq 0$ et

$$\rho_{n+1}e^{i\theta_{n+1}} = \frac{1}{2}\rho_n(1+e^{i\theta_n}) = \frac{1}{2}\rho_n e^{i\theta_n/2}(e^{-i\theta_n/2}+e^{i\theta_n/2}) = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}e^{i\theta_n/2}.$$

On en déduit que $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$, donc $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ et (θ_n) converge vers 0.
De plus $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}$, donc par récurrence :

$$\rho_n = \rho_0 \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta_0}{2^n} \quad \text{d'où } z_n = \rho_0\prod_{k=0}^{n}\cos\frac{\theta_0}{2^n}$$

Exercice 5. Étudier la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ où pour tout $n\in\mathbb{N}$, s_n est l'unique racine de $X^n + nX - 1$ dans $[0;1]$.

Faites un tableau de varaiations de la fonction $g_n(x) = x^n + nx - 1$ sur $[0,1]$. En déduire s_n existe et est unique. Remarquez que $g_n(\frac{1}{n})g_n(\frac{1}{n+1}) < 0$. En déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 6.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $u_{n+1}-u_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un segment.
2. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0;1]$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ssi $u_{n+1}-u_n \to 0$.

---

1. Supposer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux valeurs d'adhérence a et b, $a<b$. Soit $c\in]a;b[$. Faites un dessin et construire une suite qui tend vers c : soit le segment $[a,b]$ et un point c pas trop au milieu.
   Vu qu'il existe une suite extraite qui tend vers a et une autre qui tend vers b on prend u_n proche de a et u_{n+p} proche de b. Comme $u_{n+1}-u_n$ tend vers 0, pour aller de u_n à u_n+p, on fait des pas de plus en plus petit, on prend un indice tel que le pas permet de passer de avant c à après c.
   La formalisation : soit $N_0 = 0$, $\varphi(0) = 0$ et $n\geq 1$ et $\varepsilon_n < |b-a|/2^n$ le pas. Il existe $N_n > N_{n-1}$ tel que $|u_{n+1}-u_n| < \varepsilon_n$ et $p > max(N_n, \varphi(n-1))$ tel que $|U_p - a| < \varepsilon_n$ et $q > p$ tel que $|U_q - a| < \varepsilon_n$. On pose $\varphi(n)$, le plus grand indice entre p et q tel que $u_{\varphi(n)} \leq c$: par construction $c \in [u_{\varphi(n)}; u_{\varphi(n)+1}]$ et donc $|c - u_{\varphi(n)}| \leq \varepsilon_n$. Enfi, φ est strictement croissante, on a bien une suite extraite qui tend vers c.
2. Le sens intéressant est $\Leftarrow$: commencer par montrer par l'absurde que si a est une valeur d'adhérence, alors $f(a) = a$, vous aurez besoin de $f(u_n)-u_n$ tend vers 0. Puis utiliser le 1/.

Exercice 7. Calculer la limite des sommes (séries) suivantes :

1. $s_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\right)$;
2. $t_n = \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\times\cdots\times(1+\frac{n}{n})}$;
3. $u_n = \ln(1+\dfrac{\pi}{n})\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\cos(3k/n)}$.

Ce sont des sommes de Riemann. Tiercé gagnant : $\frac{\pi}{8}$, $\frac{4}{e}$, $\frac{\pi}{3}\tan\frac{3}{2}$.

Exercice 8. Calculer
$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\cos\frac{k\pi}{p} \quad \text{puis} \quad \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{\cos^k x},$$
lorsque ces expressions sont bien définies.

