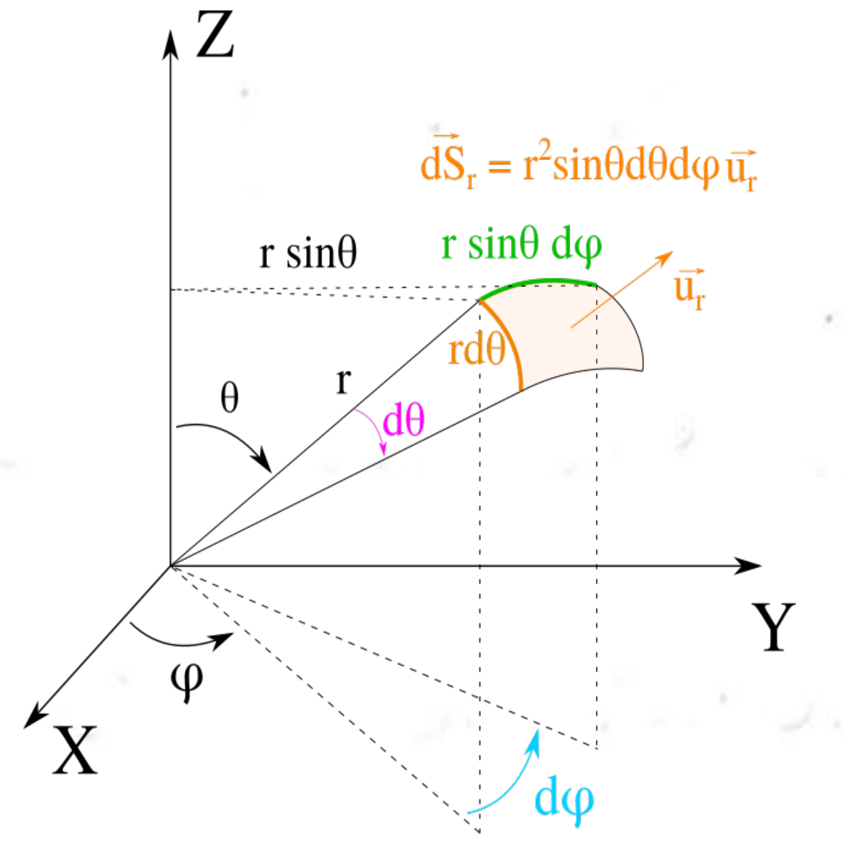
FdS

TD3 - Corrigé

Ex 1 : Du déplacement élémentaire au volume



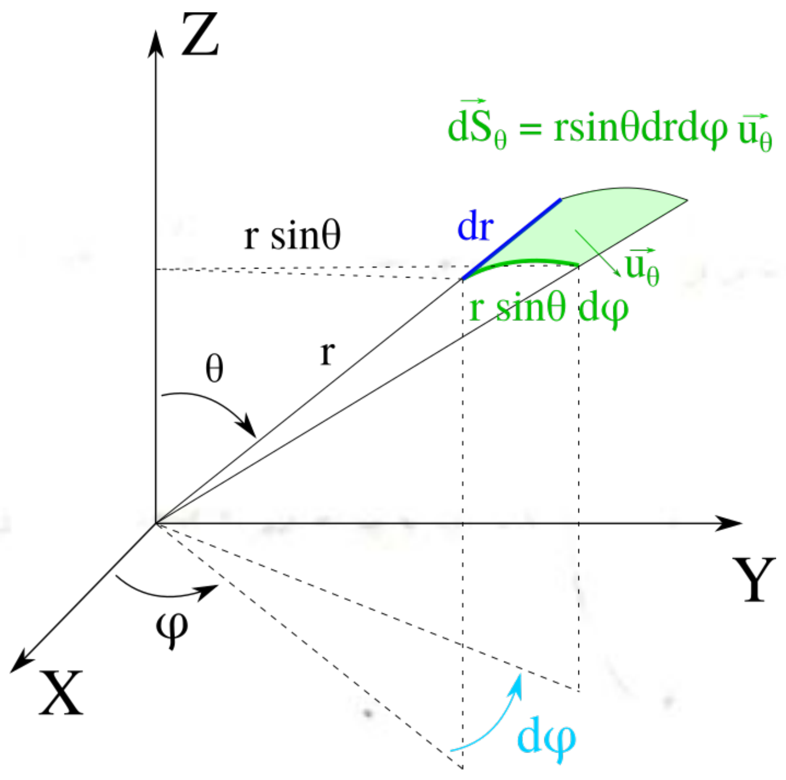
1) En sphérique :

