

1.5 Caractérisation et représentation des fonctions aléatoires

Lancer la simulation `main_convolution_oiseau` sous Matlab avec à la ligne 4 du script `step=2`.

Pour chaque ligne de l'image on a

$$y(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(u) du$$

Rappel : ceci est un système de convolution

$$y(t) = (x \star h)(t)$$

où la réponse impulsionnelle est $h(t) = \text{rect}_T(t)$.

Comment faire pour retrouver T à partir de l'image floue (i.e. y) ?

Comment faire pour retrouver l'image nette (i.e. x) ?

D'où peuvent venir les difficultés ?

Exemple. Un capteur CCD mesure l'intensité en chaque pixel avec une incertitude.

$$y(i, j) = y_0(i, j) + b(i, j)$$

Si on suppose que b est la somme de plusieurs contributions indépendantes

$$b = b_1 + b_2 + \dots + b_N$$

Que nous dit le théorème Centrale Limite ?

Exemple. Bruit à 50 Hz du réseau électrique.

Comment représenter un tel bruit ?

Le choix du modèle aléatoire dépend de nos connaissances a priori.

Exemple. Pile ou face.

L'aléatoire est utilisé pour décrire notre difficulté à prédire le résultat.

Dans quel exemple l'aléatoire est intrinsèque à la nature physique du signal ?

Exemple. Collocation.

En collocation, **comment peut-on décider qui fait le ménage ?**

Injecter de l'aléatoire peut permettre de simplifier la prise de décision.

Une **fonction aléatoire réelle** x est définie par :

$$\begin{aligned} x : \Omega \times \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ (\lambda, t) &\mapsto x_\lambda(t) \end{aligned} \tag{14}$$

où $t \in \mathbb{R}$ représente le temps et λ appartient à l'ensemble des événements (ou résultats) aléatoires noté Ω .

Quand t est fixé, $x_\lambda(t)$ est une variable aléatoire.

Comment caractériser une variable aléatoire ?

Exemple. Pour X distribué suivant une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 , on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et la densité de probabilité est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Même si X n'est pas distribué suivant une loi normale, à partir de f , on peut (sous réserve d'existence de l'intégrale) définir la moyenne

$$\mu = \langle X \rangle = \int x f(x) dx$$

et la variance

$$\text{var}(X) = \langle (X - \mu)^2 \rangle = \int (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Si on caractérise X uniquement avec μ et σ^2 , alors on obtient une caractérisation partielle (i.e. incomplète).

Quel intérêt de se contenter d'une caractérisation partielle ?

Exemple. : En jury de fin d'année, il est courant d'analyser la moyenne empirique des notes de chaque élève

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$$

Quel peut être l'intérêt de ce choix ?

Pourquoi ne pas analyser la densité f pour prendre la décision en jury ?

Si au lieu de prendre la moyenne, on prend comme statistique $\min_n(x_n)$ ou le $\max_n(x_n)$ ou le $\text{median}_n(x_n)$, **qu'est-ce que ça change ?**

Quand λ est fixé, $x_\lambda(t)$ est un signal déterministe.

Comment caractériser partiellement un signal déterministe ?

La réponse dépend bien sûr du problème considéré. Au TD n°1, on a défini

$$\begin{aligned} \mu_t &= \frac{1}{E_x} \int_{\mathbb{R}} t |x(t)|^2 dt & \sigma_t^2 &= \frac{1}{E_x} \int_{\mathbb{R}} (t - \mu_t)^2 |x(t)|^2 dt \\ \mu_\nu &= \frac{1}{E_x} \int_{\mathbb{R}} \nu |X(\nu)|^2 d\nu & \sigma_\nu^2 &= \frac{1}{E_x} \int_{\mathbb{R}} (\nu - \mu_\nu)^2 |X(\nu)|^2 d\nu \end{aligned}$$

Quel peut être l'intérêt de ces paramètres ?

Pour caractériser les fonctions aléatoires, une difficulté est qu'on a 2 axes : le temps t et la réalisation λ . Une solution est de considérer la loi du n -uplet $X(t_1), \dots, X(t_n)$ où n est un nombre de points choisi arbitrairement.