Indication générale : se ramener à des sommes de complexes du type $\sum_{k=0}^{n} q^k$. Rappel de cours : On pose $C_n = \sum_{k=1}^{n}\cos(a+bk)$, $C_n = \sum_{k=1}^{n}\sin(a+bk)$ et $T_n = C_n + iS_n$. On a $\mathrm{Re}\,(T_n) = C_n$ et $\mathrm{Im}\,(T_n) = S_n$. Puis on calcule
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kb)} = e^{ia}\sum_{k=0}^{n}(e^{ib})^k = e^{ia}\frac{1-e^{i(n+1)b}}{1-e^{ib}} = e^{ia}\frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}b}}{e^{i\frac{b}{2}}}\frac{e^{-i\frac{(n+1)}{2}b}-e^{i\frac{(n+1)}{2}b}}{e^{-i\frac{b}{2}}-e^{i\frac{b}{2}}}$$
et finalement
$$T_n = e^{i(a+\frac{n}{2}b)}\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}} = \cos\left(a+\frac{n}{2}b\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}} + i\left(a+\frac{n}{2}b\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}$$
d'oú les valeurs de C_n et S_n.

1/ En particulier, si $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{p} + \pi$, alors C_n s'écrit
$$\sum_{k=1}^{p}\cos\left(\frac{k\pi}{p}+k\pi\right) = \sum_{k=1}^{p}(-1)^k\cos\frac{k\pi}{p},$$
car $\cos(x+k\pi) = (-1)^k\cos x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $k\in\mathbb{Z}$. On trouve alors facilement la valeur de l'expression demandée.

2/ De même, on calcule
$$T_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x} + i\frac{\sin kx}{\cos^k x} = \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{\cos^k x} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}} = \frac{1-\dfrac{e^{inx}}{\cos^{n+1}x}}{-i\dfrac{\sin x}{\cos x}}.$$
l'avant dernière égalité étant la sommes des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{e^{ix}}{\cos x}$.
Pour terminer le calcul, on prend la partie rélle et la partie imaginaire de T_n et on obtient
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x\cos^n x} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{\cos^k x} = \frac{\cos^{n+1}x-\cos(n+1)x}{\sin x\cos^n x},$$
lorsque ces expressions sont bien définies.

0.2 Suites récurrentes

Exercice 9. Soit la suite (u_n) de terme générale tel que $u_0 > 0$ et
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+nu_n^2}.$$

1. Etudier la convergence de (u_n).
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $0 < u_n < \frac{1}{n}$.
3. En considérant la suite $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ trouver un équivalent de (u_n).

---

1. la suite est positive (par récurrence) puis décroissante, donc converge.
2. Étudier la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+nx}$ et par récurrence.
3. Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = nu_n$ est une suite croissante majorée par 1 donc convergente et $nu_n \sim a \neq 0$.Sommer entre 0 et n : du premier côté c'est équivalent à $\frac{1}{u_{n+1}} \sim \frac{n}{a}$ et de l'autre par Césaro à an, donc $a = 1$.

Exercice 10. Soit $u_0 \in]0; \frac{1}{2}[$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)u_n$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$.
3. En considérant la suite $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$, trouver un équivalent de (u_n).

Exercice 11. Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et admettant un développement limité en 0 de la forme :

$$f(x) = x + \lambda x^k + o(x^k)$$

avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ et $\lambda \neq 0$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par sa valeur initiale u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et converge vers 0. Montrer que u_n est de signe constant pour n assez grand et que l'on a

$$|u_n| \sim \frac{1}{((k-1)|\lambda|)^{\frac{1}{k-1}}} \times \frac{1}{n^{\frac{1}{k-1}}}.$$

On est dans le cas où $f'(0) = 1$, la convergence de $u_{n+1} = f(u_n)$ est lente. On a le développement :$|u_{n+1}| = |u_n|(1 + \lambda u_n^{k-1} + o(u_n^{k-1}))$ pour n assez grand. On calcule pour $r > 0$

$$\frac{1}{|u_{n+1}|^r} - \frac{1}{|u_n|^r} = \frac{1}{|u_n|^r} \times \frac{-r\lambda u_n^{k-1} + o(u_n^{k-1})}{1 + r\lambda u_n^{k-1} + o(u_n^{k-1})}.$$

Cette suite admet une limite finie non nulle si on a $r = k-1$. Dans ce cas, la limite est nécessairement positive, sinon $\dfrac{1}{|u_n|^r}$ tendrait vers $-\infty$. On en déduit qu'elle vaut $(k-1)|\lambda|$. Et on conclut avec le lemme de l'escalier.

