Francais des sciences - Physique 3

Repérage dans l'espace et cinématique

École Centrale Pékin

Année 1

Table des matières

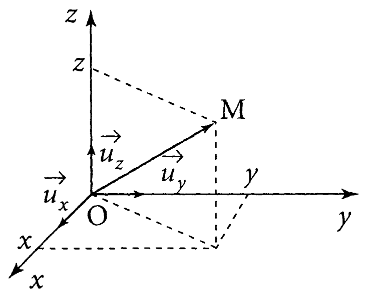
3 Les différents systèmes de coordonnées

En physique, on utilise principalement 3 systèmes de coordonnées (ou repère). On choisit le système de coordonnées en fonction de la géométrie du problème.

3.1 Coordonnées cartésiennes

3.1.1 Repère cartésien

Le **repère cartésien** est un repère orthonormé défini par un point origine O et une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_x};\overrightarrow{u_y};\overrightarrow{u_z})$: c'est le repère $(O;\overrightarrow{u_x};\overrightarrow{u_y};\overrightarrow{u_z})$.

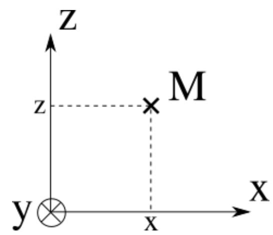


L'axe (droite orientée) défini par :

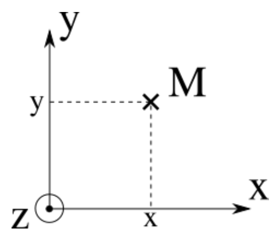
- le point O et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$ est noté axe Ox et appelé axe des **abscisses**.
- le point O et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_y}$ est noté axe Oy et appelé axe des **ordonnées**.
- le point O et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$ est noté axe Oz et appelé axe des **cotes**.

En projetant la position du point M sur chaque axe, on détermine les **coordonnées cartésiennes** de M : $(x;y;z)$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.

Projection sur le plan $0xz$



Projection sur le plan $0xy$



3.1.2 Position, vitesse et accélération

• **Vecteur position** : les coordonnées de M définissent de façon unique la position de l'extrémité du **vecteur position** :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}}$$

• **Vecteur vitesse** : le **vecteur vitesse** est défini à partir de la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

Démonstration. □

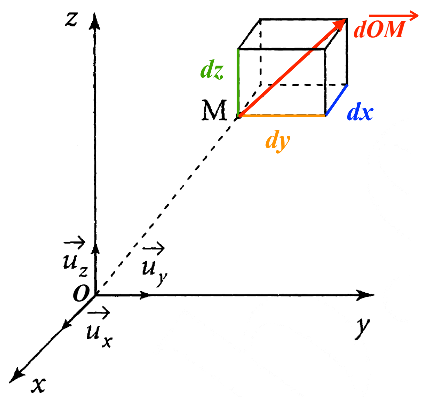
• **Vecteur accélération** : le **vecteur accélération** est défini à partir de la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

Démonstration. □

3.1.3 Déplacement, surface et volume élémentaires

• **Déplacement élémentaire** : la position du point M dépend de plusieurs paramètres (les 3 coordonnées). Si on fait varier chaque paramètre de manière **infinitésimale** (toute petite variation), alors le point M de déplace un tout petit peu : c'est ce qu'on appelle le **déplacement élémentaire** $d\overrightarrow{OM}$.



En coordonnées cartésienne, on fait varier x, y et z d'une quantité infinitésimale dx, dy et dz. Cela signifie que les nouvelle coordonnées de M sont $(x + dx; y + dy; z + dz)$. Dans ce cas, le déplacement élémentaire est :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}}$$

• **Surface élémentaire** : le déplacement du point M engendre dans chaque plan une **surface élémentaire** dS. La surface est orientée par un vecteur unitaire orthogonal à la surface. En coordonnées cartésiennes, on a 3 surfaces élémentaires :

$$\boxed{d\overrightarrow{S_z} = dxdy\overrightarrow{u_z} \qquad d\overrightarrow{S_y} = dxdz\overrightarrow{u_y} \qquad d\overrightarrow{S_x} = dydz\overrightarrow{u_x}}$$

