北航中法工程师学院
CENTRALE PEKIN

Année académique 2019-2020

Examen de mi-semestre

OUTILS MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE

Sujet de l'examen de mi-semestre

Mercredi 15 Avril 2020

14h - 18h (à faire en 2h)

Vous préciserez vos noms et prénoms chinois, prénoms français et numéro d'étudiant sur votre copie.

Les dictionnaires papiers sont autorisés. Les calculatrices sont autorisées.

Données :

— $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}

— $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi}.10^{-9}$ F.m^{-1}

— En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{grad}(V) = \dfrac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \phi}\overrightarrow{e_\phi}$

EXERCICE I : LA FOUDRE

I. LE SYSTÈME TERRE-ATMOSPHÈRE

On considère que la Terre et son atmosphère constituent les deux armatures d'un condensateur sphérique. L'armature terrestre est chargée négativement, l'atmosphère positivement. Au voisinage du sol, le champ électrique créé est de l'ordre de 10^2 V.m^{-1}.

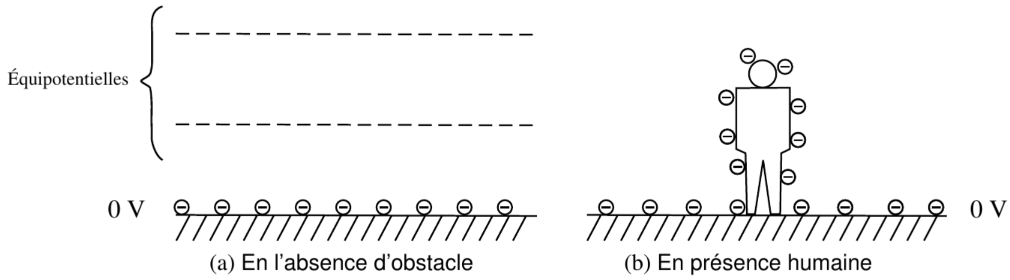

FIGURE 1 – Déformation des surfaces équipotentielles

1. On suppose conventionnellement que le sol est de potentiel nul.
   a) Reproduire la figure 1(a) et sur votre copie et attribuer à chacune des équipotentielles sa valeur en volts, sachant qu'elles sont séparées d'un mètre.
   b) Représenter quelques lignes de champ électrique.
2. On étudie maintenant la modification des lignes de champ par la présence d'un homme.
   a) Reproduire la figure 1(b) sur votre copie et représenter les mêmes équipotentielles que celles de la figure 9a, en tenant compte de la présence d'un homme.
   b) Représenter quelques lignes de champ électrique au voisinage de l'homme.
   c) L'observation de ces lignes de champ permet-elle de déterminer les zones de faible ou de fort champ électrique ? Justifier. Indiquer alors les zones de fort champ électrique.
3. Le système Terre-atmosphère est localement modélisable par un condensateur plan dont une armature porte la densité surfacique de charge σ supposée positive.
   a) Démontrer qu'un plan infini portant la densité surfacique de charge σ crée un champ électrique de norme $E_{plan} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$ en tout point de l'espace
   b) Rappeler l'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle q située en un point de l'espace et vérifier ainsi l'homogénéité de l'expression précédente du champ électrique E_{plan}.
   c) Représenter le vecteur champ électrique de part et d'autre du plan infini portant la densité surfacique de charge σ. Établir, en utilisant l'expression de E_{plan} et à l'aide d'un théorème que l'on nommera, l'expression de la norme du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur d'un condensateur plan.
   d) Sachant que $\sigma = 1,1.10^9$ C.m^{-2}, quelle valeur numérique du champ électrique à l'intérieur du condensateur plan peut-on en déduire ?

      Il s'agit là, en réalité, d'une valeur moyenne, la norme du champ électrique évoluant régulièrement avec l'altitude.