0.3 Généralités sur les séries

Exercice 12. On considère une suite décroissante de réels positifs (a_n) telle que la série correspondante $\sum a_n$ est convergente. Montrer que la suite (na_n) converge vers 0.
La réciproque est-elle vraie ?

La suite (S_n) est convergente, donc $S_{2n} - S_n$ tenv ders 0 : $\forall \varepsilon$, $\exists N$ tel que si $n > N$,

$$\varepsilon > |S_{2n} - S_n| = a_{2n} + \cdots + a_{n+1} \geq na_{2n}$$

puisque (a_n) à termes positifs et décroissante et donc $(\dfrac{n}{2}a_n)$ tend vers 0, d'où le résultat.

La réciproque est fausse :$\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge : de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$.

Exercice 13. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes positifs telle que la série $\sum a_n^2$ est convergente. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui même.

1. Montrer que la série $\sum a_n a_{\sigma(n)}$ est convergente.
2. Pour quelle(s) permutation(s) la somme est maximale.

On écrit que $a_n a_{\sigma(n)} \leq \dfrac{1}{2}(a_n^2 + a_{\sigma(n)}^2)$ et on majore les sommes partielles par $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ et on a égalité ssi $a_n = a_{\sigma(n)}$, c'est-à-dire ssi $a_n \mapsto a_{\sigma(n)}$ est l'identité.

Exercice 14. Déterminer la nature des séries de terme général :

$$u_n = (n+1)^{1/2} - n^{1/2}, \quad v_n = \frac{(n+1)^{1/2} - n^{1/2}}{n} \quad w_n = (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n, \quad x_n = \frac{n^3}{n!}, \quad y_n = \left(\frac{3n+3}{7n+1}\right)^n$$

$$z_n = \frac{a^{(-1)^n}}{n}, \; a \in \mathbb{R}^* \quad a_n = \frac{\cos(5n\pi)}{n^\alpha}, \; \alpha > 0.$$

1/ Suite téléscopique divergente. 2/ multiplier par la quantité conjuguée et donner un équivalent. 3/ Majorer par une série géométrique convergente. 4/ Critère de D'Alembert. 5/ Majorer par une série géométrique convergente. 6/ minorer par une série divergente. 7/ Série alternée.

0.4 Comparaisons

Exercice 15. Nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} + \frac{1}{n}(\alpha n^2 + \beta n + \gamma)$$

suivant les valeurs de α, β et γ des réels.

Calculer un dévellopement asymptotique de u_n.
On sait que

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + O(\frac{1}{n^4}))} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + O(\frac{1}{n^4}))} \\
&= \frac{n}{1 - (\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} + O(\frac{1}{n^3}))} \\
&= n \times \left[1 + (\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}) + (\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2})^2 + O(\frac{1}{n^3})\right] \\
&= n \times \left[1 + \frac{1}{2n} + (-\frac{1}{6} + \frac{1}{4})\frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})\right]
\end{aligned}$$

On trouve $u_n = (1+\alpha)n + (\frac{1}{2} + \beta) + (\frac{1}{12} + \gamma)\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.
La série est convergente ssi $\alpha = -1$, $\beta = -\frac{1}{2}$ et $\gamma = -\frac{1}{12}$.

