

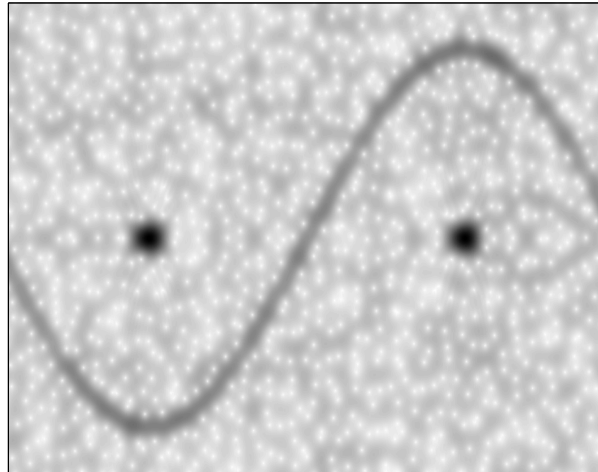
## Polycopié du cours de traitement du signal

Nom :

Prénom :

Promo : 2016

Année de l'enseignement : 2020



Ce polycopié, rédigé en avril 2020, est destiné aux élèves de la promo 2016 de l'école Centrale de Pékin. Merci de ne pas diffuser ce document sur le réseau internet. Il s'agit d'un support pour l'enseignement de traitement du signal d'Antoine Roueff, enseignant-chercheur à l'école Centrale de Marseille. L'objectif de cet enseignement est de présenter les éléments clés du traitement du signal et d'illustrer la méthodologie en science des données. Plusieurs questions sont posées (en rouge) afin de rendre, dans la mesure du possible, la séance de cours à distance **interactive**. De plus, des programmes `Matlab` sont fournis pour illustrer certains aspects. Si c'est possible, récupérer les programmes afin de pouvoir lancer les simulations pendant le cours.

### Programme

#### 0 Introduction

#### 1 Principales représentations en traitement du signal

- 1.1 Représentation des systèmes de convolution
- 1.2 Séance de TD sur les systèmes de convolution
- 1.3 Classification des signaux et numérisation de l'information
- 1.4 Séance de TD sur l'échantillonnage
- 1.5 Caractérisation et représentation des fonctions aléatoires
- 1.6 Séance de TP sur l'analyse spectrale
- 1.7 Filtrage des fonctions aléatoires
- 1.8 Séance de TD sur le filtrage des fonctions aléatoires

#### 2 Illustration en science des données : la discrimination

- 2.1 Discrimination linéaire
- 2.2 Séance de TP sur la discrimination linéaire
- 2.3 Méthode probabiliste
- 2.4 Séance de TP sur la méthode probabiliste
- 2.5 Analyse de différentes approches possibles sur un exemple
- 2.6 Séance de TP sur la reconnaissance de chiffres
- 2.7 Risque de Bayes
- 2.8 Séance de TP sur le risque de Bayes

## 0 Introduction

Ce chapitre introductif a pour but de présenter le contexte scientifique ainsi que les objectifs de cet enseignement.

**Qu'est-ce que le traitement du signal ?**

**Qu'est-ce qu'un algorithme ?**

En termes mathématiques, une donnée est représentée par un vecteur  $\mathbf{y}$ , une information par un vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  et un algorithme par une fonction  $f$ . Le problème consiste à trouver une fonction  $f$  telle que

$$\boldsymbol{\theta} = f(\mathbf{y})$$

**Exemple 1.** On considère des photos de chiens et de chats. On veut définir une technique de traitement du signal capable de reconnaître si une photo représente un chien ou un chat.

**Que proposez-vous pour résoudre ce problème ?**

**Exemple 2.** On considère un signal  $x$  échantillonné avec le temps d'échantillonnage  $T_e$  (voir figure 1).

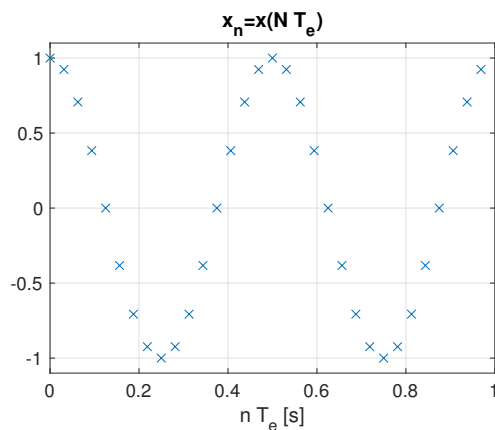


FIGURE 1 – Représentation d'un signal  $x$  échantillonné avec un temps d'échantillonnage  $T_e$ .

