# FRANCAIS DES SCIENCES - PHYSIQUE 3

## Repérage dans l'espace et cinématique

École Centrale Pékin

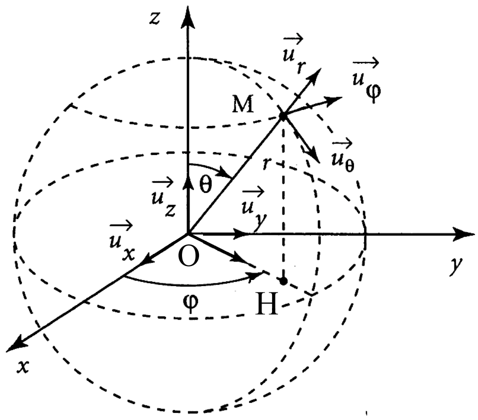
Année 1

### Table des matières

## 3.3 Coordonnées sphériques

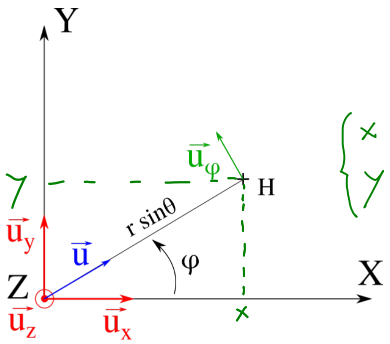
### 3.3.1 Repère sphérique

Le **repère sphérique** est un repère orthonormé défini par un point origine $O$ et une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_r}; \overrightarrow{u_\theta}; \overrightarrow{u_\varphi})$ : c'est le repère $(O; \overrightarrow{u_r}; \overrightarrow{u_\theta}; \overrightarrow{u_\varphi})$.

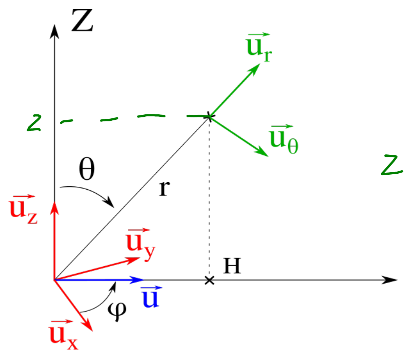



Les vecteurs de la base sont définis par :

- le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est dans la direction de $\overrightarrow{OM}$
- le vecteurs $\overrightarrow{u_\theta}$ se déduit du vecteur $\overrightarrow{u_r}$ par une rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens des $\theta$ croissants dans le plan $\varphi = cste$
- le vecteurs $\overrightarrow{u_\varphi}$ est un vecteur unitaire dont le sens et la direction sont déduit de $\overrightarrow{OH}$ ($H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur le plan $Oxy$) par une rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens des $\varphi$ croissant dans le plan $z = 0$




$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \end{cases}$$




$$z = r \cos\theta$$

$$\overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

et

$$\vec{u} = \cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_\theta} &= \cos\theta\,\vec{u} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ &= \cos\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{u_y}\right) - \sin\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ &= \cos\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{u_y} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_r} &= \sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ &= \sin\theta\left(\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{u_y}\right) + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ &= \sin\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{u_y} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z} \end{aligned}$$

Les **coordonnées sphériques** $(r, \theta, \varphi)$ du point $M$ sont alors définies par :

$$r = \|\overrightarrow{OM}\| = OM > 0 \quad \text{variant de 0 à } +\infty$$

$$\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{OM}}) \quad \text{variant de 0 à } \pi$$

$$\varphi = (\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OH}}) \quad \text{variant de 0 à } 2\pi$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \mathrm{Atan}\,\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi = \mathrm{Atan}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

### 3.3.2 Position, vitesse et accélération

• **Vecteur position** : les coordonnées de $M$ définissent de façon unique la position de l'extrémité du **vecteur position** :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}}$$

• **Vecteur vitesse** : le **vecteur vitesse** est défini à partir de la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}}$$

