TD n° 4

Tribus et exemples

26 mars 2020

0.1 Tribus, Limites supérieures

Exercice 1. Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite symétrique si $A = -A$, où

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A,\ x = -y\}.$$

Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ l'ensemble des parties symétriques de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{A} = \{A \cup (-A) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu de $\mathbb{R}$.
3. Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall A \in \mathcal{A},\ f^{-1}(A) \in \mathcal{A}.$$
4. Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ f^{-1}(X) \in \mathcal{A}.$$
5. Montrer que $\mathcal{A}$ est la tribu image réciproque de la tribu grossière $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par la fonction valeur absolue $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Décrire la tribu engendrée par $\{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R}\}$.
Indication : On pourra commencer par montrer qu'elle est incluse dans $\mathcal{A}$ ainsi que dans la tribu engendrée par les singletons.

---

1. On pose $\mathcal{A}' = \{A \cup (-A) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$. Soit $B = A \cup -A \in \mathcal{A}'$, alors $-B = -A \cup A = A \cup -A = B$, donc $B \in \mathcal{A}$. Réciproquement, si $A \in \mathcal{A}$, alors $A = A \cup A = A \cup -A$ car $A = -A$ et donc $A \in \mathcal{A}'$. Par double inclusion, on a montré l'égalité.
2. Il est clair que $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. De plus, si $A \in \mathcal{A}$, alors $x \notin A$ ssi $-x \notin A$, et donc $-\overline{A} = \overline{A}$. Enfin, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors $A_n = A_n \cup (-A_n)$ et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup -\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. D'parès 1), $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
3. Ce sont les fonctions f telles que $x \mapsto |f(x)|$ est pair : supposons $f(-x) \neq f(x)$, alors $f^{-1}(\{f(x)\})$ ne contient pas $-x$, mais par hypothèse $-x \in f^{-1}(\{f(x), -f(x)\})$, donc $f(-x) = -f(x)$. Réciproquement, si $x \mapsto |f(x)|$ est paire, alors la propriété est vérifiée.
4. De même, cesont les fonctions paires f est paire : on sait d'après la question précédente que $x \mapsto |f(x)|$ est paire. Mais si $f(x) \neq f(-x)$, alors $f^{-1}\{f(x)\})$ contient x, mais pas $-x$. On en déduit $f^{-1}\{f(x)\}) \notin \mathcal{A}$, ce qui est exclu par hypothèse. On a montré $f(-x) = f(x)$ pour tout x. Réciproquement, si f est paire, on vérifie facilement $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ f^{-1}(X) \in \mathcal{A}$.
5. Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, alors $V^{-1}(X) = X \bigcup -X$ et d'après 1/, c'est la tribu $\mathcal{A}$.
6. On va montrer que c'est la tribu
$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \text{tel que } X \text{ ou } \overline{X} \text{ est au plus dénombrable}\}.$$
Il et clair que la tribu $\mathcal{D}$ engendrée par $\{a, -a\}$ contient $\mathcal{C}$ car une tribu est stable par union dénombrable et par passage au complémentaire. Pour montrer que $\mathcal{D} = \mathcal{C}$, il reste à prouver que $\mathcal{C}$ est une tribu, donc que $\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \text{tel que } X \text{ ou } \overline{X} \text{ est au plus dénombrable}\}$.. Elle contient $\mathbb{R}$ car $\emptyset$ est de cardinal nul. De plus, elle est par définition stable par passage au complémentaire. Soit $(X_n) \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, Si tous les X_n sont au plus dénombrables, alors $\bigcup_n X_n$ est au plus dénombrable et donc appartient à $\mathcal{X}$. Et si l'un des X_{n_0} n'est pas dénombrable, alors $\overline{X_{n_0}}$ est au plus dénombrable. Donc $\overline{\bigcup_n X_n} = \bigcap_n \overline{X}_n \subset \overline{X}_{n_0}$ est au plus dénombrable et appartien encore à $\mathcal{C}$. On a montré que $\mathcal{C}$ est bien la plus petite tribu contenant les $\{-a, a\}$.

Exercice 2. On souhaite montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.
Soit donc X un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu au plus dénombrable sur X. On va montrer que X est finie. Pour tout $x \in X$, soit

$$A(x) = \bigcap_{x \in A, A \in \mathcal{A}} A.$$

1. Montrer que $A(x) \in \mathcal{A}$.
2. Montrer que $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ contenant x.
3. Montrer que $y \in A(x) \Rightarrow A(y) = A(x)$.
4. Soit x et x_0 deux éléments de X. Montrer que $A(x) = A(x_0)$ ou bien $A(x) \cap A(x_0) = \emptyset$.
5. Soit $\mathcal{E} = \{B \subset X \mid \exists x \in X, B = A(x)\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est engendrée par $\mathcal{E}$.
6. En déduire que toute tribu au plus dénombrable est finie.

$\mathcal{A}$ est supposée dénombrable.

