FdS

TD2 - Correction

Ex 1 : Mouvement uniforme

1) On a $t = \frac{x}{2}$, on remplace dans l'expression de y :

$$y = 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\boxed{y = x^2 - 2x}$$ c'est une parabole

2) $v_x = \frac{dx}{dt} = 2$

$v_y = \frac{dy}{dt} = 8t - 4$

donc $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$

$= \sqrt{4 + (8t-4)^2}$

$= \sqrt{4 + 64t^2 - 32t + 16}$

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{64t^2 - 32t + 20}}$$

3) $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 8$

donc $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$= \sqrt{8^2}$

$$\boxed{\|\vec{a}\| = 8 \ m.s^{-2} = cst}$$

4) On différencie les expressions de x et y :

$$\begin{cases} dx = 2\,dt \\ dy = 8t\,dt - 4\,dt \end{cases}$$

On a alors $dS = dx\,dy = 2dt\,(8t\,dt - 4dt)$

$$\boxed{dS = 8\,dt^2\,(2t - 1)}$$

Ex 2 : Test d'accélération d'une voiture

1) On a $\vec{a} = a_0 \vec{e_x}$ avec $a_0 = cst$

donc $\ddot{x} = a_0$ et $\dot{x} = a_0 t$ car $\vec{V_0} = \vec{0}$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Ensuite $x = \frac{1}{2} a_0 t^2$ car $x_0 = 0$ et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

On a donc $a_0 = \frac{2x}{t^2}$ et $\boxed{a_0 = \frac{2D}{(t_D)^2}}$

AN : $a_0 = \frac{2 \times 180}{26,6} = 0,509\ m.s^{-1}$

De plus $v_D = \dot{x}(t_D) = a_0 t_D$

AN : $V_D = 0,509 \times 26,6 = 13,5\ m.s^{-1}$

2) Dans cette deuxième partie l'accéleration est négative. $\vec{a} = a_1 \vec{e_x}$ avec $a_1 < 0$

Ainsi $\ddot{x} = a_1$ et $\dot{x} = a_1 t + V_D$ (car $\dot{x}(0) = V_D$)

Et donc $x = \frac{1}{2} a_1 t^2 + V_D t$ (On prend D comme nouvelle origine donc $x(0) = 0$)

Lorsque le véhicule s'arrête $\dot{x}(t) = 0$ donc en apelant A le point où la voiture s'arrête :

$$a_1 t_A + V_D = 0 \iff t_A = -\frac{V_D}{a_1}$$

et $x(t_A) = \frac{1}{2} a_1 \left(-\frac{V_D}{a_1}\right)^2 + V_D \left(-\frac{V_D}{a_1}\right)$

$$x(t_A) = \frac{1}{2} \frac{V_D^2}{a_1} - \frac{V_D^2}{a_1}$$

$$x(t_A) = -\frac{1}{2} \frac{V_D^2}{a_1}$$

AN : $\boxed{x(t_A) = -\frac{1}{2} \frac{13{,}5^2}{-7} = 13\,m}$

La voiture met 13 m à s'arrêter.

Ex 3 : Analyse de graphiques

• de 0s à 5s

$$\begin{cases} a = cst = a_0 \\ v = a_0 t \\ x = \frac{1}{2} a_0 t^2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} V(0) = 0 \\ X(0) = 0 \end{pmatrix}$$

La vitesse est linéaire et la position parabolique

On a $V(t_5) = 63 = a_0 t_5$ donc $a_0 = \frac{V(t_5)}{t_5}$

AN : $a_0 = \frac{63 \times \frac{1000}{3600}}{5} = 3,5 \ m.s^{-2}$ $\rightarrow$ Conversion en $m.s^{-1}$

et $\boxed{x(t_5) = \frac{1}{2} a_0 t_5^2}$ $\rightarrow$ AN : $X(t_5) = \frac{1}{2} . 3,5 . 5^2 = 44 \ m$

• de 5s à 17s

$$\begin{cases} x(t) = V_0 t + B \\ V(t) = V_0 \\ a(t) = 0 \end{cases}$$

On a une vitesse constante

donc $V_0 = 63 \ km.h^{-1}$

De plus $X(t_5) = V_0 t_5 + B$

donc $B = X(t_5) - A t_5$

AN : $B = 44 - \frac{63}{3,6} 5 = -43 \ m$

x est linéaire

AN : $X(t_{17}) = \frac{63}{3,6} \times 17 - 43 = 2,5 . 10^2 \ m$

• de 17 s à T

V est linéaire donc a est constant et x parabolique

$a = a_1 = cst$

$v = a_1 t + v_1$

en $t = t_{17}$, $v = v_0$ et en $t = T$, $v = 0$ donc

$$v(t) = -\frac{v_0}{T - t_{17}}(t - t_{17}) + v_0$$

donc $x(t) = -\frac{v_0}{T - t_{17}} \frac{(t - t_{17})^2}{2} + v_0 t + v_1$

On à $t = 17s$ $x(t) = 2,5.10^2\ m$

d'où $x(t) = -\frac{v_0}{T - t_{17}} \frac{(t - t_{17})^2}{2} + v_0(t - t_{17}) + 2,5.10^2 m$

