FRANCAIS DES SCIENCES - PHYSIQUE 3

Repérage dans l'espace et cinématique

École Centrale Pékin

Année 1

Table des matières

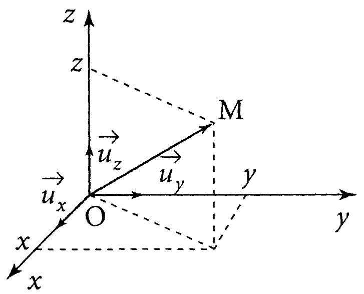
3 Les différents systèmes de coordonnées

En physique, on utilise principalement 3 systèmes de coordonnées (ou repère). On choisit le système de coordonnées en fonction de la géométrie du problème.

3.1 Coordonnées cartésiennes

3.1.1 Repère cartésien

Le **repère cartésien** est un repère orthonormé défini par un point origine O et une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_x}; \overrightarrow{u_y}; \overrightarrow{u_z})$: c'est le repère $(O; \overrightarrow{u_x}; \overrightarrow{u_y}; \overrightarrow{u_z})$.

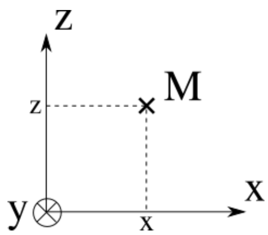


L'axe (droite orientée) défini par :

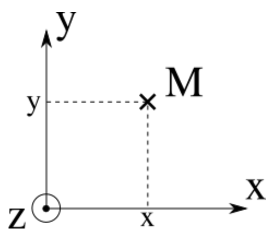
- le point O et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$ est noté axe Ox et appelé axe des **abscisses**.
- le point O et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_y}$ est noté axe Oy et appelé axe des **ordonnées**.
- le point O et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$ est noté axe Oz et appelé axe des **cotes**.

En projetant la position du point M sur chaque axe, on détermine les **coordonnées cartésiennes** de M : $(x; y; z)$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.

Projection sur le plan $0xz$



Projection sur le plan $0xy$



3.1.2 Position, vitesse et accélération

• **Vecteur position** : les coordonnées de M définissent de façon unique la position de l'extrémité du **vecteur position** :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}}$$

• **Vecteur vitesse** : le **vecteur vitesse** est défini à partir de la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

Démonstration. $\overrightarrow{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}\right)$ □

$$= \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x} + x\frac{d\overrightarrow{u_x}}{dt} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u_y} + y\frac{d\overrightarrow{u_y}}{dt} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z} + z\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt}$$

$\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ sont des vecteurs fixes donc $\dfrac{d\overrightarrow{u_x}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{u_y}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{u_z}}{dt} = \overrightarrow{0}$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}}$ avec $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$

• **Vecteur accélération** : le **vecteur accélération** est défini à partir de la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{u_x} + \ddot{y}\vec{u_y} + \ddot{z}\vec{u_z}}$$

Démonstration.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\,\vec{u_x} + \dot{y}\,\vec{u_y} + \dot{z}\,\vec{u_z}\right)$$

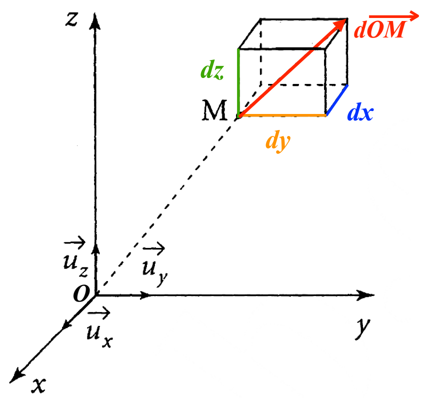
$$= \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{u_x} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{u_y} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u_x} + \ddot{y}\,\vec{u_y} + \ddot{z}\,\vec{u_z}} \quad \text{avec } \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots$$

□

3.1.3 Déplacement, surface et volume élémentaires

• **Déplacement élémentaire** : la position du point M dépend de plusieurs paramètres (les 3 coordonnées). Si on fait varier chaque paramètre de manière **infinitésimale** (toute petite variation), alors le point M de déplace un tout petit peu : c'est ce qu'on appelle le **déplacement élémentaire** $d\overrightarrow{OM}$.

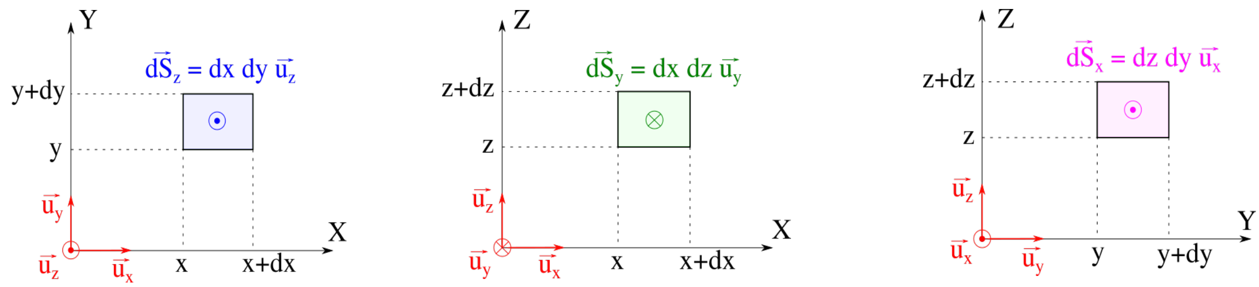


En coordonnées cartésienne, on fait varier x, y et z d'une quantité infinitésimale dx, dy et dz. Cela signifie que les nouvelle coordonnées de M sont $(x+dx; y+dy; z+dz)$. Dans ce cas, le déplacement élémentaire est :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u_x} + dy\vec{u_y} + dz\vec{u_z}}$$

