1.7 Filtrage des fonctions aléatoires

Exemple 1.
Pour illustrer la notion de filtrage, lancer le programme `main_filtrage_oiseau` avec `step=1`.

On suppose

$$y_\lambda = x + b_\lambda$$

On souhaite appliquer un système de convolution (c'est à dire un filtre) g tel que

$$z = y \star g \simeq x$$

Comment choisir g ?

On peut montrer que si $y = x \star h$, avec x stationnaire au sens des moments à l'ordre 2 et h un système de convolution, alors y est aussi stationnaire au sens des moments à l'ordre 2 et

$$\Gamma_{yy}(\nu) = |H(\nu)|^2 \, \Gamma_{xx}(\nu) \tag{26}$$

où Γ_{yy} et Γ_{xx} sont les densités spectrales de puissance de y et x.

En effet

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(u)x(t-u)du$$

On a donc

$$\langle y(t) \rangle = m_x \int h(u)du$$

qui est indépendant de t. De plus

$$\langle y(t)y^*(t-\tau)\rangle = \langle \int\int h(u_1)x(t-u_1)h^*(u_2)x^*(t-\tau-u_2)du_1du_2\rangle$$

ce qui devient

$$\langle y(t)y^*(t-\tau)\rangle = \int\int h(u_1)h^*(u_2)\langle x(t-u_1)x^*(t-\tau-u_2)\rangle du_1du_2$$

puis

$$\langle y(t)y^*(t-\tau)\rangle = \int\int h(u_1)h^*(u_2)(\gamma_{xx}(u_2-u_1+\tau)+m_x^2)du_1du_2$$

et

$$\gamma_{yy}(t,t-\tau) = \int\int h(u_1)h^*(u_2)\gamma_{xx}(u_2-u_1+\tau)du_1du_2$$

Comme $\gamma_{yy}(t,t-\tau)$ est indépendant de t, y est bien stationnaire au sens des moments à l'ordre 2.

Ensuite, pour démontrer

$$\Gamma_{yy}(\nu) = |H(\nu)|^2 \, \Gamma_{xx}(\nu)$$

on part de

$$\Gamma_{yy}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_{yy}(\tau)e^{-2i\pi\nu\tau}d\tau$$

ce qui devient (à partir du précédent calcul sur la stationnarité de la sortie du filtre h)

$$\Gamma_{yy}(\nu) = \int\int\int h(u_1)h^*(u_2)\gamma_{xx}(\tau+u_2-u_1)e^{-2i\pi\nu\tau}d\tau du_1du_2$$

On reconnaît la TF de $\gamma_{xx}(\tau+u_2-u_1)$

$$\Gamma_{yy}(\nu) = \Gamma_{xx}(\nu)\int\int h(u_1)h^*(u_2)e^{-2i\pi\nu(u_1-u_2)}du_1du_2$$

et finalement

$$\Gamma_{yy}(\nu) = H(\nu)H^*(\nu)\Gamma_{xx}(\nu)$$

et

$$\Gamma_{yy}(\nu) = |H(\nu)|^2 \, \Gamma_{xx}(\nu)$$

Pour retenir cette expression, il vous suffit de vous rappeler que Γ sont des densités spectrale de puissance (positives et homogènes à des carrés).

Un inconvénient de cette expression est qu'elle ne montre qu'une relation en puissance. Pourtant, le filtrage peut permettre de réaliser d'autres traitements que simplement atténuer ou amplifier la puissance à une fréquence donnée.

Exemple 2. Filtrage pour la déconvolution.

Lancer le programme `main_deconvolution_oiseau` avec `step=1`.
Il faut raisonner en plusieurs étapes (voir ci-dessous).

1/ Définition du contexte et de la tâche à accomplir

Comment modéliser le problème ?

$$y_\lambda(t) = x_\lambda(t) \star h + b_\lambda(t)$$

Lors d'un précédent cours, on a vu que pour cet exemple, on pouvait supposer connaître h. La question est maintenant : **comment retrouver x ?**

On cherche à déconvoluer l'image floue avec un filtre g

$$z_\lambda(t) = (y_\lambda \star g)(t)$$

de sorte à ce que $z_\lambda(t)$ ressemble x.

Comment trouver g ?

2/ Choix d'un critère de qualité et optimisation du critère

Quel est le critère J à choisir pour résoudre ce problème ?

$$g^o = \arg\min_g J(g)$$

Comment trouver g^o ?