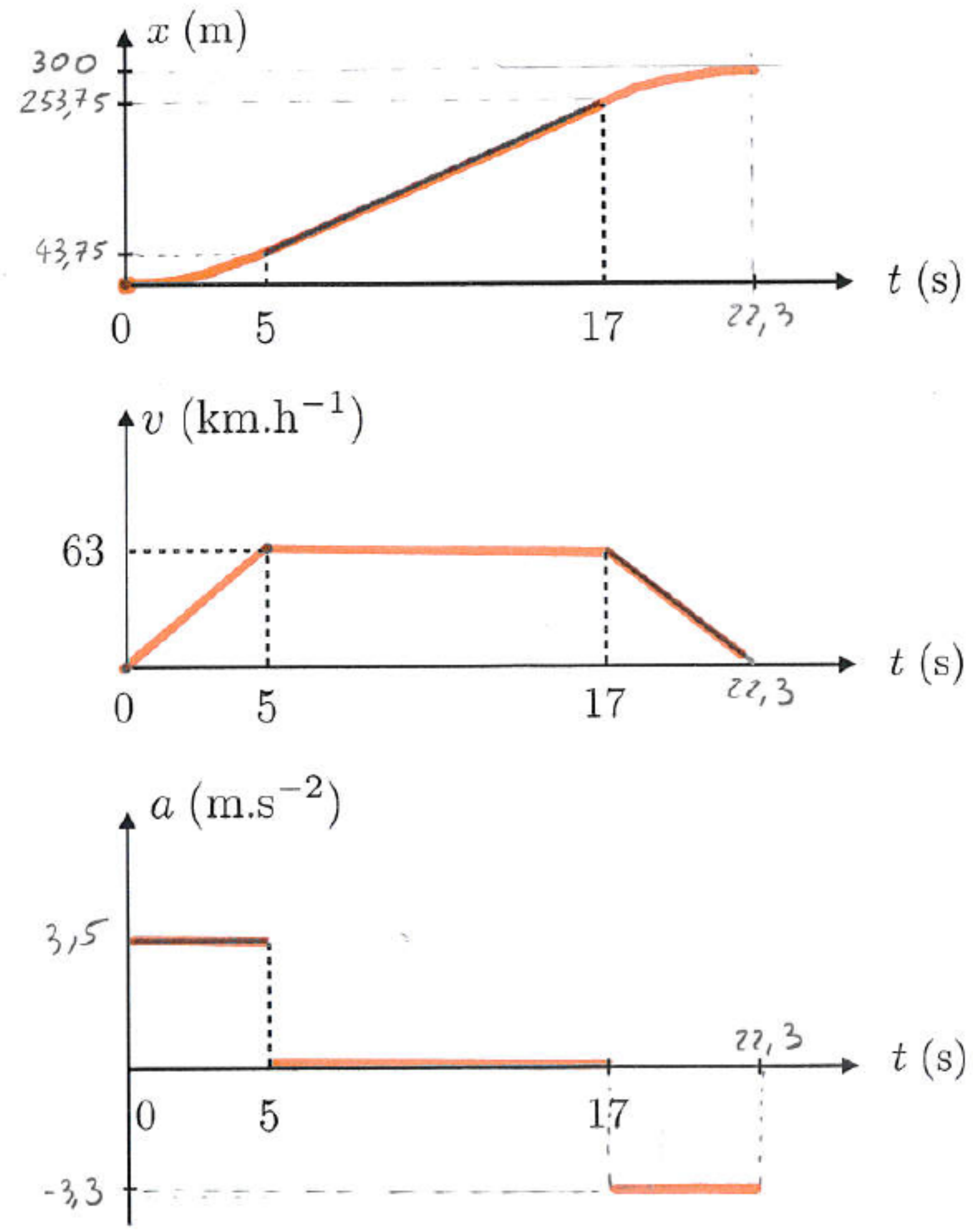
De plus $x(t) = 300m$

Donc $-\frac{v_0}{T - t_{17}} \frac{(T - t_{17})^2}{2} + v_0(T - t_{17}) + 2,5.10^2 = 300$

$$\Rightarrow \frac{v_0}{2}(T - t_{17}) = 50$$

$$\Rightarrow T = \frac{50}{\left(\frac{63/3,6}{2}\right)} + 17 = 23s$$

et $a_1 = -\frac{v_0}{T - t_{17}} \sim -\frac{63/3,6}{23 - 17} \sim -2,9 m.s^{-2}$