Les fonctions aléatoires sont caractérisées en n points par la fonction de répartition n dimensionnelle de x :

$$F_x(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \text{Proba}(x_\lambda(t_1) \leq x_1 \text{ et } x_\lambda(t_2) \leq x_2 \dots \text{ et } x_\lambda(t_n) \leq x_n) \quad (15)$$

La densité de probabilité associée est

$$f_x(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = \frac{\partial^n F_x(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (16)$$

Pour $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, on définit un moyennage statistique pondéré par la fonction g

$$\langle g(x_\lambda(t_1), x_\lambda(t_2), \dots, x_\lambda(t_n)) \rangle = \int \int \dots \int g(x_1, x_2, \dots, x_n) f_x(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (17)$$

En particulier, pour chaque valeur de t , on définit **la moyenne statistique** par $m_x(t) = \langle x_\lambda(t) \rangle$ et pour chaque couple (t_1, t_2) , on définit **la covariance statistique** par

$$\gamma_{xx}(t_1, t_2) = \langle x_\lambda(t_1) x_\lambda(t_2) \rangle - \langle x_\lambda(t_1) \rangle \langle x_\lambda(t_2) \rangle \quad (18)$$

Il est fréquent que la fonction aléatoire soit centrée, au sens où $m_x(t) = 0$ pour tous les t . Dans ce cas,

$$\gamma_{xx}(t_1, t_2) = \langle x_\lambda(t_1) x_\lambda(t_2) \rangle$$

Comment peut-on alors interpréter la covariance statistique ?

Exemple. Sinusoïde à 50 Hz

$$x_\lambda(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi)$$

où $\nu_0 = 50$ Hz, ϕ une phase aléatoire entre 0 et 2π et A une constante.

Montrez que

$$\langle x_\lambda(t) \rangle = 0$$

Montrez que la covariance est

$$\gamma_{xx}(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi\nu_0(t_1 - t_2))$$

Souvent, on se contentera d'une caractérisation partielle des fonctions aléatoires au sens des moments d'ordre 2 avec la covariance $\gamma_{xx}(t_1, t_2)$.

La fonction aléatoire x est **stationnaire au sens des moments à l'ordre 2** si $m_x(t)$ est indépendante de t et si $\gamma_{xx}(t_1, t_2)$ ne dépend que de $t_1 - t_2$. Dans ce cas, on note la covariance $\gamma_{xx}(\tau)$ avec $\tau = t_1 - t_2$.

Quel peut être l'intérêt de se restreindre à l'analyse des fonctions aléatoires stationnaires ?

Dans le cas stationnaire, on notera simplement

$$\gamma_{xx}(t + \tau, t) = \gamma_{xx}(\tau)$$

Quel est le sens de la variable τ ?

On définit la **puissance instantanée** par $P_x(t) = \langle x_\lambda^2(t) \rangle$. Si x est stationnaire, alors $P_x(t) = P_x$.

On souhaite estimer μ et γ à partir de x . On définit

$$\hat{m}_x(t) = \frac{1}{N} \sum_n x_n(t)$$

où $x_1(t), x_2(t), \dots$ correspondent à différentes réalisations de x . De plus on définit

$$\hat{\gamma}_{xx}(t_1, t_2) = \frac{1}{N} \sum_n (x_n(t_1) - \hat{m}_x(t_1))(x_n(t_2) - \hat{m}_x(t_2))$$

Est-ce que cette solution paraît facile à mettre en œuvre ?

Supposons que l'on soit dans le cas stationnaire et que l'on définit

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_n x_n(t)$$

et

$$\hat{\gamma}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_n (x_n(t) - \hat{m}_x(t))(x_n(t - \tau) - \hat{m}_x(t))$$

Est-ce que cette solution paraît plus facile à mettre en œuvre ?

Si à présent, on définit

$$\hat{m}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_\lambda(t) dt$$

où T est la durée d'acquisition et

$$\hat{\gamma}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_\lambda(t) x_\lambda(t - \tau) dt - \hat{m}_x^2$$

Est-ce que cette solution paraît satisfaisante ?

Pour chaque réalisation λ , on peut définir la **moyenne temporelle**

$$\overline{x_\lambda(t)} = \lim_{\substack{T_1 \mapsto -\infty \\ T_2 \mapsto +\infty}} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} x_\lambda(t) dt \quad (19)$$

ainsi que la fonction d'auto-corrélation centrée

$$c_{x_\lambda x_\lambda}(\tau) = \overline{x_\lambda(t)x_\lambda(t-\tau)} - \overline{x_\lambda(t)} \overline{x_\lambda(t-\tau)} \quad (20)$$

Quelle est l'interprétation de la fonction d'auto-corrélation ?

Si les signaux sont de moyenne nulle, alors on reconnaît de nouveau un produit scalaire.

Propriété : la fonction d'auto-corrélation est **paire et maximum en 0**.

Comment montrer simplement que l'auto-corrélation est maximum en 0 ?

La fonction aléatoire x est **ergodique à l'ordre 2** si $\overline{x_\lambda(t)}$ et $c_{x_\lambda x_\lambda}(\tau)$ ne dépendent pas de λ .

Si une fonction aléatoire est ergodique, alors il suffit d'en faire une seule fois la mesure pour tout savoir sur ces moments temporels (en effet ils ne dépendent pas de λ).

Pour étudier les différences entre stationnarité et ergodicité, étudions des exemples.

Exemple 1.

Vérifiez que $x_\lambda(t) = A_\lambda$ est stationnaire, mais non-ergodique.