II. TENSION DE PAS

Lors d'un coup de foudre, l'air est ionisé dans un canal conduisant du sol au nuage orageux. On assimile l'éclair à un fil rectiligne infini, d'axe Oz de rayon a, parcouru par un courant $I(t)$ uniformément réparti dans une section droite et l'on se place en régime stationnaire. Un point M au voisinage de l'éclair sera repéré en représentation cylindrique, par ses coordonnées (r,,z).

4. Placer sur un schéma, l'éclair, la base locale cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ et le point M, en choisissant l'axe Oz ascendant.
5. Dans le cas d'un coup de foudre les charges entre les nuages et le sol se rééquilibrent, en déduire le sens du courant $I(t)$ dans l'éclair.
6. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ créé par l'éclair dans l'air en $r > a$.
7. a) Donner l'expression de la force de Lorentz ressentie par les charges positives et négatives se déplaçant le long du canal d'air lors de l'éclair.
   b) En déduire que le canal d'air à tendance à imploser.
   c) Quelle est l'origine du phénomène lumineux (éclair) et du phénomène sonore (tonnerre) ?
8. En supposant que le courant du coup de foudre se répartit de manière uniforme dans le sol, déterminer l'expression de la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans le sol.
9. Le sol étant supposé conducteur il apparaît un champ électrique dans le sol relié au courant par la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ où γ est la conductivité du sol, $\gamma = 1$ S.m^{-1}.
   a) Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$ présent dans le sol
   b) En déduire l'expression du potentiel $V(r)$ dans le sol, où r est la distance au point d'impact de la foudre. (On prendre le potentiel dans le sol nul à l'infini)

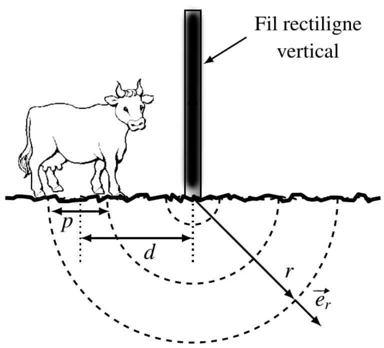

FIGURE 2 – Tension de pas

   c) Une vache se trouve à la distance moyenne d du lieu d'impact de la foudre (un arbre par exemple) et la distance entre ses deux pattes avant et arrière est p (voir figure 2). Exprimer, en fonction de p et d, les potentiels au niveau des pattes avant et arrière de la vache. En supposant que $d^2 \gg \left(\frac{p}{2}\right)^2$, montrer que la différence de potentiel entre les pattes U_p, aussi appelée tension de pas, est de l'ordre de $U_p \simeq \dfrac{Ip}{2\pi\gamma d^2}$.
   d) Soit $R \simeq 2{,}5$ kΩ la résistance entre les pattes avant et arrière de la vache, distantes de $p \simeq 1{,}5$ m. À quelle distance minimale d_m du point d'impact doit-elle se trouver pour que son corps soit traversé par un courant électrique d'intensité inférieure à $I_{max} = 25$ mA ? On donnera l'expression de d_m en fonction de I, I_{max} , p, R et γ. Faire l'application numérique
   e) Expliquer pourquoi cette tension de pas est plus dangereuse pour une vache que pour l'homme.

EXERCICE II : BOBINES DE HELMHOLTZ

Une méthode classique de production d'un champ magnétique uniforme est l'utilisation des bobines de HELMHOLTZ. Les questions suivantes vont permettre d'expliciter leurs caractéristiques.

On considere une spire circulaire C, de centre O, de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I constante. L'axe Oz est perpendiculaire au plan de la spire. On appelle $\vec{B}_{coz}(z)$ le champ magnétique créé par la spire en un point situé sur l'axe Oz a la cote z.

1. Déterminer l'expression de $\vec{B}_{coz}(O)$ en fonction de μ_0, R, I
2. Déterminer l'expression de $\vec{B}_{coz}(z)$ en fonction de $\vec{B}_{coz}(0)$ et la variable sans dimension $u = \dfrac{z}{R}$.