1. Une tribu est stable par intersection dénombrable.
2. Puisque c'est l'intersection de toutes les parties qui contiennent x, elle contient x et si une partie de $\mathcal{A}$ contient x, alors elle contient son intersection avec toutes les autres.
3. En fait l'idée est que si $B \subset A(x)$ une sous partie propre, alors elle est vide : on a $x \in B$, ou $x \in \overline{B}$ et donc $B = \emptyset$ ou $\overline{B} = \emptyset$.
4. Conséquence de la question précédente et donc les $A(x)$ forment une partition (dénombrable).
5. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{x \in A} A(x)$ qui est une union au plus dénombrable donc dans la tribu engendrée par $\mathcal{E}$. L'inclusion inverse étant déjà vue, on a égalité.
6. Soit $I = \{A(x),\ x \in A\}$. L'ensemble I est au plus dénombrable et $\mathcal{A}$ est en bijection $\mathcal{P}(I)$. Or, si I est fini, $\mathcal{P}(I)$ aussi et si I est dénombrable, alors $\mathcal{P}(I)$ ne l'est plus. Ce qui termine la preuve.

Trouver la tribu engendrée par une classe $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble E se fait généralement en ajoutant à C les unions dénombrables et les complémentaires des parties de $\mathcal{C}$. Si l'on obtient ainsi une tribu, on a bien trouvé la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Manque de chance, cela ne marche pas toujours, notamment pour le cas de la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Si l'on procède de la sorte en partant des intervalles réels, on ne tombe en effet pas sur une tribu. Il faut en fait itérer ce processus par récurrence transfinie pour obtenir la tribu des boréliens.

Cela explique pourquoi il est impossible de fournir une description explicite complète des boréliens de $\mathbb{R}$. On peut montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ a la puissance du continu, ce qui montre l'existence de non-boréliens (car $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a une puissance strictement supérieure à celle du continu).

Exercice 3. Soit Ω un ensemble. On appelle *limite supérieure* des A_n, et on note $\limsup_n A_n$ l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n.
On appelle *limite inférieure* des A_n, et on note $\liminf_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux.

1. Écrire les définitions de $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Les traduire en termes ensemblistes à l'aide de $\bigcap$ et $\bigcup$.
2. Déterminer les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les cas suivants :
   (a) $A_n =]-\infty, n]$;
   (b) $A_n =]-\infty, -n]$;
   (c) $A_{2n} = A$, $A_{2n+1} = B$;
   (d) $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

0.2 Exemples

Exercice 4. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

On va procéder par récurrence sur n, le point clé étant la formule

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

La propriété est vraie si $n = 1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On pose $A = A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$ et $B = A_n$. Alors, d'après la formule précédente

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A)$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$, et on obtient

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

Exercice 5. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que pour tout évènement A et B

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

On pourra commencer par vérifier que l'inégalité est vérifiée A si $A \cap B = \emptyset$.

Le cas $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ vient du fait que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{A}) \leq \frac{1}{4}$: étudier le maximum de $x(1-x)$ sur $[0,1]$. On a bien sûr $B \subset \overline{A}$. Puis pour A et B est quelconque, on pose $A' = A \setminus A \cap B$ et

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A' \cup (A \cap B))\mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(B)) - \mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4},$$

car différence de deux réels positifs inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 6. Montrer la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = p_1 - p_2 + \cdots + (-1)^{n-1} p_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k$$

où

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

On procède par récurrence, le cas $n = 1$ s'écrivant $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$.
Posons $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et appliquons la formule

$$\mathbb{P}(B \bigcup A_{n+1}) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}\left(B \bigcap A_{n+1}\right)$$

Par récurrence,

$$\mathbb{P}(B) = p_1 - p_2 + \cdots + (-1)^{n-1} p_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k$$

avec

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

et en posant $\widetilde{A}_k = A_k \bigcap A_{n+1}$ pour $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \widetilde{A}_k\right) = \widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \widetilde{p}_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \widetilde{p}_k$$

et

$$\widetilde{p}_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(\widetilde{A}_{i_1} \cap \cdots \cap \widetilde{A}_{i_k}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}).$$

Les p_k et les $\widetilde{p}_k$ et $\mathbb{P}(A_{n+1})$ au rang n permet de retrouver les p_k du rang $n+1$ avec le bon signe.

Exercice 7. Un facteur possède n lettres adressées à n destinataires distincts. Il est totalement ivre et poste au hasard une lettre par boîte.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la bonne répartition ?
2. Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins arrive à la bonne adresse ?
3. Quelle est la probabilité qu'aucune lettre n'arrive à la bonne destination ?
4. Quel est le nombre d_n de manières différentes de poster les lettres de telle sorte qu'aucune n'arrive à destination ?

---

1. Il y a clairement $\dfrac{1}{n!}$ possibilités.
2. Notons A_i l'évènement la i-ème lettre arrive à bon port : $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$.
3. On veut caluler la probabilité de l'évènement au moins une lettre arrive à bon port $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et avec la formule de Poincarré on obtient :
$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$
La probabilité qu'aucune lettre n'arrive à bon port est $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$.
4. On en déduit que $d_n = n! \times \mathbb{P}(\overline{E})$. Quand n tend vers $+\infty$, cette quantité tend vers $1 - e^{-1} \sim 0,632$.