• **Surface élémentaire** : le déplacement du point M engendre dans chaque plan une **surface élémentaire** dS. La surface est orientée par un vecteur unitaire orthogonal à la surface. En coordonnées cartésiennes, on a 3 surfaces élémentaires :

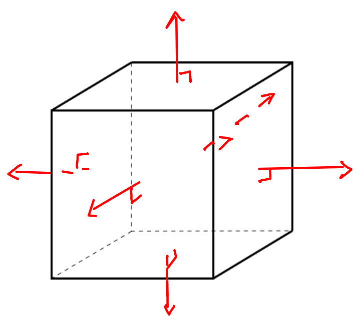
$$\boxed{d\vec{S_z} = dxdy\vec{u_z} \qquad d\vec{S_y} = dxdz\vec{u_y} \qquad d\vec{S_x} = dydz\vec{u_x}}$$



• **Volume élémentaire** : de la même manière que pour la surface élémentaire, on définit un **volume élémentaire** $d\tau$:

$$\boxed{d\tau = dxdydz}$$

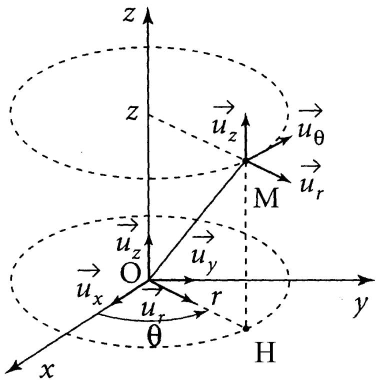
Remarque : le volume élémentaire est délimité par une surface. Cette surface est orientée par un vecteur orthogonal à la surface : ce vecteur sera toujours **orienté vers l'extérieur du volume**.



3.2 Coordonnées cylindriques

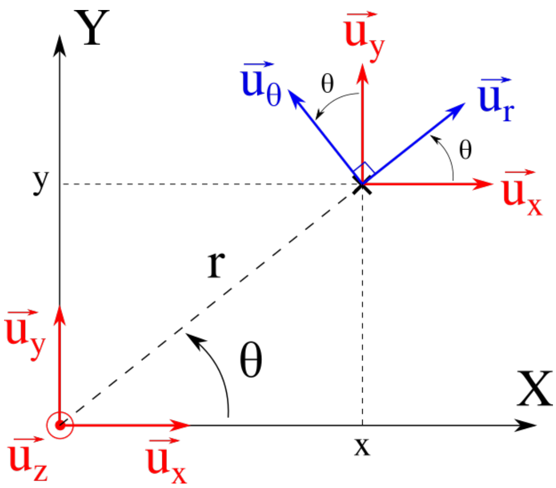
3.2.1 Repère cylindrique

Le **repère cylindrique** est un repère orthonormé défini par un point origine O et une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_r}; \overrightarrow{u_\theta}; \overrightarrow{u_z})$: c'est le repère $(O; \overrightarrow{u_r}; \overrightarrow{u_\theta}; \overrightarrow{u_z})$.



Les vecteurs de la base sont définis par :

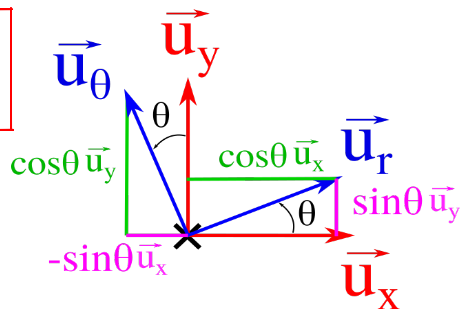
- le vecteur $\overrightarrow{u_z}$ est le même vecteur que la base cartésienne
- les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dans le plan Oxy et sont définis par la position du point H qui est le projeté orthogonal de M dans le plan cartésien Oxy : $\overrightarrow{u_r}$ est dans la direction de $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dans une direction orthogonal pour que la base $(\overrightarrow{u_r}; \overrightarrow{u_\theta}; \overrightarrow{u_z})$ soit une base orthonormée directe.



$$\boxed{\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\, \vec{u}_x + \sin\theta\, \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\, \vec{u}_x + \cos\theta\, \vec{u}_y \end{cases}}$$

et

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \mathrm{Atan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}}$$



