Feuille de TD n° 2

Matrices

18 mars 2020

Pour commencer

Exercice 1. Calculer si c'est possible :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}^2$; $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}^2$; $\begin{pmatrix} 2 & 3 & i \\ 2 & 1-i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1+i \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ i & 0 & 1 & i \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} a_1, a_2, \cdots, a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1, b_2, \cdots, b_n \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. À quelles conditions les produits AB et BA sont-ils simultanément possibles ? Comment est la matricie produit ?
2. Vérifier que le produit A^tA est toujours possible, et donner la particularité de cette matrice produit. Quelle particularité supplémentaire a la diagonale de A^tA, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente : c'est-à-dire $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $A^{m+1} = 0$.
On pose $exp(A) = \sum_{p\geq 0} \frac{A^P}{p!}$ avec la convention $A^0 = I_n$ (remarquer que cette somme est en fait finie).

1. Calculer $exp(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On suppose que A et B sont nilpotentes et commutent ; démontrer que $e^{A+B} = e^Ae^B$.
3. En déduire que $exp(A)$ est inversible.

Pour continuer

Exercice 4. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = A + B$$

Calculer $(I_n - A) \cdot (I_n - B)$. En déduire que A et B commutent.

On a $(I_n - A) \cdot (I_n - B) = I_n$ donc $I_n - A$ et $I_n - B$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre. Donc $I_n = (I_n - B) \cdot (I_n - A) = I_n - A - B - BA$, d'ou $AB = BA = A + B$.

Exercice 5. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices symétriques. On rappelle que ${}^t(AB) = {}^tB^tA$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B, pour que le produit AB soit encore symétrique.
2. Les puisssances successives de A sont-elles symétriques ?
3. Si A est inversible, A^{-1} est-elle symétrique ?

Exercice 6 (EMS 2016-2017)**.** On considère l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

On note $+$ l'addition des matrices, $\times$ la multiplication des matrices, et $\cdot$ le produit d'un scalaire de $\mathbb{K}$ et d'une matrice.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?
2. Montrer que F est stable par $\times$.
3. Montrer que $(F, +, \times)$ est un anneau. Est-il commutatif ?
4. Trouver les éléments inversibles de F et calculer leur inverse.

Pour aller plus loin

Exercice 7 (EMS 2017-2018)**.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice antisymétrique A, une matrice symétrique S et un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que
$$M = A + S + cI_n$$
$$\text{et } \operatorname{Tr}(S) = 0.$$
2. Montrer que l'on a l'égalité :
$$\operatorname{Tr}\left(M^2\right) = \operatorname{Tr}\left(A^2\right) + \operatorname{Tr}\left(S^2\right) + \frac{1}{n}\left(\operatorname{Tr}(M)\right)^2.$$

Exercice 8. Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que :

— B est **nilpotente**, *i.e.* il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 0$;
— A et B commutent.

1. Montrer que BA^{-1} est nilpotente.
2. Montrer que A est inversible si et seulement $A + B$ est inversible.
3. Trouver un exemple de matrices A et B tel que A est inversible, B est nilpotente et $A + B$ n'est pas inversible.

Exercice 9. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. On pose

$$A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leq k, \ell \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

Calculer $A\bar{A}$, ($\bar{A} = (a'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $a'_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$). En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.