• **Volume élémentaire** : de la même manière que pour la surface élémentaire, on définit un **volume élémentaire** $d\tau$:

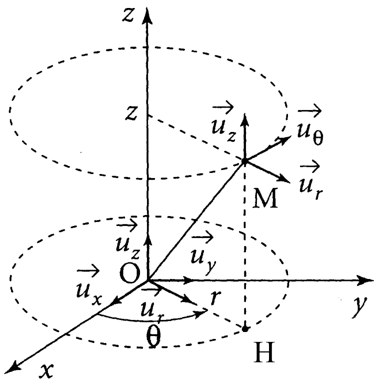
$$\boxed{d\tau = dxdydz}$$

Remarque : le volume élémentaire est délimité par une surface. Cette surface est orientée par un vecteur orthogonal à la surface : ce vecteur sera toujours **orienté vers l'extérieur du volume**.

3.2 Coordonnées cylindriques

3.2.1 Repère cylindrique

Le **repère cylindrique** est un repère orthonormé défini par un point origine O et une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_r};\overrightarrow{u_\theta};\overrightarrow{u_z})$: c'est le repère $(O;\overrightarrow{u_r};\overrightarrow{u_\theta};\overrightarrow{u_z})$.



Les vecteurs de la base sont définis par :

- le vecteur $\overrightarrow{u_z}$ est le même vecteur que la base cartésienne
- les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dans le plan Oxy et sont définis par la position du point H qui est le projeté orthogonal de M dans le plan cartésien Oxy : $\overrightarrow{u_r}$ est dans la direction de $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dans une direction orthogonal pour que la base $(\overrightarrow{u_r};\overrightarrow{u_\theta};\overrightarrow{u_z})$ soit une base orthonormée directe.

Les **coordonnées cylindriques** (r,θ,z) du point M sont alors définies par :

$$r = \ \|\overrightarrow{OH}\| = OH > 0 \quad \text{variant de 0 à } +\infty$$

$$\theta = \ (\widehat{\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{OH}}) \quad \text{variant de 0 à } 2\pi$$

$$z \quad \text{comme en cartésien variant de } -\infty \text{ à } +\infty$$

3.2.2 Position, vitesse et accélération

• **Vecteur position** : les coordonnées de M définissent de façon unique la position de l'extrémité du **vecteur position** :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}}$$

• **Vecteur vitesse** : le **vecteur vitesse** est défini à partir de la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

Démonstration. □

• **Vecteur accélération** : le **vecteur accélération** est défini à partir de la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

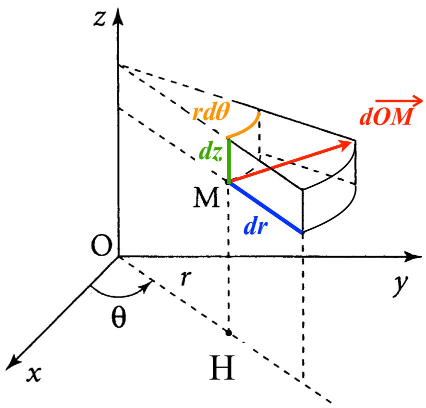
$$\boxed{\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

Démonstration. □

3.2.3 Déplacement, surface et volume élémentaires

• **Déplacement élémentaire** : on fait varier r, θ et z d'une quantité infinitésimale dr, $d\theta$ et dz. Cela signifie que les nouvelle coordonnées de M sont $(r + dr; \theta + d\theta; z + dz)$. Dans ce cas, le déplacement élémentaire est :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}}$$



• **Surface élémentaire** : on a 3 surfaces élémentaires engendrées par les variations dr, $d\theta$ et dz :

$$\boxed{d\overrightarrow{S_z} = rdrd\theta\overrightarrow{u_z} \qquad d\overrightarrow{S_\theta} = drdz\overrightarrow{u_\theta} \qquad d\overrightarrow{S_r} = rd\theta dz\overrightarrow{u_r}}$$

• **Volume élémentaire** : de la même manière que pour la surface élémentaire, on définit un **volume élémentaire** $d\tau$:

$$\boxed{d\tau = rdrd\theta dz}$$