1.3 Classification des signaux et numérisation de l'information

Signal d'énergie finie ou infinie

Soit $x(t)$ un signal, où $t \in \mathbb{R}$ et $x(t) \in \mathbb{C}$. On définit :

$$E_x = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad P_x = \lim_{\substack{T_1 \mapsto -\infty \\ T_2 \mapsto +\infty}} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|^2 dt \tag{7}$$

On appelle E_x **l'énergie du signal** et P_x la **puissance moyenne du signal**. Si $E_x < +\infty$ alors le signal est **d'énergie finie**, sinon le signal est d'énergie infinie. Si $P_x < +\infty$, alors le signal est **de puissance finie**.

Exemples de signaux d'énergie finie ?

Exemples de signaux d'énergie infinie ?

Signal analogique ou numérique
Un signal est **analogique** (respectivement **numérique**), quand il est fonction d'une variable continue (resp. dénombrable). Il est alors noté $x(t)$ (resp. x_n).

$$\begin{array}{rcl} x : \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & x(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x : \mathbb{Z} & \mapsto & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & x_n \end{array}$$

Est-ce que l'une de ces deux représentations est "meilleure" que l'autre ?

Signal aléatoire ou déterministe
Si le signal analysé est lié au résultat d'une expérience aléatoire λ, alors on parlera pour x de **fonction aléatoire** et il pourra être noté $x_\lambda(t)$. Dans le cas où le signal $x_\lambda(t)$ ne dépend pas de λ, il est **déterministe**.

Exemple ?

Représentation des signaux numériques

Pourquoi s'intéresser aux signaux numériques ?

Qu'apporte le numérique par rapport à l'analogique ?

Est-ce que le numérique a des inconvénients ?

Que pourrait signifier qu'on perd de l'information en passant au numérique ?

Figure 5 représente une sinusoïde échantillonée. **Combien de points par période sont nécessaires pour échantillonner ce signal sans perte d'information ?**

Soit $x(t)$ un signal analogique. Si ce signal est échantillonné avec une **période d'échantillonnage** T_e, alors

$$x_n = x(nT_e) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

La fréquence $\nu_e = 1/T_e$ s'appelle la **fréquence d'échantillonnage**.

Pour représenter le signal numérisé x_n, on peut utiliser la distribution :

$$x_e(t) = \sum_n x_n \delta(t - nT_e) \tag{8}$$

Quel peut être l'intérêt de représenter la suite x_n avec la distribution $x_e(t)$?

Comment faire pour passer de $x_e(t)$ à $x(t)$?

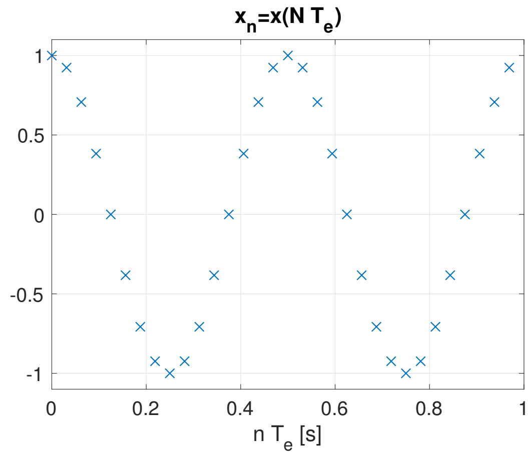

FIGURE 5 – Représentation d'une sinusoïde échantillonnée avec un temps d'échantillonnage T_e.

$$x(t) ⧢_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n\delta(t - nT_e)$$

Ainsi

$$x_e(t) = x(t) ⧢_{T_e}(t)$$

On admet le résultat mathématique que $TF\left(⧢_T(t)\right) = \frac{1}{T} ⧢_{\frac{1}{T}}(\nu)$, on en déduit que

$$TF\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - k\frac{1}{T})$$

Ainsi

$$X_e(\nu) = X(\nu) \star \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - k\nu_e)$$

On peut montrer que la transformée de Fourier de $x_e(t)$, notée $X_e(\nu)$, est périodique et vérifie :

$$X_e(\nu) = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\nu - k\nu_e) \quad \text{où } X(\nu) \text{ est la transformée de Fourier de } x(t). \tag{9}$$

Tout se passe comme si quand on échantillonne en temps, on périodise en fréquence.

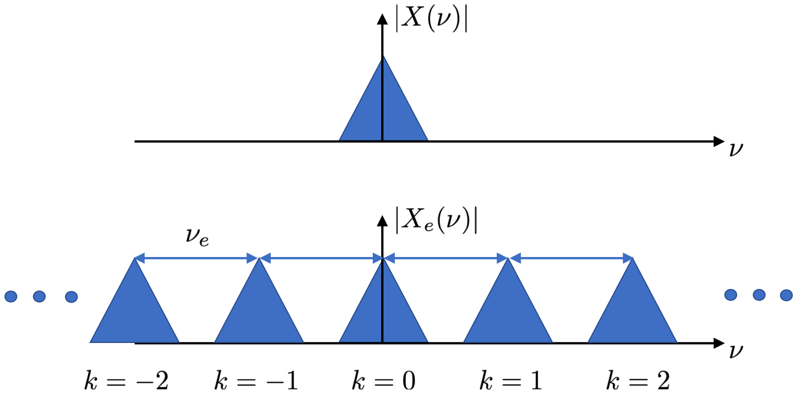

FIGURE 6 – Illustration de la périodisation du spectre.