*Démonstration.* □

$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\,\dot{\vec{u_r}}$ et $\vec{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{u_x} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{u_y} + \cos\theta\,\vec{u_z}$

donc $\dot{\vec{u_r}} = (\dot\theta\cos\theta\cos\varphi - \dot\varphi\sin\theta\sin\varphi)\,\vec{u_x} + (\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi)\,\vec{u_y} - \dot\theta\sin\theta\,\vec{u_z}$

$= \dot\theta(\cos\theta\cos\varphi\,\vec{u_x} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{u_y} - \sin\theta\, u_z) + \dot\varphi\sin\theta(-\sin\varphi\,\vec{u_x} + \cos\varphi\,\vec{u_y})$

$= \dot\theta\,\vec{u_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$

et $\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot\theta\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta\dot\varphi\,\vec{u_\varphi}}$

• **Vecteur accélération** : le **vecteur accélération** est défini à partir de la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2)\,\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(2r\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\sin(\theta)\dot{\varphi} + r\sin(\theta)\ddot{\varphi}\right)\overrightarrow{u_\varphi}}$$

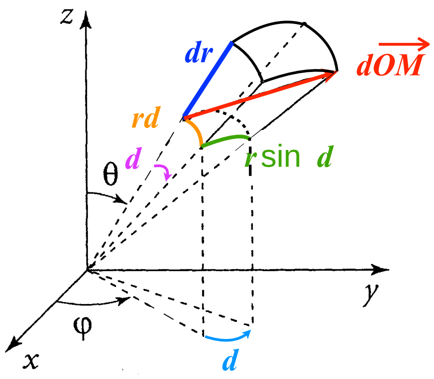
*Démonstration.* □

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\,\dot{\vec{u_r}} + \dot{r}\dot\theta\,\vec{u_\theta} + r\ddot\theta\,\vec{u_\theta} + r\dot\theta\,\dot{\vec{u_\theta}}$
$+ \dot{r}\sin\theta\,\dot\varphi\,\vec{u_\varphi} + r\dot\theta\cos\theta\,\dot\varphi\,\vec{u_\varphi} + r\sin\theta\,\ddot\varphi\,\vec{u_\varphi} + r\sin\theta\,\dot\varphi\,\dot{\vec{u_\varphi}}$

$$\begin{cases} \dot{\vec{u_r}} = \dot\theta\,\vec{u_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\,\vec{u_\varphi} \\ \dot{\vec{u_\theta}} = -\dot\theta\,\vec{u_r} + \dot\varphi\cos\theta\,\vec{u_\varphi} \\ \dot{\vec{u_\varphi}} = -\dot\varphi\cos\varphi\,\vec{u_x} - \dot\varphi\sin\varphi\,\vec{u_y} \end{cases}$$

En remplaçant les dérivées des vecteurs on obtient le résultat.

### 3.3.3 Déplacement, surface et volume élémentaires

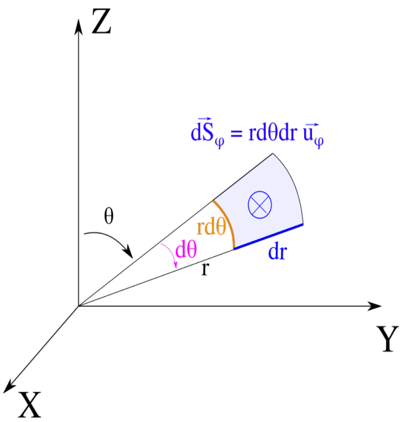


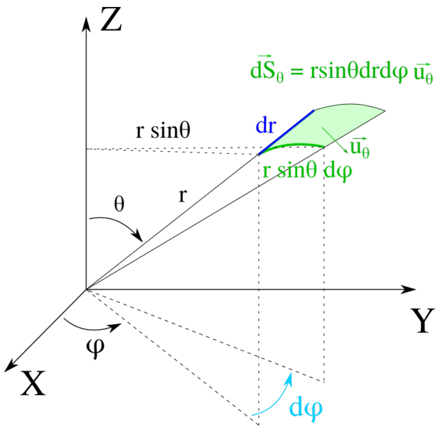

• **Déplacement élémentaire** : on fait varier $r$, $\theta$ et $\varphi$ d'une quantité infinitésimale $dr$, $d\theta$ et $d\varphi$. Cela signifie que les nouvelle coordonnées de $M$ sont $(r+dr;\theta+d\theta;\varphi+d\varphi)$. Dans ce cas, le déplacement élémentaire est :