On choisit une solution sous la forme :

$$G(\nu) = \frac{H^*(\nu)}{\alpha + |H(\nu)|^2}$$

où α est un paramètre qui reste à estimer.

Quel est l'intérêt de choisir g sous cette forme ?

Quel est l'inconvénient choisir g sous cette forme ?

3/ Mise en œuvre et analyse des résultats

On lance : `main_deconvolution_oiseau`.
Avec la figure 2, on voit que
si $\alpha = 10^{-6}$ (step = 3), alors le terme de bruit est très grand quand $|H(\nu)| \mapsto 0$, donc la variance explose.
si $\alpha = 10^{-2}$ (step = 4), alors au lieu de déconvoluer, on convoluer encore plus. On a donc un biais important.
Si on fait une boucle sur epsilon (step = 5), et qu'on regarde comment l'EQM varie en fonction de epsilon, on retrouve un résultat de bonne qualité.

Comment décrire ces phénomènes avec des équations ?

A la sortie du filtre g, on a

$$z(t) = x \star TF^{-1}\left(\frac{|H(\nu)|^2}{\alpha + |H(\nu)|^2}\right) + b \star TF^{-1}\left(\frac{H^*(\nu)}{\alpha + |H(\nu)|^2}\right)$$

Ainsi

$$\Gamma_{yy}(\nu) = |H(\nu)|^2 \Gamma_{xx}(\nu)$$

On a la somme de 2 contributions $x_1 + x_2$ qui sont décorrélées, donc

$$\gamma_{x_1+x_2} = \gamma_{x_1} + \gamma_{x_2}$$

On obtient

$$\Gamma_{zz}(\nu) = \frac{|H(\nu)|^4}{\left(\alpha + |H(\nu)|^2\right)^2} \Gamma_{xx}(\nu) + \frac{|H(\nu)|^2}{\left(\alpha + |H(\nu)|^2\right)^2} \Gamma_{bb}(\nu)$$

Comment choisir α pour optimiser le premier terme ?

Comment choisir α pour optimiser le deuxième terme ?

Cet exemple illustre le compromis biais/variance qui est très souvent présent en traitement du signal.

4/ Remise en cause des hypothèses

Si on revient sur le problème considéré, **quelles sont les hypothèses qu'il conviendrait de remettre en cause avant d'appliquer cet algorithme sur de "vraies" images ?**

Définitions de l'inter-corrélation

Sur les exemples traités jusqu'à présent, le paramètre que l'on cherchait à retrouver était x (l'image du rossignol). Il arrive que x ne soit pas le paramètre d'intérêt.

Si on prend l'exemple du RADAR. On émet un signal x, on récupère un écho bruité

$$y(t) = ax(t - \tau) + b(t)$$

Quel est le paramètre d'intérêt du problème ?

L'inter-corrélation consiste à calculer le produit scalaire entre un signal y et x retardé de τ.

$$\langle y(t) | x(t - \tau) \rangle$$

Comment définir ce produit scalaire ?

Pour les signaux déterministes d'énergie finie, on définit la fonction **d'inter-corrélation** :

$$c_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} y(t) x^*(t - \tau) dt \tag{27}$$

Pour calculer l'inter-corrélation, il peut être utile de passer en fréquence

On peut montrer que pour ces signaux

$$TF(c_{xy}(\tau)) = \int_{\mathbb{R}} c_{xy}(\tau) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau = Y(\nu) X^*(\nu) \tag{28}$$

où $X(\nu)$ et $Y(\nu)$ sont les transformées de Fourier de x et y que l'on suppose exister.

Exemple.

$$y(t) = ax(t - \tau_1)$$

et

$$x(t) = \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right]$$

On a

$$c_{xy}(\tau) = a \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{(t - \tau_1)^2}{2\sigma_t^2}\right] \exp\left[-\frac{(t - \tau)^2}{2\sigma_t^2}\right] dt$$

Comme la TF d'une gaussienne est une gaussienne, que le produit de 2 gaussienne est une gaussienne plus étroite, et que la TF inverse d'une gaussienne étroite est une gaussienne large, on obtient à la fin que

$$c_{xy}(\tau) = \lambda a \exp - \frac{(\tau - \tau_1)^2}{4\sigma_t^2}$$

où λ est une constante qui reste à déterminer.

En traçant l'inter-corrélation, on obtient une fonction qui est maximum en $\tau = \tau_1$. Le problème de l'estimation de τ_1 se ramène à la recherche du maximum d'une fonction.