Exemple 2

Vérifiez que $x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$ n'est pas stationnaire, mais est ergodique.

Exemple 3

Soit $x_\lambda(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi_\lambda)$ avec ϕ_λ uniformément répartie entre 0 et 2π .

Que dire de cet exemple ?

Propriété : si $x_\lambda(t)$ est stationnaire et ergodique à l'ordre 2, alors $m_x(t) = \overline{x_\lambda(t)}$ et $\gamma_{xx}(\tau) = c_{x_\lambda x_\lambda}(\tau)$.

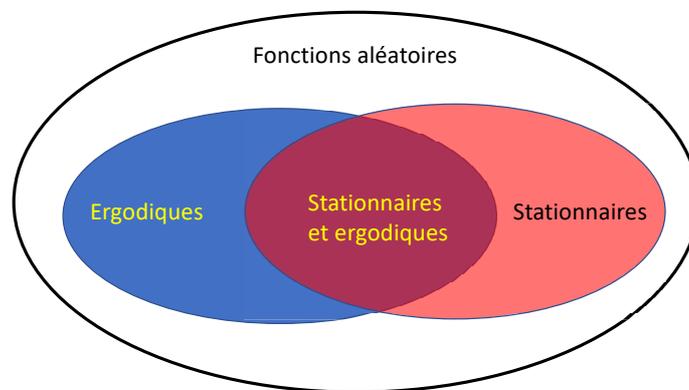


FIGURE 9 – Les systèmes linéaires, stationnaires et continus sont des systèmes de convolution.

En pratique, **comment savoir si on peut considérer une fonction aléatoire stationnaire et ergodique ?**

On a vu que la représentation en fréquence joue un rôle très important pour l'étude des systèmes de convolution.

Comment caractériser le contenu spectral d'une fonction aléatoire ?

On pourrait être tenté d'utiliser la transformée de Fourier, le problème est que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} x_\lambda(t) \exp(2i\pi\nu t) dt$$

n'est (en général) pas définie pour une fonction aléatoire stationnaire. Même quand on essaie de la normaliser :

$$\lim_T \frac{1}{T^\alpha} \int_{-T/2}^{T/2} x_\lambda(t) \exp(2i\pi\nu t) dt$$

on n'obtient jamais une limite bien définie (en dehors de 0).

Il faut donc utiliser une autre grandeur pour caractériser le spectre d'une fonction aléatoire stationnaire.

Pour les fonctions aléatoires centrées, **la densité spectrale de puissance** est définie par :

$$\Gamma_{xx}(t, \nu_0) = \lim_{\Delta\nu \rightarrow 0} \frac{P_y(t, \nu_0)}{\Delta\nu} \quad \text{où } P_y(t, \nu_0) = \langle |y_{\nu_0}(t)|^2 \rangle \quad \text{et } y = x \star h \quad (21)$$

avec $TF(h(t)) = \text{rect}_{\Delta\nu}(\nu - \nu_0)$. Si x est stationnaire (à l'ordre 2), alors Γ_{xx} ne dépend pas de t .

La densité spectrale de puissance est définie comme la puissance à la sortie y d'un filtre passe-bande centré sur ν_0 et de largeur spectrale $\Delta\nu$.

Pour retenir cette définition, il suffit de se rappeler de l'expérience de penser.

Exemple. Voir simulation Matlab `main_estime_DSP`.

Quelle est l'influence de T ? Quelle est l'influence de $\Delta\nu$?

Théorème de Wiener-Khintchine

Si x est une fonction aléatoire centrée et stationnaire au sens des moments à l'ordre 2, alors

$$\Gamma_{xx}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_{xx}(\tau) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \quad (22)$$

Pour une démonstration de ce résultat, voir les ouvrages de traitement du signal.

Exemple 1.

$$x_\lambda(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi_\lambda)$$

Montre que la densité spectrale de puissance est

$$\Gamma_{xx}(\nu) = \frac{A^2}{4} (\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0))$$

Un bruit **blanc** est une fonction aléatoire stationnaire dont la densité spectrale est constante.

Montrez que dans ce cas on a

$$\gamma_{xx}(\tau) = A \delta(\tau)$$

où A est constant. L'exemple du bruit blanc est, en un certain sens, l'opposé à la sinusoïde car celui-ci contient toutes les fréquences.

Pourquoi en traitement du signal on suppose souvent que le bruit est blanc?

La puissance d'une fonction aléatoire centrée et stationnaire peut être calculée avec $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\nu) d\nu$.

Comment montrer ce résultat?

Exemple 1.

$$x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi_\lambda)$$

Comment montrer que la puissance de x est $A^2/2$?

$$P_x = \gamma_{xx}(0) = A^2/2$$

Exemple 2. Bruit blanc.

Quelle est la puissance de x ?