Les **coordonnées cylindriques** (r, θ, z) du point M sont alors définies par :

$$r = \|\overrightarrow{OH}\| = OH > 0 \quad \text{variant de } 0 \text{ à } +\infty$$

$$\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OH}}) \quad \text{variant de } 0 \text{ à } 2\pi$$

$$z \quad \text{comme en cartésien variant de } -\infty \text{ à } +\infty$$

3.2.2 Position, vitesse et accélération

• **Vecteur position** : les coordonnées de M définissent de façon unique la position de l'extrémité du **vecteur position** :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}}$$

• **Vecteur vitesse** : le **vecteur vitesse** est défini à partir de la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{u_r} + z\,\vec{u_z}\right)$$

$$= r\frac{d\vec{u_r}}{dt} + \dot{r}\,\vec{u_r} + z\frac{d\vec{u_z}}{dt} + \dot{z}\,\vec{u_z}$$

$\frac{d\vec{u_z}}{dt} = \vec{0}$, calculons $\frac{d\vec{u_r}}{dt}$

$$\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y}\right)$$

$$= \frac{d\cos\theta}{dt}\vec{u_x} + \frac{d\sin\theta}{dt}\vec{u_y} \quad \text{(car } \vec{u_x} \text{ et } \vec{u_y} \text{ sont fixes)}$$

Or $\cos\theta(t)$ est une fonction composée et :

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta \times \dot{\theta}$$

De même $\frac{d\sin\theta}{dt} = \cos\theta \times \dot{\theta}$

Ainsi $\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\vec{u_x} + \cos\theta\,\vec{u_y}\right) = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

On a $\boxed{\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta}}$ et de même $\boxed{\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u_r}}$

En reportant dans le calcul de la vitesse on obtient :

$$\boxed{\vec{V} = r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{r}\,\vec{u_r} + \dot{z}\,\vec{u_z}}$$

Démonstration. □

• **Vecteur accélération** : le **vecteur accélération** est défini à partir de la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u_\theta} + \ddot{z}\vec{u_z}}$$

Démonstration. □

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}\right)$$

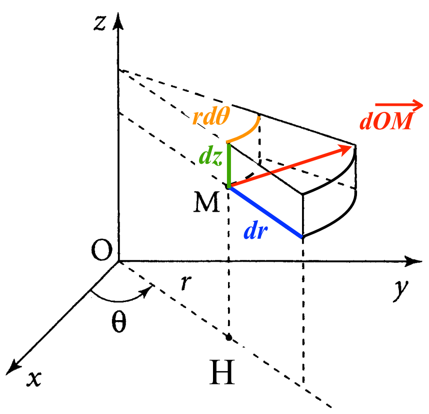
$$= \underbrace{\frac{d\dot{r}}{dt}}_{\ddot{r}}\vec{u_r} + \dot{r}\overbrace{\frac{d\vec{u_r}}{dt}}^{\dot{\theta}\vec{u_\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\overbrace{\frac{d\dot{\theta}}{dt}}^{\ddot{\theta}}\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\overbrace{\frac{d\vec{u_\theta}}{dt}}^{-\dot{\theta}\vec{u_r}} + \underbrace{\frac{d\dot{z}}{dt}}_{\ddot{z}}\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u_\theta} + \ddot{z}\vec{u_z}}$$

3.2.3 Déplacement, surface et volume élémentaires

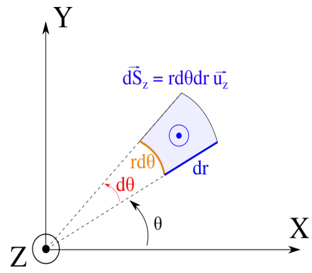
• **Déplacement élémentaire** : on fait varier r, θ et z d'une quantité infinitésimale dr, $d\theta$ et dz. Cela signifie que les nouvelle coordonnées de M sont $(r + dr; \theta + d\theta; z + dz)$. Dans ce cas, le déplacement élémentaire est :

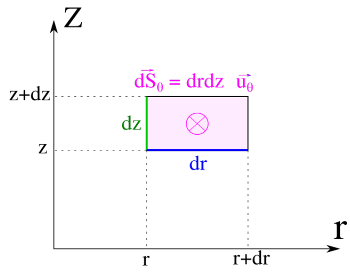
$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u_r} + rd\theta\vec{u_\theta} + dz\vec{u_z}}$$

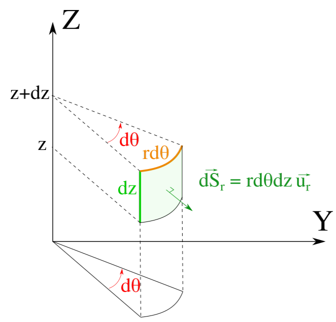


• **Surface élémentaire** : on a 3 surfaces élémentaires engendrées par les variations dr, $d\theta$ et dz :

$$\boxed{d\vec{S_z} = rdrd\theta\vec{u_z} \qquad d\vec{S_\theta} = drdz\vec{u_\theta} \qquad d\vec{S_r} = rd\theta dz\vec{u_r}}$$







• **Volume élémentaire** : de la même manière que pour la surface élémentaire, on définit un **volume élémentaire** $d\tau$:

$$\boxed{d\tau = rdrd\theta dz}$$