La donnée d'entrée est  $\mathbf{y} = (x_n)_n$  et pour  $t$  fixé, on cherche l'information  $\boldsymbol{\theta} = x(t)$ .

**Que proposez-vous pour résoudre ce problème ?**

Avant de rentrer dans les détails techniques, essayons d'effectuer un petit rappel historique.

**Depuis quand le traitement du signal existe ?**

A la fin des années 40, la théorie de l'information est découverte. **Quelles en sont les conséquences ?**

A la fin du XXème siècle, le traitement du signal est utilisé dans de nombreux domaines : les communications, le multimédia, la finance, ... **Quelles sont les avancées techniques / technologiques / scientifiques qui expliquent cette évolution ?**

**Quels sont les changements auxquels nous assistons en ce début de XXIème siècle ?**

**Exemples d'application ?**

**Pourquoi est-ce important d'avoir une formation dans ce domaine pour une formation généralistes ?**

**Quelles sont les compétences requises pour un ingénieur en traitement du signal ?**

## Illustration des problèmes qui peuvent apparaître en traitement du signal.

**Exemple d'un système d'imagerie.** Pour simplifier, on suppose que l'organe auquel on s'intéresse ressemble à un disque (voir figure 2(a))

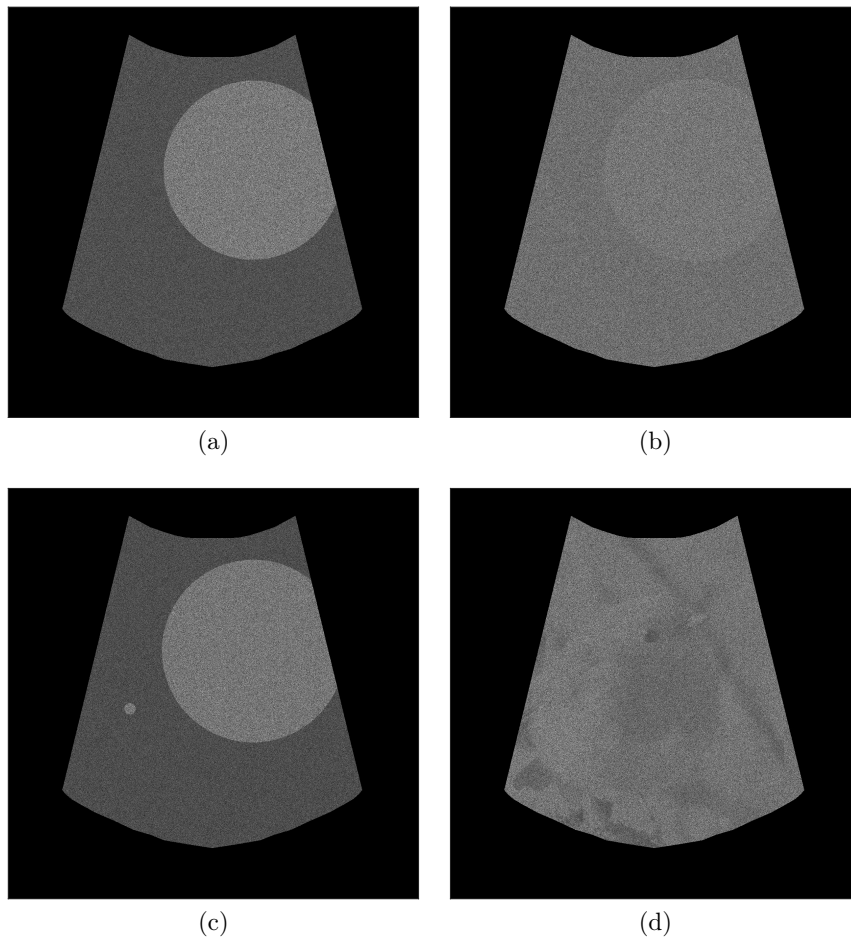


FIGURE 2 – Exemple d'un système d'imagerie. Lancez le programme `main_speckle` sous Matlab.