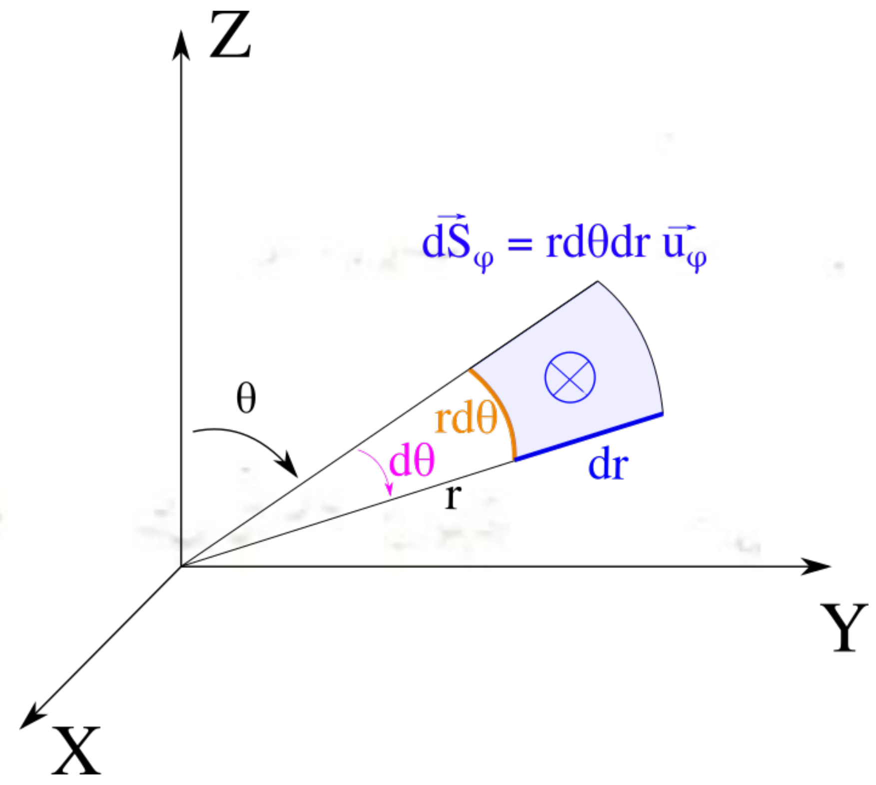
$$d\vec{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

$$d\vec{S_\varphi} = r\,dr\,d\theta\,\vec{e_\varphi}$$

$$d\vec{S_\theta} = r\sin\theta\,dr\,d\varphi\,\vec{e_\theta}$$

$$d\vec{S_r} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\vec{e_r}$$





2) a. Il faut intégrer $d\vec{S_r}$ sur $\theta \in [0,\pi]$ et $\varphi \in [0,2\pi]$

$$S_{sphère} = \iint R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = R^2\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \boxed{4\pi R^2}$$

b. Il faut intégrer $d\tau = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$ sur r, θ, φ