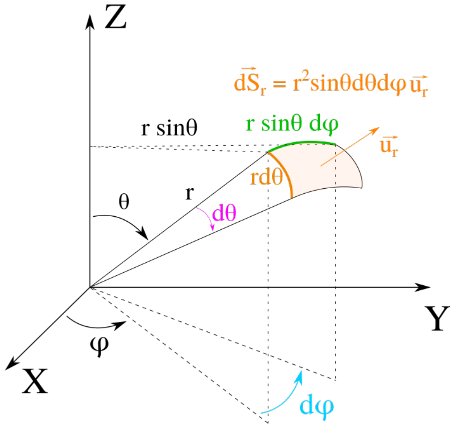
$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin(\theta)d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}}$$

• **Surface élémentaire** : on a 3 surfaces élémentaires engendrées par les variations $dr$, $d\theta$ et $d\varphi$ :

$$\boxed{d\overrightarrow{S_\varphi} = rdrd\theta\overrightarrow{u_\varphi} \qquad d\overrightarrow{S_\theta} = r\sin(\theta)drd\varphi\overrightarrow{u_\theta} \qquad d\overrightarrow{S_r} = r^2\sin(\theta)d\theta d\varphi\overrightarrow{u_r}}$$



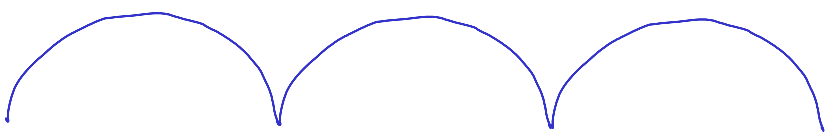

• **Volume élémentaire** : de la même manière que pour la surface élémentaire, on définit un **volume élémentaire** $d\tau$ :

$$\boxed{d\tau = r^2\sin(\theta)drd\theta d\varphi}$$

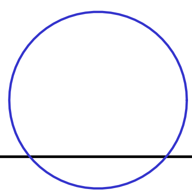
# 4 Référentiel

## 4.1 Définition


L'observateur immobile observe un point sur la roue, quel mouvement observe-t-il ?



L'observateur sur le vélo observe le même point sur la roue, quel mouvement observe-t-il ?



En mécanique, avant les calculs de position, vitesse ou accélération, il faut définir le système étudié et choisir le **référentiel** dans lequel on se place pour observer le mouvement.

**Définition :** Un **référentiel** est un repère et une horloge par rapport auxquels on repère un évènement dans l'espace et le temps. On peut alors définir une origine, 3 axes pointant dans des directions fixes pour le référentiel et un temps.

Une fois le référentiel et son repère choisis, on peut définir un deuxième repère (cartésien, cylindrique ou sphérique) plus adapté à l'étude du mouvement dans ce référentiel.

Il existe plusieurs référentiels usuels en physique que l'on choisit en fonction du problème à étudier.

## 4.2 Référentiel galiléen

**Définition :** Un objet est dit **isolé** lorsqu'aucune force ne s'exerce sur lui. On parle d'objet **pseudo-isolé** quand un objet est soumis à des forces qui se compensent.

**Définition :** Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel tout corps ponctuel isolé ou pseudo isolé est en mouvement rectiligne uniforme. Dans un référentiel galiléen le principe d'inertie est vérifié.

Lorsqu'on a trouvé un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, alors tout référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ est aussi un référentiel galiléen.

**Propriété :** les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiels galiléens.

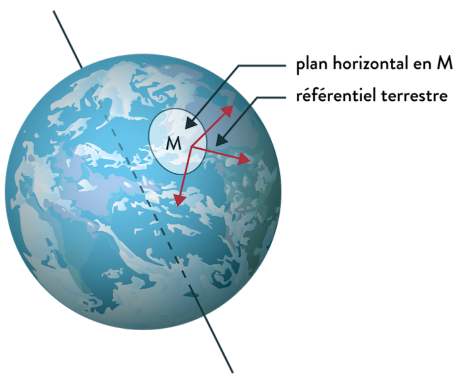
exemple :

Une voiture qui roule en ligne droite à vitesse constante par rapport à la route : Galiléen

Une voiture qui roule qui prend un tournant à vitesse constante par rapport à la route : Non galiléen

## 4.3 Référentiel terrestre

**Définition :** Le **référentiel terrestre** est le référentiel dont le centre est le centre de la Terre et dont les axes se déplacent avec la rotation de la Terre.