**D'où vient la difficulté de l'analyse de la figure (b) ?**

**D'où vient la difficulté de l'analyse de la figure (c) ?**

**D'où vient la difficulté de l'analyse de la figure (d) ?**

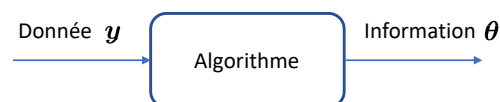


FIGURE 3 – Le TS consiste à définir un algorithme qui à partir d'une donnée extrait une information.

Le traitement du signal (TS) joue un rôle structurant car pour chaque problème, vous devez choisir la bonne représentation, le bon point de vue, en fonction des connaissances a priori dont vous disposez sur les mécanismes physiques mis en œuvre et en fonction de la tâche à accomplir. L'objectif de cet enseignement est qu'à l'issue de cet enseignement, les élèves maîtrisent les concepts de bases afin d'être capable d'interagir avec des spécialistes.

# 1 Principales représentations en traitement du signal

## 1.1 Représentation des systèmes de convolution

En traitement du signal, l'étude des systèmes (voir figure 4) est fondamentale. En particulier, les systèmes sont utilisés pour décrire les interactions entre le signal mesuré par le capteur et le monde physique.

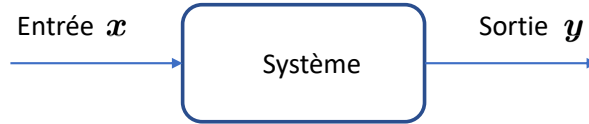


FIGURE 4 – Représentation d'un système avec une entrée  $x$  et une sortie  $y$ .

### Exemple ?

Soit  $\mathcal{S}$  un **système** avec une entrée  $x$  et une sortie  $y$ . On utilise la notation  $y = \mathcal{S}(x)$  ou  $y(t) = \mathcal{S}(x)(t)$ .

Le système  $\mathcal{S}$  est **linéaire**, si  $\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2, \forall (x_1, x_2), \mathcal{S}(a_1x_1 + a_2x_2)(t) = a_1\mathcal{S}(x_1)(t) + a_2\mathcal{S}(x_2)(t)$ .

### Exemple : un système régi par

$$y(t) = a_0x(t - \tau) + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2x^2(t) + a_3 \log |x(t)|$$

### est-il linéaire ?

Le système  $\mathcal{S}$  est **stationnaire**, si pour  $y_1(t) = \mathcal{S}(x_1)(t)$  et  $x_2(t) = x_1(t - \tau)$ , on a  $y_2(t) = \mathcal{S}(x_2)(t) = y_1(t - \tau)$ .

**Exemple 1.** On considère le système qui consiste à sélectionner la partie d'un signal entre  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

$$y(t) = \text{rect}_T(t)x(t) \quad \text{où} \quad \text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### Ce système est-il stationnaire ?

**Exemple 2.** On considère le système qui consiste à calculer la moyenne glissante d'un signal sur un temps  $T$

$$y(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(u)du$$

### Ce système est-il stationnaire ?

On peut montrer que si un système est linéaire, stationnaire et continu alors il existe une fonction  $h$  telle que la sortie du système  $y$  est égale au **produit de convolution**  $\star$  entre l'entrée  $x$  et la fonction  $h$

$$y(t) = (x \star h)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t - u)x(u)du \quad (1)$$

Un tel système s'appelle un **système de convolution**. Il est caractérisé par  $h$  que l'on appelle la **réponse impulsionnelle du système**.