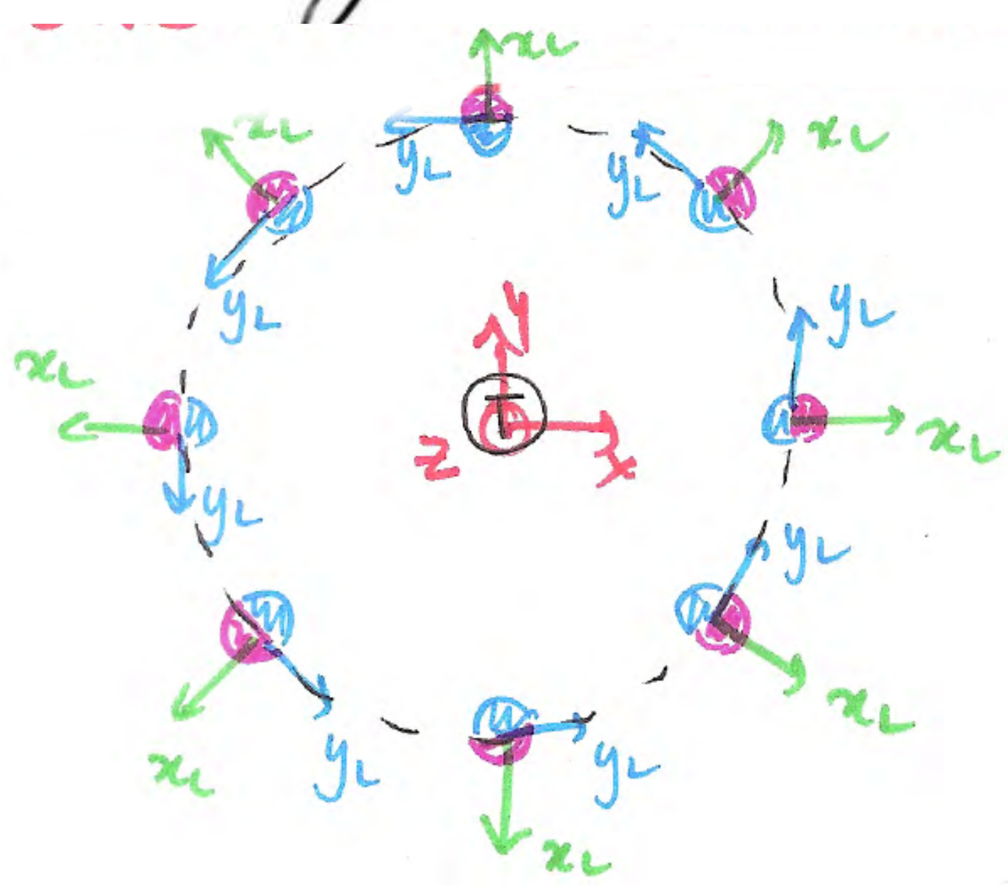
$$V_{sphère} = \iiint r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr = \int_0^R r^2\,dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\boxed{V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Les intégrales peuvent être séparées car r, θ et φ sont indépendants

Ex 2 : Face cachée de la Lune

1) La lune présente toujours la même face à la Terre donc dans le référentiel géocentrique la Lune à un mouvement de rotation + un mouvement de translation circulaire uniforme



2) La Lune effectue une rotation en $T_0 = 27,3$ jours autour de la Terre.

Sa vitesse angulaire s'écrit : $\boxed{\dot{\theta}_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2,66 . 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}}$

3) Le centre de la Lune effectue un mouvement circulaire uniforme de rayon D_{TL} donc :