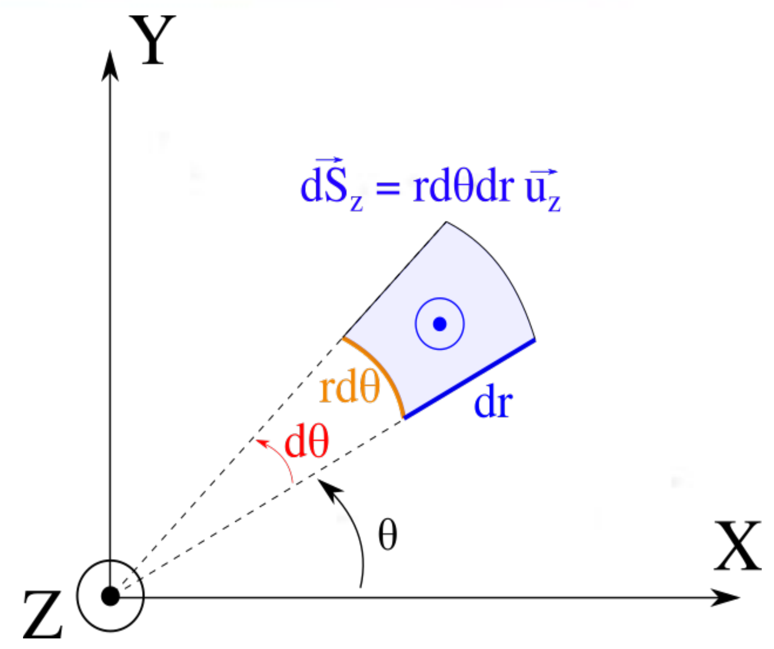
x (m)
300
253,75
43,75
t (s)
0
5
17
22,3
v (km.h⁻¹)
63
t (s)
0
5
17
22,3
a (m.s⁻²)
3,5
22,3
t (s)
0
5
17
-3,3

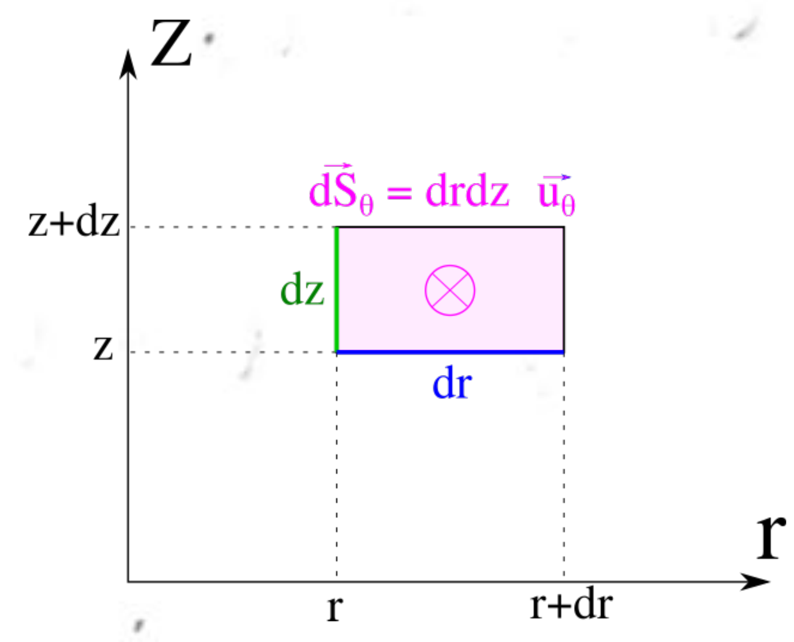
Ex 4 : Du déplacement élémentaire au volume