### Pourquoi appeler $h$ la réponse impulsionnelle ?

Soit  $\mathcal{D}$  l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables à support compact. On appelle **distribution** sur  $\mathbb{R}$ , une forme linéaire continue sur  $\mathcal{D}$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$ , la distribution de **Dirac**  $\delta_a$  est définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D} \quad \delta_a(\phi) = \phi(a) \quad (2)$$

En traitement du signal, la distribution de Dirac est souvent notée comme une fonction  $\delta(t - a)$ . Cette notation est utilisée pour mener intuitivement des calculs, qui en toute rigueur devraient être démontrés au sens des

distributions. Dans cet esprit, on admettra (et on apprendra par cœur) les relations suivantes,  $\forall a \in \mathbb{R}$  et  $\forall x$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t-a) dt = 1, \quad x(t) \cdot \delta(t-a) = x(a) \delta(t-a) \quad \text{et} \quad x(t) \star \delta(t-a) = x(t-a) \quad (3)$$

Si on souhaite effectuer les calculs de manière rigoureuse sans avoir à manipuler les distributions, une solution est d'utiliser la propriété suivante (non démontrée ici)

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}_T(t) \quad \text{où} \quad \text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### Quelle peut être l'utilité de la distribution de Dirac en traitement du signal ?

#### Exemple de la prise en photo avec un flou horizontal

On suppose qu'au moment de prendre une photo, on a bougé horizontalement. Chaque ligne de l'image correspondante est un signal à une dimension qui peut être approximée par la somme ci-dessous

$$y(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(u) du$$

où  $x$  est l'image nette,  $y$  est l'image floue et  $T$  est une constante.

### Ce système est-il un système de convolution ?

### Pourquoi les systèmes de convolution jouent un rôle important ?

**Propriété :** les fonctions  $t \mapsto e^{2i\pi\nu t}$  sont les fonctions propres des systèmes de convolution.

En effet, si  $x(t) = \exp(2i\pi\nu t)$ , alors

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(u) \exp(2i\pi\nu(t-u)) du$$

et

$$y(t) = \exp(2i\pi\nu t) \int_{\mathbb{R}} h(u) \exp(-2i\pi\nu u) du = x(t)H(\nu)$$

où

$$H(\nu) = \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-2i\pi\nu u} du$$

est la valeur propre associée.

### Connaissez-vous la transformée qui passe de $h(t)$ à $H(\nu)$ ?

Quand elle existe, la **transformée de Fourier** d'un signal  $x$  est donnée par l'intégrale

$$X(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \quad \text{où } \nu \text{ est la variable fréquence.} \quad (4)$$

On peut montrer que si  $y = x \star h$ , alors

$$Y(\nu) = X(\nu) H(\nu) \quad (5)$$

où  $X(\nu)$ ,  $H(\nu)$  et  $Y(\nu)$  sont les transformées de Fourier (que l'on suppose exister) de  $x(t)$ ,  $h(t)$  et  $y(t)$ .

La fonction  $H(\nu)$  s'appelle la **fonction de transfert** du système.

### Propriétés de la transformée de Fourier

**Transformée de Fourier inverse :**  $x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$

Cette relation, qui est démontrée en cours de mathématique, est très importante car elle montre que la transformation de Fourier est réversible (la plupart du temps).

**Conjugaison :**  $TF(x^*(t)) = X^*(-\nu)$ , où  $*$  représente le complexe conjugué. On en déduit que si un signal est réel (au sens où  $x(t) \in \mathbb{R}$ ), alors le module de la TF est pair et la phase est impaire.

Cette relation est facile à démontrer (à faire en exercice si besoin).

**Translation :**  $TF(x(t - \tau)) = X(\nu)e^{-2i\pi\nu\tau}$ ,

En effet

$$TF(x(t - \tau)) = \int x(t - \tau) \exp(2i\pi\nu t) dt$$

avec le changement de variable  $u = t - \tau$

$$TF(x(t - \tau)) = \int x(u) \exp(2i\pi\nu(u + \tau)) du = \exp(2i\pi\nu\tau) X(\nu)$$

**Modulation d'amplitude :**  $TF(x(t)e^{2i\pi\nu_0 t}) = X(\nu - \nu_0)$

Cette transformation est duale de la précédente. Elle correspond à une translation du spectre.

**Exemple.** Si

$$x(t) = e^{2i\pi\nu_1 t}$$

alors

$$x(t)e^{2i\pi\nu_0 t} = x(t)e^{2i\pi(\nu_0 + \nu_1)t}$$

**Quand  $\nu_1 > 0$ , le spectre de  $x$  est déplacé vers les hautes fréquences ou vers les basses fréquences ?**

**Dérivation :**  $TF\left(\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right) = (2i\pi\nu)^n X(\nu)$ ,

Pour une démonstration rigoureuse, voir cours de mathématique. On insistera ici sur son utilité pour la résolution de système d'équations différentielles.