$$\overrightarrow{TL} = D_{TL} \vec{e_r}$$

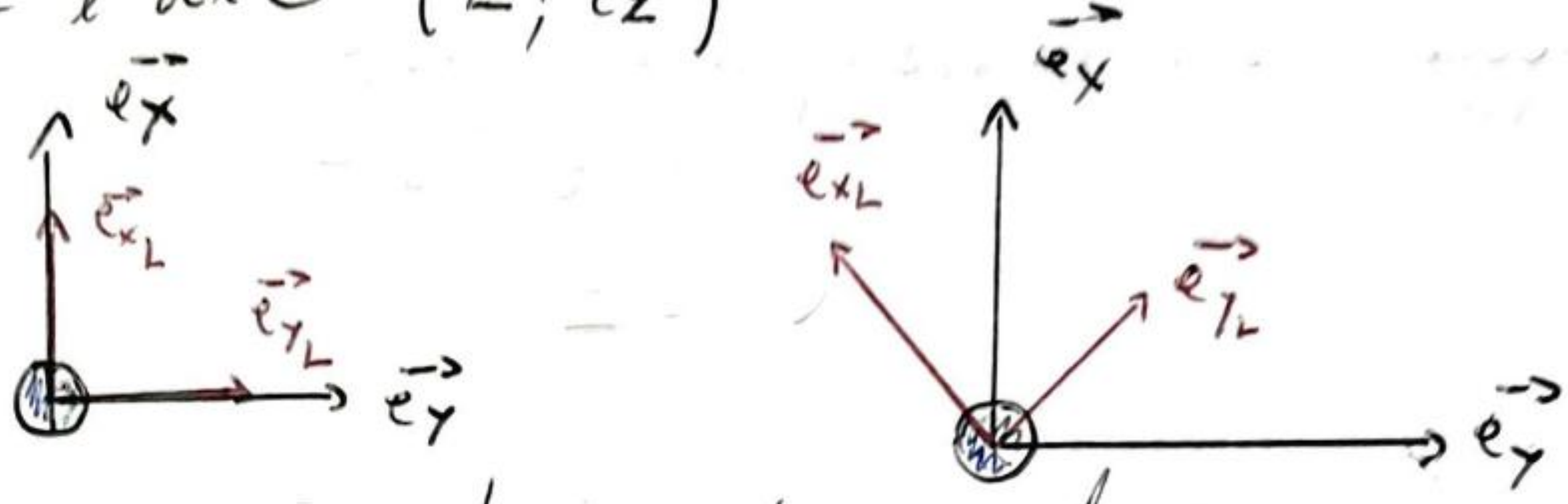
$$\vec{V_L} = \frac{d\overrightarrow{TL}}{dt} = D_{TL} \dot{\theta}_0 \vec{e_\theta}$$

$$\vec{a_L} = \frac{d\vec{V_L}}{dt} = -D_{TL} \dot{\theta}_0^2 \vec{e_r}$$ car $\ddot{\theta}_0 = 0$ (Mouvement uniforme)

$$\boxed{\|\vec{V_L}\| = D_{TL} \dot{\theta}_0 = 1,02 . 10^3 \text{ m.s}^{-1}}$$

③

4) Dans le référentiel sélénocentrique $(L, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ la Lune est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe $(L ; \vec{e_z})$



5) Les 2 mouvements sont synchrones car la Lune montre toujours la même face à la Terre : $\boxed{\dot{\theta}_p = \dot{\theta}_0}$

Ex 3 : Mouvement hélicoïdal

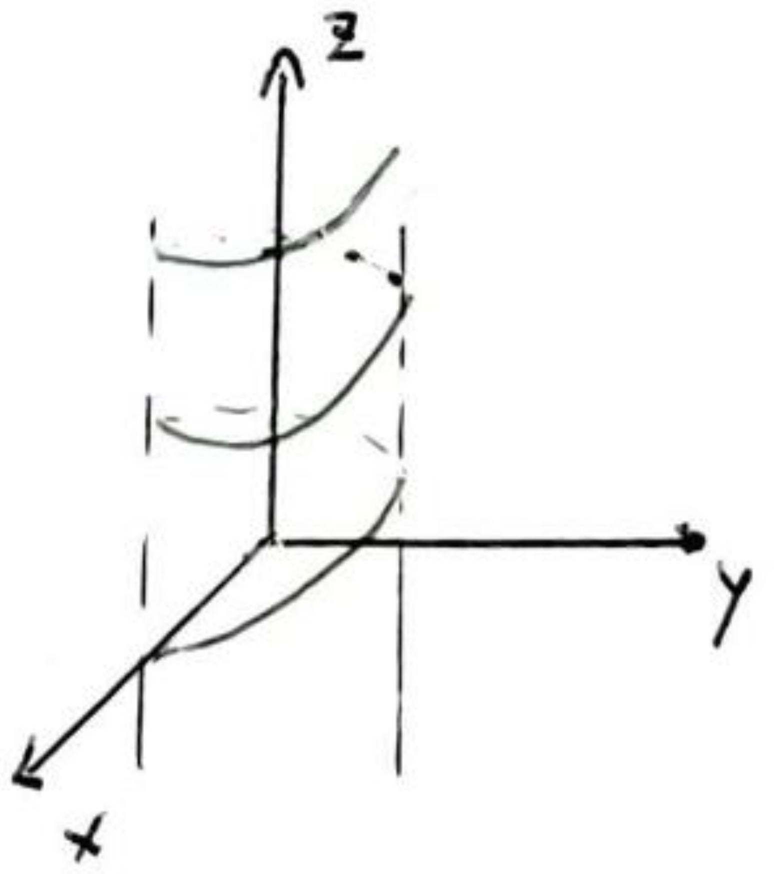
1) Mouvement vertical uniforme $\boxed{z = \alpha t}$, $\dot{z} = \alpha = cst$

