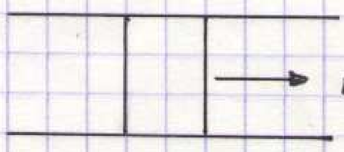
Formulation du problème en dynamique des structures : formulation forte / formulation faible

Structure continue de type poutre

- Traction-compression
- Flexion

Poutre en traction-compression



$u(x,t)$ déplacement longitudinal

$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ déformation longitudinale

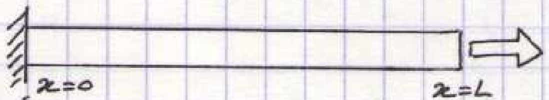
$\sigma(x,t) = E\,\varepsilon(x,t)$ contrainte normale uniforme sur la section de la poutre

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \dot{u}^2 \, dx$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L ES\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

rappel $V = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma : \varepsilon \, d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega E\varepsilon^2 \, d\Omega$

W_{ext} = ? dépend des efforts extérieurs et des conditions aux limites



$\vec{F} = F_0 \vec{x}$

$\rightarrow W_{ext} = 0$, encastrement

$\rightarrow W_{ext} = F_0 \, u(L,t)$

Poutre en traction-compression

Principe de Hamilton $\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_c - V + W_{ext})\, dt = 0 \quad \forall \delta u$ avec $\delta u(t_1) = 0$ $\delta u(t_2) = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta E_c - \delta V + \delta W_{ext}\right) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho S \dot{u}\, \delta \dot{u}\, dx - \int_0^L ES \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + F_0\, \delta u(L,t) \cdot dt = 0$$

$\forall \delta u \Rightarrow$ intégration par partie

$$\underbrace{\left[\int_0^L \rho S \dot{u}\, \delta u\, dx\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0 \;\; \delta u(t_1)=0 \;\; \delta u(t_2)=0} - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho S \ddot{u}\, \delta u\, dx dt - \left[\int_{t_1}^{t_2} ES \frac{\partial u}{\partial x}\, \delta u\, dt\right]_0^L + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, \delta u\, dx dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} F_0\, \delta u(L,t)\, dt = 0$$

$\boxed{\rho S \ddot{u} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$ équation du mouvement

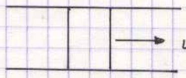
$ES \frac{\partial u}{\partial x} \delta u = 0$ en $x = 0$ $\qquad \delta u(0,t) = 0$ encastrement

$-ES \frac{\partial u}{\partial x} \delta u + F_0 \delta u = 0$ en $x = L$ $\qquad ES \frac{\partial u}{\partial x} = F_0$ effort imposé

$\underbrace{\hphantom{ES \frac{\partial u}{\partial x} = F_0 \text{ effort imposé}}}_{\text{conditions aux limites}}$

Poutre en traction-compression

<u>Exemple de structure continue :</u> poutre en traction compression



$u(x,t)$ déplacement longitudinal

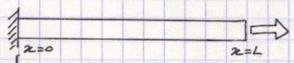
$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ déformation longitudinale

$\sigma(x,t) = E\,\varepsilon(x,t)$ contrainte normale uniforme sur la section de la poutre

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \dot{u}^2\, dx$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L ES\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \qquad \underline{\text{rappel}} \quad V = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma : \varepsilon\, d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega E\varepsilon^2\, d\Omega$$

$W_{ext} = \,?$ dépend des efforts extérieurs et des conditions aux limites



$\vec{F} = F_0\,\vec{x}$

$\hookrightarrow$ $W_{ext} = 0$, encastrement $\qquad$ $\hookrightarrow$ $W_{ext} = F_0\, u(L,t)$

<u>Principe de Hamilton</u> $\quad \delta\int_{t_1}^{t_2}(E_c - V + W_{ext})\,dt = 0 \quad \forall \delta u$ avec $\delta u(t_1)=0$ $\delta u(t_2)=0$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta E_c - \delta V + \delta W_{ext})\,dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho S \dot{u}\,\delta\dot{u}\,dx - \int_0^L ES\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + F_0\,\delta u(L,t)\cdot dt = 0$$

$\forall \delta u \Rightarrow$ intégration par partie

$$\underbrace{\left[\int_0^L \rho S\dot{u}\,\delta\dot{u}\,dx\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0\ \ \delta u(t_1)=0,\ \delta u(t_2)=0} - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho S\ddot{u}\,\delta u\,dx\,dt - \left[\int_{t_1}^{t_2} ES\frac{\partial u}{\partial x}\,\delta u\,dt\right]_0^L + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\delta u\,dx\,dt + \int_{t_1}^{t_2} F_0\,\delta u(L,t)\,dt = 0$$

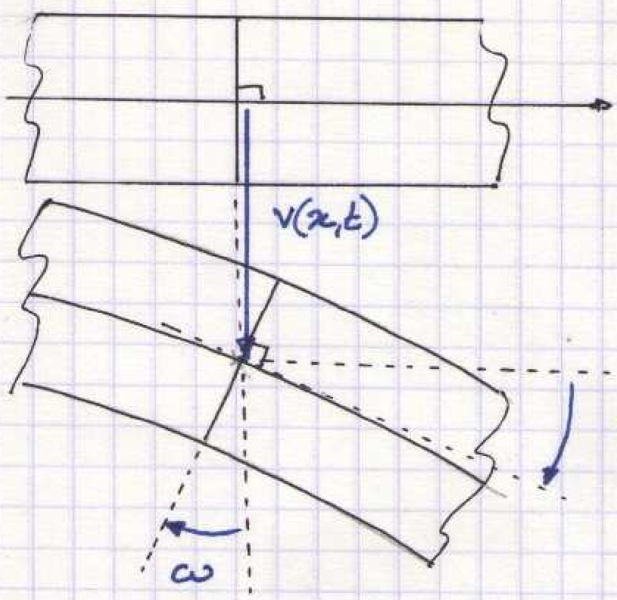
$\boxed{\rho S\ddot{u} - ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$ équation du mouvement