Exercice 16. Étudier les séries de terme général :

$$a)\ u_n = \left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-1/6} \quad b)\ u_n = \sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right] \quad c)\ u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^a},\ a \in \mathbb{R} \quad d)\ \sin(\pi e n!)$$

Pour le b) penser au conjugué : $(2-\sqrt{3})^n$, pour le d) écrire $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n$.

a) On calcule $n^2 \ln n \sin\frac{1}{n} = n^2 \ln(1 - \frac{1}{6n^2} + O(\frac{1}{n^4})) = -\frac{1}{6} + O(\frac{1}{n^2})$ et don la série converge car $u_n = O(\frac{1}{n^2})$.
b) On écrit

$$(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \left[\sqrt{3}^k(-1)^k + \sqrt{3}^k\right] = 2\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k = 2N$$

donc $u_n = \sin\left[\pi(2N - (2-\sqrt{3})^n)\right] \sim -(2-\sqrt{3})^n \pi$ donc converge absolument.
c) écrie $u_n = \exp(-n^a \ln(1+\frac{1}{n}) = \exp(-n^{a-1} + O(n^{a-1})$; si $a \leq 1$ la série diverge grossièrement et si $a > 1$, alors

$$\lim n^2 u_n = \lim \left(n^2 \exp(-\frac{n^{a-1}}{2})\right)\left(\exp(-\frac{n^{a-1}}{2} + O(n^{a-1})\right) = 0$$

et donc la série à termes positifs converge car est un $O(1/n^2)$.
d)On a $U_n = \sin\left(\pi\left[n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + n! R_n\right]\right)$. Or

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = n! + \frac{n!}{1} + \cdots + \frac{n!}{(n-2)!} + n(n-1) + n + 1 = 2N + n + 1 \Rightarrow u_n = (-1)^{n+1} \sin n! R_n \pi$$

Montrons que $n!R_n$ est décroissante (positive) et tend vers 0 : pour cela

$$\frac{1}{n+1} < n!R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{1}{n}$$

d'où $n!R_n \leq \frac{1}{n} \leq (n-1)!R_{n-1}$. La série est une série alternée, donc converge.

Exercice 17. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2n^3+1}{n!}$.

On vérifie que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \dfrac{1}{n}$ donc la série converge.

De plus, $\sum u_n = 2\sum \dfrac{n^3}{n!} + \sum \dfrac{1}{n!}$ et $n^2 = (n-2)(n-1) + 3(n-1) + 1$, d'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{(n-2)!} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} = 5e$$

et $\sum u_n = 11e$.

Exercice 18. Nature des séries de terme général $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln(1-\dfrac{1}{n})\right)$ et $v_n = \sin(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n})$.

On montre que $u_n = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{3n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right)$ dont on déduit que $\sum u_n$ converge.

On calcule $2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}) \sim 2\pi n\left[1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right]^{1/2} = 2n\pi + \dfrac{(-1)^n\pi}{n} + o(\dfrac{1}{n^2})$.

Donc la série est la somme d'une série alternée convergente et d'une série absolument convergente, donc converge, mais pas absolument.

Exercice 19. Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{a^n n^n}$, $a \in \mathbb{R}_*$.

On calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{a} \times \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{a} \exp\left[-n\ln\bigl(1+\frac{1}{n}\bigr)\right].$$

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{ea}$. Le critère de D'Alembert, montre que si $a > \dfrac{1}{e}$, alors la série converge et si $a \geq \dfrac{1}{e}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ car $\ln(1+\dfrac{1}{n}) \leq \dfrac{1}{n}$. Donc, dans ce cas, la série est grossièrement divergente.

Exercice 20. Nature de la série de terme général $u_n = \arccos(\frac{2}{\pi}\arctan n^2)$.

On se rappelle que pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. et donc $u_n = \arccos\left(1 - \dfrac{2}{\pi} \times \arctan \dfrac{1}{n^2}\right)$.