Exemple.

$$x(t) = \sin 2\pi\nu_0 t \quad \text{et} \quad y(t) = ax(t - \tau_1)$$

Que donne le calcul de l'intercorrélation entre x et y ?

Pour les signaux déterministes d'énergie infinie mais de puissance finie, on définit la fonction d'inter-corrélation :

$$c_{xy}(\tau) = \lim_{\substack{T_1 \mapsto -\infty \\ T_2 \mapsto +\infty}} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} y(t) x^*(t - \tau) dt \tag{29}$$

On a besoin de deux définitions car pour les signaux d'énergie infinie et de puissance finie, la première fonction d'inter-corrélation n'est pas définie. Il faut donc adapter l'outil mathématique au type de signal considéré.

Comment calculer la corrélation quand les signaux sont échantillonnés ?

Pour les signaux déterministes échantillonnés sur N points, la fonction d'inter-corrélation peut être définie par :

$$c_n = \sum_{j=0}^{N-1} y_j x_{j-n}^* \tag{30}$$

où $x_n = 0$ et $y_n = 0$ pour $n < 0$ et pour $n \geq N$, mais une alternative est :

$$\widetilde{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k X_k^* e^{2i\pi kn/N} \tag{31}$$

où X_k et Y_k sont les coefficients de la transformée de Fourier discrète de x_n et y_n.

Un avantage de $\widetilde{c}_n$ est que son calcul est plus rapide (complexité de $3N \log_2 N$ au lieu de N^2) grâce à l'algorithme appelé transformée de Fourier rapide, mais le prix à payer est l'effet de **corrélation circulaire**. L'effet de corrélation circulaire peut être supprimé avec du **zero-padding**. Soient x'_n et y'_n les signaux obtenus en ajoutant N valeurs égales à 0 à la fin des suites $(x_n)_{n=0,..,N-1}$ et $(y_n)_{n=0,..,N-1}$. Si on calcule

$$\widetilde{c}'_n = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} Y'_k X'^*_k e^{2i\pi kn/(2N)} \tag{32}$$

où X'_k et Y'_k sont les coefficients de la transformée de Fourier discrète de x'_n et y'_n, alors on peut vérifier que $\widetilde{c}'_n = c_n$ pour $n \in \{0, .., N-1\}$.

Comment calculer la corrélation quand les signaux sont des fonctions aléatoires ?

Pour les fonctions aléatoires centrées, on définit la **covariance croisée** (ou inter-covariance)

$$\gamma_{xy}(\tau) = \langle y(t) x(t - \tau) \rangle \tag{33}$$

Montrer que si x un bruit blanc et $y(t) = ax(t - \tau)$ alors on a

$$\gamma_{xy}(\tau) = a\delta(\tau - \tau_1)$$

Remarque. On a donc une définition pour chaque type de signal : énergie finie ou infinie, signaux échantillonnés, fonctions aléatoires.

Pour l'application RADAR considérée, **lequel des signaux considérés ci-dessus vous paraît être le meilleur choix ?**

Plus généralement, on peut montrer la propriété suivante.

Identification d'un système de convolution h avec une fonction aléatoire
Soit x est un bruit blanc centré avec $\gamma_{xx}(\tau) = A\,\delta(\tau)$ et $y = x \star h$ où h est un système de convolution, alors :

$$\gamma_{xy}(\tau) = \langle y(t)x(t-\tau)\rangle \text{ vérifie la relation } \gamma_{xy}(\tau) = A\,h(\tau) \tag{34}$$

En effet,

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(u)x(t-u)du$$

Ensuite, on obtient

$$\gamma_{xy}(\tau) = \int h(u)\langle x(t-\tau)x(t-u)\rangle du$$

puis

$$\gamma_{xy}(\tau) = \int h(u)\gamma(\tau-u)du$$

Si le bruit blanc alors :

$$\gamma_{xx}(\tau) = \delta(\tau) \quad \text{et} \quad c_{xy}(\tau) = Ah(\tau)$$

ce qui permet d'estimer h à une amplitude près.

Cet exemple montre que l'aléatoire ne sert pas qu'à représenter le bruit.

Synthèse sur la première partie du cours
On a présenté différentes représentations de base en traitement du signal (systèmes de convolution, signaux numériques, fonctions aléatoires).

Dans la suite, on va se focaliser sur une application : la discrimination.