Mouvement horizontal de translation circulaire :

$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$ et $\omega = cst$

2) $\begin{cases} \dot{x} = -\omega R \sin \omega t \\ \dot{y} = +\omega R \cos \omega t \\ \dot{z} = \alpha \end{cases}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2 \omega^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + \alpha^2}$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2 \omega^2 + \alpha^2}$$



La trajectoire est une hélice

Scanned by TapScanner

3) a. $\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = \alpha t \end{cases}$

En coordonnées cylindriques $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

Par identification $\boxed{r = R \ , \ \theta = \omega t \ \text{ et } \ z = \alpha t}$

b. $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z}$

Ici $\dot{r} = \dot{R} = 0$

$\dot{\theta} = \omega$

$\dot{z} = \alpha$

donc $\vec{v} = R\omega\,\vec{e_\theta} + \alpha\,\vec{e_z}$

et $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{(R\omega)^2 + \alpha^2}}$

c. $\vec{a} = -R\omega^2\,\vec{e_r} + R\dot{\omega}\,\vec{e_\theta} + \dot{\alpha}\,\vec{e_z}$

$= -R\omega^2\,\vec{e_r}$

$\boxed{\|\vec{a}\| = R\omega^2}$

Scanned by TapScanner

Ex 4 : Passer du sphérique au cartésien

1) Γ est un cercle de centre O'

est de rayon $\boxed{R_c = R \sin\theta_0}$

2) On a $\vec{OM} = R\,\vec{e_r}$

Or $\vec{e_r} = \sin\theta_0 (\cos\varphi\,\vec{e_x} + \sin\varphi\,\vec{e_y}) + \cos\theta_0\,\vec{e_z}$

donc $\vec{OM} = R\sin\theta_0\cos\varphi\,\vec{e_x} + R\sin\theta_0\sin\varphi\,\vec{e_y} + R\cos\theta_0\,\vec{e_z}$

De plus $v = R_c\dot{\varphi}$ d'où $\boxed{\varphi = \frac{v}{R_c}t = \frac{v}{R\sin\theta_0}t}$

Finalement $\vec{OM}$
$$\left|\begin{array}{l} R\sin\theta_0\cos\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right) \\ R\sin\theta_0\sin\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right) \\ R\cos\theta_0 \end{array}\right.$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \left|\begin{array}{l} -v\sin\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right) \\ v\cos\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right) \\ 0 \end{array}\right.$$

$$a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left|\begin{array}{l} -\frac{v^2}{R\sin\theta_0}\cos\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right) \\ -\frac{v^2}{R\sin\theta_0}\sin\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right) \\ 0 \end{array}\right.$$

3) En sphérique $d\vec{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$

ici

$$\left.\begin{aligned} dr &= 0 \\ d\theta &= 0 \\ d\varphi &= d\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right) = \frac{v}{R\sin\theta_0}\,dt \end{aligned}\right\} \boxed{d\vec{OM} = v\,dt\,\vec{e_\varphi}}$$

En cartésien $d\vec{OM} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$

$$\left.\begin{aligned} dx &= -v\sin\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right)dt \\ dy &= v\cos\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right)dt \\ dz &= 0 \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} d\vec{OM} = &-v\sin\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right)dt\,\vec{e_x} \\ &+ v\cos\left(\frac{vt}{R\sin\theta_0}\right)dt\,\vec{e_y} \end{aligned}}$$

On peut aussi écrire $d\vec{OM} = \vec{v}\,dt$