1. On peut calculer un développement généralisé de u_n. En effet, la dérivée de $f(x) = \arccos(1-x)$ vaut
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{2x}}$$
Or $g(x) = \sqrt{2x}$ admet pour dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.
La règle de l'hôpital nous dit que $\lim_0 \dfrac{f}{g} = \lim_0 \dfrac{f'}{g'} = 1$, donc $f(x) \sim \sqrt{2x}$. On en déduit que $u_n \sim \dfrac{2}{n\sqrt{\pi}}$.
2. O peut aussi étudier $\cos u_n$.
On a $\cos(u_n) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{n^2}$ qui tend vers 1, donc $1 - \cos(u_n) = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{n^2}$ donne $\frac{u_n^2}{2} \sim \frac{2}{\pi n^2}$ et $u_n \sim \dfrac{2}{n\sqrt{\pi}}$; la série diverge.

0.5 Autres

Exercice 21. On fixe $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = (u_n - u_n^2)/2$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si $a \in]-1;2[$.
2. Montrer que la suite (u_n) prend la valeur 0 ssi $a = 0$ ou $a = 1$.
3. On fixe $a \in]-1;2[\setminus\{0,1\}$. Calculer la limite du rapport $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ et en déduire que la série de terme général u_n converge ssi $a \in]-1;2[$.

---

1. La suite est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{x-x^2}{2}$ et $g(x) = f(x) - x = -\dfrac{x+x^2}{2}$. la fonction g est positive sur $[-1,0]$ et négative sinon.
   Les variations de f sont

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
f'			$\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		0		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{2}$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

   L'image par f de $]2,+\infty[$ est $]-\infty,-1[$ qui est un intervalle stable. la fonction g est alors négative, donc (u_n) décroissante, elle ne peut converger car f n'admet pas de point fixe < -1. La suite (u_n) tend donc vers $-\infty$ pour $a \in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$.
   Si $a = -1$, alors la suite est constante et si $a = 2$, alors la suite est constante à partir du rang 1.
   Si $a \in]-1,0]$ intervalle stable de f et sur lequel $g \geq 0$, la suite (u_n) est croissante et converge car bornée vers l'unique point fixe > 1, donc vers 0.
   De même, si $a \in [1,2[$, $u_1 \in]-1,0]$ et la suite converge vers 0. Enfin, si $a \in [0,1]$, alors l'intervalle est stable par f et g est négative sur cette intervalle, la suite (u_n) est décroissante et tend vers 0.
2. Le tableau de variations montre que 0 est atteint en 0 et 1 et que 1 n'est pas atteint, d'où le résultat.
3. La suite (u_n) tend vers 0, $u_n \neq 0$ et à partir d'un certain rang
   $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1-u_n}{2}$$
   qui tend vers $\dfrac{1}{2}$. Le critère de D'Alembert s'applique.

Exercice 22. Calculer la sommes des séries suivantes après avoir justifier leur convergence :

$$1/\sum \frac{1}{n(n+1)}, \quad 2/\sum \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \quad 3/\sum \frac{2n-1}{n(n^2-4)}.$$

Pour le 1/, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc la série est téléscopique, elle converge de somme le premier terme : 1.
Pour le 2/, c'est le même principe :

$$\sum \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n-1} + \frac{1/2}{n-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right)$$

somme de deux suites téléscopiques, donc converge, La somme est la différence des deux premiers termes (la somme commence à $n = 3\,!$) : $\frac{-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Le principe reste le même pour le 3/ :

$$\frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{1/4}{n} + \frac{3/8}{n-2} + \frac{-5/8}{n+2} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

donc $\sum u_n$ est une somme de 4 séries téléscopiques !

Exercice 23. Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la série harmonique.

Exprimer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$ en fonction H_{2n} et $\frac{1}{2}H_n$ et en déduire que $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{k(2k+1)} = 2(1-\ln 2)$.

On trouve $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n - 1 + \frac{1}{2n+1}$.