$ES\frac{\partial u}{\partial x}\,\delta u = 0$ en $x = 0$ $\qquad$ $\delta u(0,t) = 0$ encastrement

$-ES\frac{\partial u}{\partial x}\,\delta u + F_0\,\delta u = 0$ en $x = L$ $\qquad$ $ES\frac{\partial u}{\partial x} = F_0$ effort imposé

conditions aux limites

Poutre en flexion



$$\omega \sim \tan \omega = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

En suivant cette représentation du mouvement, on peut exprimer ε et σ

Pour appliquer le principe de Hamilton, il faut exprimer les énergies E_c, V et W_{ext}

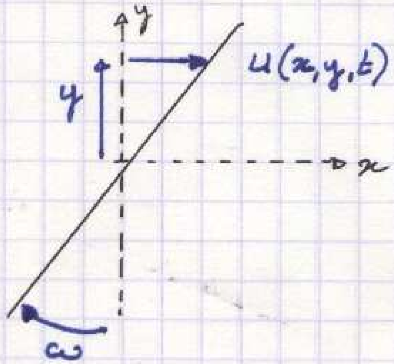
Pour une poutre en flexion, on néglige l'énergie de rotation, alors

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \dot{v}^2 dx$$

Poutre en flexion

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \dot{v}^2 dx$$

En suivant cette représentation du mouvement, on peut exprimer ε et σ



$$u = -\omega y = -\frac{\partial v}{\partial x} y$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y \qquad \sigma = E\varepsilon = -E\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y$$

$$V = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \, d\Omega = \frac{1}{2}\int_0^L \int_S y^2 E \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 ds \, dx$$

<u>remarque:</u> l'intégrale sur la section S ne concerne que y^2, on pose alors

$$\int_S y^2 ds = I$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

Poutre en flexion

Principe de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_c - V + W_{ext})\,dt = 0 \qquad \forall \delta u \quad \text{avec} \quad \delta u(t_1) = 0 \quad \delta u(t_2) = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_c - \delta V + \delta W_{ext})\,dt = 0$$

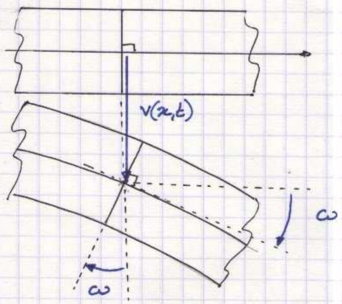
$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho S\, \dot v\, \delta \dot v\, dx - \int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, \delta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dx + F_0 \delta v(L,t)\; dt = 0 \qquad \forall \delta v$$

double intégration

simple intégration

Poutre en flexion

Exemple de structure continue : poutre en flexion



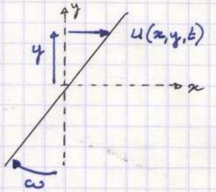
Pour appliquer le principe de Hamilton, il faut exprimer les énergies E_c, V et W_{ext}

$$\omega \sim \tan\omega = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

Pour une poutre en flexion, on néglige l'inertie de rotation, alors

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^L \rho S \dot{v}^2 dx$$

En suivant cette représentation du mouvement, on peut exprimer ε et σ



$$u = -\omega y = -\frac{\partial v}{\partial x} y$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y \qquad \sigma = E\varepsilon = -E\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y$$

$$V = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma : \varepsilon \, d\Omega = \frac{1}{2}\int_0^L \int_S y^2 E \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 ds\, dx$$

remarque : l'intégrale sur la section S ne concerne que y^2, on pose alors

$$\int_S y^2 ds = I$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

$\hookrightarrow W_{ext} = F_0\, v(L,t)$

Principe de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_c - V + W_{ext})\, dt = 0 \quad \forall \delta u \quad \text{avec } \delta u(t_1) = 0 \quad \delta u(t_2) = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_c - \delta V + \delta W_{ext})\, dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho S \dot{v}\, \delta\dot{v}\, dx - \int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, \delta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) dx + F_0 \delta v(L,t)\, dt = 0 \qquad \forall \delta v$$

double intégration

simple intégration

$$\underbrace{\left[\int_0^L \rho S \dot{v}\, \delta v\, dx\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0 \;\; \delta v(t_1)=0,\; \delta v(t_2)=0} - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho S \ddot{v}\, \delta v\, dx$$

$$- \left[\int_{t_1}^{t_2} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dt\right]_0^L + \left[\int_{t_1}^{t_2} EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^2}\, \delta v\, dt\right]_0^L - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\, \delta v\, dx\, dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} F_0\, \delta v(L,t)\, dt = 0$$

$$\boxed{EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho S \ddot{v} = 0} \quad \text{équation du mouvement}$$

$+EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$	en $x = 0$	$\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(0,t) = 0$	encastrement
$-EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$	en $x = L$	$-EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L,t) = 0$	moment nul
$-EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\, \delta v = 0$	en $x = 0$	$\delta v(0,t) = 0$	encastrement
$+\left(EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + F_0\right) \delta v = 0$	en $x = L$	$-EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L,t) = F_0$	effort imposé