Le référentiel terrestre est aussi appelé **référentiel du laboratoire** car le laboratoire où on réalise l'expérience se déplace avec la Terre et est donc immobile dans le référentiel terrestre.

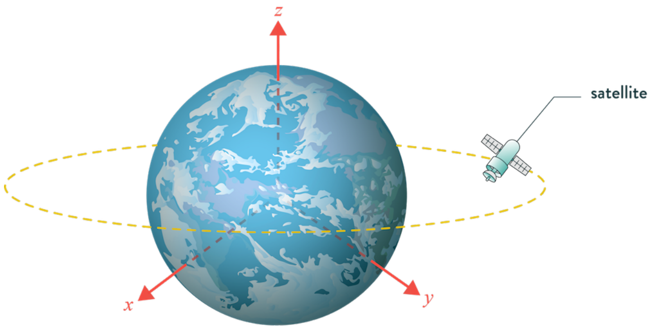
Comme le référentiel terrestre est en rotation autour de l'axe de la Terre, ce n'est pas un référentiel galiléen. Cependant, si les mouvements étudiés se déroulent sur un temps court devant la période de rotation de la Terre sur elle-même (24 heures), le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen.

exemple de mouvement où on se place dans le référentiel terrestre :

chute d'une balle
Mouvement d'un pendule

## 4.4 Référentiel géocentrique

**Définition :** Le **référentiel géocentrique** est le référentiel dont le centre est le centre de la Terre et dont les axes pointent vers 3 étoiles lointaines et fixes.



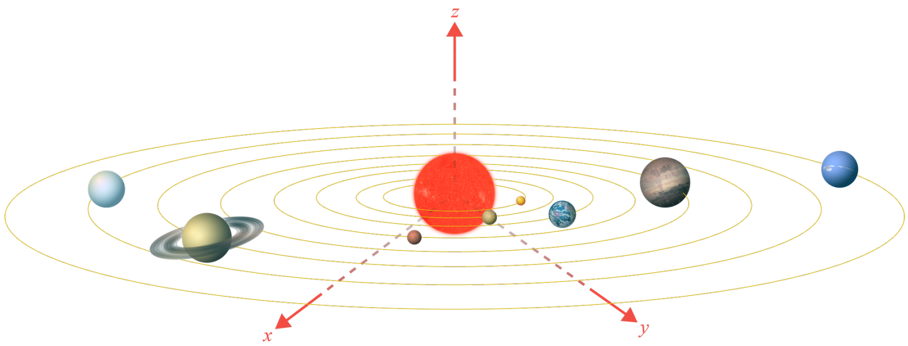

Comme les axes du référentiel géocentrique pointent vers des étoiles fixes, ce référentiel ne tourne pas avec la Terre sur elle-même. Par contre, le référentiel géocentrique tourne autour du Soleil, il n'est donc pas galiléen. Cependant, si les mouvements étudiés se déroulent sur un temps court par rapport à la période de rotation de la Terre autour du Soleil (364 jours), le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen.

exemple de mouvement où on se place dans le référentiel géocentrique :

Mouvement d'un satellite
Mouvement long (pendule de Foucault)

### 4.5 Référentiel héliocentrique

**Définition :** Le **référentiel héliocentrique** est le référentiel dont le centre est le centre du Soleil et dont les axes pointent vers 3 étoiles lointaines et fixes.




Le référentiel héliocentrique étant centré sur le Soleil, il ne tourne pas avec la Terre autour du Soleil. Par contre, le référentiel héliocentrique a un mouvement dans la galaxie, il n'est donc pas galiléen. Mais de nouveau, tout dépend du temps de l'expérience !

<u>exemple de mouvement où on se place dans le référentiel héliocentrique :</u>

Mouvement des planètes

Marées