On montre que $\frac{1}{k(2k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{-2}{2k+1}$, d'où

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)} = H_n - 2S_n = \ln n + \gamma + o(1) - \ln n - 2(\ln 2 - 1) + 2 \times \frac{1}{2}\gamma + o(\frac{1}{n}) = 2(1-\ln 2),$$

où l'on a utilisé $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, γ la constante d'Euler.

Exercice 24.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $u_{n+1}-u_n \sim \dfrac{c}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ et $c > 0$.

   Montrer que la suite u_n converge vers une limite l et on a $u_n - l \sim \dfrac{-c}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2. Rappeler la démonstration de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$

   (a) Poser $v_n = H_n - \ln n - \gamma$ et calculer un dl de $v_{n+1}-v_n$. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})$.

   (b) Poser $w_n = H_n - \ln n - \gamma - \dfrac{1}{2n}$ et calculer un dl de w_n et recommencer... en déduire

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + o(\frac{1}{n^6})$$

---

1. c'est du cours : On sait que si $v_n \sim w_n$ des séries à termes constants et si $\sum_n w_n$ converge, alors les restes $\displaystyle\sum_{k\geq n+1} v_k \sim \sum_{k\geq n+1} u_k$.

   Mais si $v_n = (u_{n+1}-u_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} v_k = u_{N+1} - u_{n+1}$. Comme $\lim u_n = l$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k\geq n+1} v_k = l - u_{n+1}$.

   D'autre part, le reste d'une série de Riemann convergente est équivalent à $\dfrac{1}{\alpha-1} n^{\alpha-1}$. On en déduit le résultat.

2. $\dfrac{1}{1+x} - \ln(1+x) = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ en 0. Ce qui donne $v_{n+1}-v_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.

   On sait donc que $\sum v_{n+1} - v_n$ converge et que le 1/ nous dit que $v_n \sim \dfrac{1}{2n}$

Exercice 25. Calculer de deux manières différentes $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}$ (avec un produit de Cauchy ou une série géométrique).

Méthode rapide : Calculer $\sum_{k=0}^{n} x^k$, puis dériver les deux expressions et appliquer le résultat à $x = 1/3$.

Avec le produit de Cauchy : $\sum_{k=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right)$.

Exercice 26. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

D'après la formule classique pour les séries géométriques, on a

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n \geq 0} a^n \text{ et } \frac{1}{1-b} = \sum_{n \geq 0} b^n.$$

Ces deux séries sont absolument convergentes puisque $|a| < 1$ et $|b| < 1$. On peut faire le produit de Cauchy et donc on obtient que

$$\frac{1}{1-a} \times \frac{1}{1-b} = \sum_{n \geq 0} w_n \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

Si $a = b$, on trouve directement que $w_n = \sum_{k=0}^{n} a^n = (n+1)a^n$. Si $a \neq b$, alors il faut utiliser la factorisation

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

qui donne le résultat.

Exercice 27. Soit (u_n) une suite numérique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k.$$

1. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
   En observant un produit de cauchy, montrer que la série $\sum v_n$ converge et exprmier sa somme en fonction de $\sum u_n$.
2. On suppose dans cette question que la suite (u_n) tend vers 0. Déterminer la limite de (v_n).
3. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge. Montrer la convergence de $\sum v_n$ et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

1/ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n-k}} u_k$ est le produit de Cauchy des séries de terme général u_k et $\dfrac{1}{2^k}$.

2/ Utiliser des ε pour montrer que (v_n) tend vers 0 : pour $n > N$

$$|v_n| \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N-1} 2^k |u_k| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N}^{n} 2^k |u_k|$$

3/ On calcule

$$\sum_{n=0}^{n} v_n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{N} u_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{2^{n-k}} = 2\sum_{k=0}^{N} u_k \left(1 - \frac{1}{2^{N-k+1}}\right) = 2\sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{k=0}^{N} \frac{u_k}{2^{N-k}}.$$

D'après la question précédente, le terme de droite tend vers 0 et donc la somme des v_n tend vers 2 fois celle des u_n.