Considérons l'exemple de la figure 6. **Comment passer de $X_e(\nu)$ à $X(\nu)$?**

A quelle condition sur ν_e et $X(\nu)$ est-il possible de retrouver $X(\nu)$ (et donc $x(t)$) à partir de $X_e(\nu)$?

Un signal possède un spectre avec un support borné quand il existe une fréquence ν_M telle que $X(\nu) = 0$ pour $|\nu| > \nu_M$. Pour un tel signal, le **théorème d'échantillonnage** montre que si on respecte la condition $\nu_e > 2\nu_M$ alors on peut échantillonner le signal x sans aucune perte d'information.

On peut montrer que la **reconstruction** du signal peut s'effectuer en filtrant $X_e(\nu)$:

$$X(\nu) = \frac{1}{\nu_e}\mathrm{rect}_{\nu_e}(\nu)X_e(\nu) \quad \text{où } \mathrm{rect}_{\nu_e}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu| < \nu_e/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{10}$$

On montre que

$$x(t) = \sum_n x_n \mathrm{sinc}(\pi(\nu_e t - n))$$

En effet

$$x(t) = \mathrm{sinc}(\pi\nu_e t) \star x_e(t)$$

ce qui devient

$$x(t) = \sum_n x_n \mathrm{sinc}(\pi\nu_e t) \star \delta(t - nT_e)$$

puis

$$x(t) = \sum_n x_n \mathrm{sinc}(\pi(\nu_e t - n))$$

En déduire une base de l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont le spectre est à support borné ?

Que se passe-t-il quand la condition du théorème d'échantillonnage n'est pas respectée ?

Exemple. Echantillonnage d'un son de guitare.
Sur Matlab, éditez le programme `main_guitare`.
Lancez le programme pour `choix_sous_echantillonnage=0` et `choix_anti_repliement=0`,
puis pour `choix_sous_echantillonnage=1` et `choix_anti_repliement=0`,
et enfin pour `choix_sous_echantillonnage=1` et `choix_anti_repliement=1`.

Exemple. Echantillonnage d'une sinusoïde. Editez le programme `main_ech_sinus`
Testez pour une fréquence d'échantillonnage égale à 500 kHz, puis 10 kHz, puis 1.1 kHz.
Observez et commentez.

Quelle est la solution pour éviter cet artefact ?

Si le théorème d'échantillonnage n'est pas respecté, alors il y a **repliement spectral**. Pour s'assurer d'un échantillonnage sans repliement spectral, il est nécessaire d'utiliser un filtre **anti-repliement**.

Transformée de Fourier discrète

On considère $(x_n)_{n\in\{0,\ldots,N-1\}}$ un signal échantillonné à la fréquence ν_e sur N points.
La transformée de Fourier discrète de x_n est définie par l'application qui à la suite $(x_n)_{n\in\{0,\ldots,N-1\}}$ associe

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \tag{11}$$

On peut montrer que la transformée de Fourier discrète est inversible

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2i\pi kn/N} \tag{12}$$

Cette propriété montre que la transformée est inversible. On peut noter la présence du $1/N$ en facteur qui montre que contrairement aux signaux analogiques, on n'est pas parfaitement symétrique.

X_k est une variable très souvent utilisée quand on met en œuvre des algorithmes de traitement du signal. **Analysons le lien entre X_k et $X(\nu)$.**

On peut montrer que $X_k = X_e\left(\frac{k\nu_e}{N}\right)$. Ainsi $X_k = \nu_e X\left(\frac{k\nu_e}{N}\right)$ pour $k \in \{-N/2+1,\ ...,\ N/2\}$ quand le théorème d'échantillonnage est respecté.

En effet,

$$X_e(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x_e(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

peut s'écrire

$$X_e(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \delta(t - nT_e) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

puis

$$X_e(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \int_{\mathbb{R}} \delta(t - nT_e) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

ce qui devient

$$X_e(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi\nu n T_e}$$

et par conséquent

$$X_e\left(\frac{k\nu_e}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi kn/N} = X_k$$

Si à présent on rappelle que

$$X_e(\nu) = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\nu - k\nu_e)$$

cela implique que pour $k \in [-N/2+1,\ N/2]$, quand le théorème d'échantillonnage est respecté on a

$$X_k = \nu_e X\left(\frac{k\nu_e}{N}\right)$$

Analyse des dimensions

$$[t] = s \quad [x(t)] = V \quad [X(\nu)] = V.s \quad [x_n] = V \quad [X_k] = V$$