**Exemple.**

$$x(t) = y(t) + a \frac{dy}{dt}$$

devient

$$X(\nu) = Y(\nu) + a2i\pi\nu Y(\nu)$$

et ainsi

$$y(t) = TF^{-1}\left(\frac{X(\nu)}{1 + a2i\pi\nu}\right)$$

**Relation de Parseval :**  $\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(\nu)Y^*(\nu)d\nu$

Cette relation permet très souvent de simplifier les calculs.

**Que reconnaissez-vous dans cette formule ?**

**Dilatation :**  $TF(x(at)) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\nu}{a}\right)$

Pour démontrer cette relation, il faut effectuer un changement de variable.

$$TF(x(at))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(at) \exp(-2i\pi\nu t) dt$$

et avec  $t' = at$ , on a si  $a > 0$

$$TF(x(at))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t') \exp\left(-2i\pi\nu \frac{t'}{a}\right) dt'/a = \frac{1}{a}X(\nu/a)$$

et si  $a < 0$

$$TF(x(at))(\nu) = - \int_{\mathbb{R}} x(t') \left(-2i\pi\nu \frac{t'}{a}\right) dt'/a = \frac{1}{-a}X(\nu/a)$$

On définit les signaux sinus cardinal, rectangle, échelon d'Heaviside et peigne de Diracs :

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \quad \text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \sqcup\sqcup_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT) \quad (6)$$

$x(t)$	$X(\nu)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(\nu)$
$\delta(t - \tau)$	$e^{-2i\pi\nu\tau}$
$e^{2i\pi\nu_0 t}$	$\delta(\nu - \nu_0)$
$\cos(2\pi\nu_0 t)$	$\frac{1}{2} (\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0))$
$\sin(2\pi\nu_0 t)$	$\frac{1}{2i} (\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0))$
$\text{rect}_T(t)$	$T \text{sinc}(\pi\nu T)$
$\sqcup\sqcup_T(t)$	$\frac{1}{T} \sqcup\sqcup_{\frac{1}{T}}(\nu)$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi\nu^2}$
$e^{- t }$	$\frac{2}{1+(2\pi\nu)^2}$

TABLE 1 – Transformées de Fourier usuelles.

### Exemple de calcul pour lequel la relation de Parseval est utile.

Sachant que  $TF(\text{rect}_T(t)) = T \text{sinc}(\pi\nu T)$ , montrez que

$$\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}^2(\pi\nu T) d\nu = \frac{1}{T}$$

### Exemple de calcul de convolution entre $x$ et $h$ pour

$$x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t) \quad \text{et} \quad h(t) = e^{-\pi t^2}$$

Montrez que  $x(t) = e^{-\pi\nu_0^2} \cos(2\pi\nu_0 t)$ .

Un système  $\mathcal{S}$  est **causal** si  $\forall x$  tel que  $x(t) = 0$  pour  $t < 0$ , on a aussi  $y(t) = \mathcal{S}(x)(t) = 0$  pour  $t < 0$ .

Ce sous-ensemble est très important pour les physiciens car la causalité est une propriété vérifiée par l'ensemble des systèmes physiques. En effet, cela revient à dire que tout système physique ne peut se mettre en mouvement avant d'avoir été excité.

On peut montrer qu'un système de convolution est causal, si et seulement si  $h(t) = 0$  pour  $t < 0$ .

Une autre conséquence de la causalité est décrite par les relations de Kramers-Kronig [1]. Soit  $H_r$  et  $H_i$  tels que  $H(\nu) = H_r(\nu) + iH_i(\nu)$ , on a  $H_r(\nu) = \frac{1}{\pi} \text{Vp} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{H_i(\xi)}{\xi - \nu} d\xi \right)$  et  $H_i(\nu) = -\frac{1}{\pi} \text{Vp} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{H_r(\xi)}{\xi - \nu} d\xi \right)$ , où  $\text{Vp} \int_{\mathbb{R}} . dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} . dt + \int_{\epsilon}^{\infty} . dt \right)$ . Ces intégrales sont à considérer au sens des distributions.