On considere le montage de la figure 3 constitué de deux bobines plates d'épaisseur négligeable, composées chacune de N spires circulaires de rayon R, de meme axe de symétrie Oz.

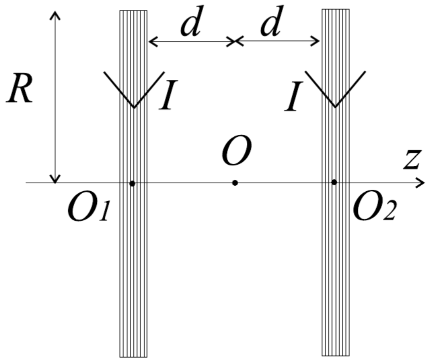

FIGURE 3 – Bobines de Helmholtz

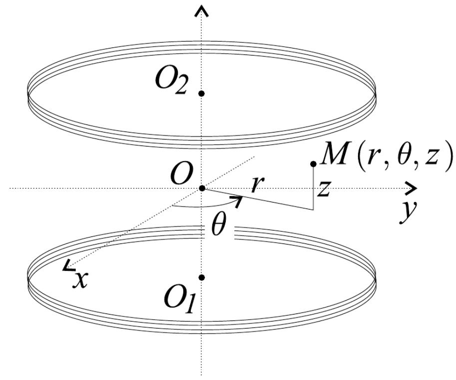

FIGURE 4 – Coordonnées cylindriques

Ces deux bobines ont pour centres de symétrie respectifs O_1 et O_2, elles sont parcourues par des courants identiques d'intensité I constante. Les extrémités de ces bobines sont séparées d'une distance $D = 2d$. La configuration d'HELMHOLTZ est obtenue lorsque $d = \dfrac{R}{2}$.

On note $\vec{B}_h$ le champ créé par la configuration d'HELMHOLTZ (B_{hr} , $B_{h\theta}$, B_{hz}) les composantes de $\vec{B}_h$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ des coordonnées cylindriques (voir Figure 4).

3. On pose toujours $u = \dfrac{z}{R}$, déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}_{hoz}(u)$ créé par la configuration de la figure 3 en un point situé sur l'axe Oz à la position z.
4. Représenter sur le même graphique les fonctions $u \longmapsto \dfrac{||\vec{B}_{coz}(u)||}{||\vec{B}_{coz}(0)||}$ et $u \longmapsto \dfrac{||\vec{B}_{hoz}(u)||}{||\vec{B}_{hoz}(0)||}$. Que constatez-vous lorsque $u \simeq 0$?
5. On note $g(u) = ||\vec{B}_{hoz}(u)||$. Justifier physiquement que la fonction $g(u)$ est paire. Ecrire, en fonction de u et de la constante $\gamma = \dfrac{8N\mu_0 I}{5\sqrt{5}R}$ le développement limité $\tilde{g}(u)$ de $g(u)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. On donne :

$$\left[1+\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2} = \frac{8}{5\sqrt{5}}\left(1 \mp \frac{6}{5}x \pm \frac{32}{25}x^3 - \frac{144}{125}x^4 + o(x^4)\right) \quad \text{avec} \quad \forall n \geq 1,\ \lim_{x\to 0} x^n o(x^n) = 0$$

6. Déterminer l'amplitude de l'intervalle centré sur l'origine sur lequel la fonction $\tilde{g}(u)$ ne varie pas de plus de 2% en erreur relative.
7. En considérant les symétries de la configuration montrer que $B_{hr} = B_{hr}(r,z)$, $B_{hz} = B_{hz}(r,z)$ et $B_{h\theta} = 0$.

Brouillon (manuscrit paper)

Brouillon (manuscrit paper)

Brouillon (manuscrit paper)

Brouillon (manuscrit paper)