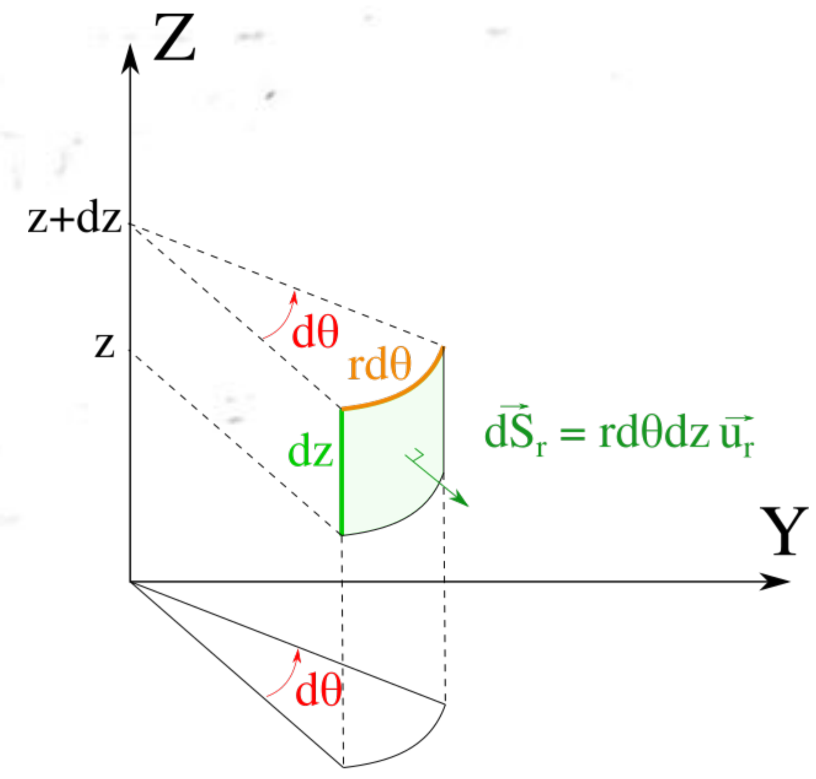
1) En cylindrique

$$d\vec{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$$

$$\begin{cases} dS_z = r\,dr\,d\theta & \text{à } z = cst \\ dS_\theta = dr\,d\theta & \text{à } \theta = cst \\ dS_r = r\,d\theta\,dz & \text{à } r = cst \end{cases}$$

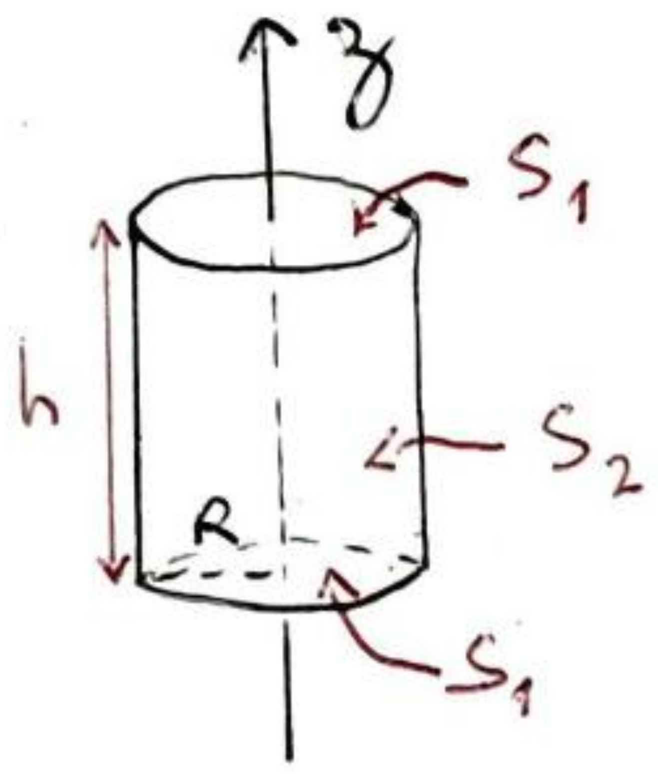






$$d\tau = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

2) a.



$$S_{cylindre} = 2S_1 + S_2$$

$$S_1 = \iint dS_z = \iint r\,dr\,d\theta$$

r et θ sont indépendant donc

On peut séparer les intégrales.

$$S_1 = \int_{r=0}^{r=R} r\,dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = \pi R^2$$

$$S_2 = \iint dS_r = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{z=0}^{z=h} dz = 2\pi R h \quad (r = R = cst)$$

Ainsi $\boxed{S_{cylindre} = 2\pi R^2 + 2\pi R h}$

Scanned by TapScanner

b. $V = \iiint d\tau = \iiint r\,dr\,d\theta\,dz$

Les trois paramètres sont indépendant donc on peut séparer les intégrales :

$$V = \int_{r=0}^{R} r\,dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^{h} dz = \frac{R^2}{2} \times 2\pi \times h = \underline{\pi R^2 h}$$

Ex 5 : Satellite artificiel

1) en P : $\theta_P = 0$ et $r_P = 8000$ km

$$r_P = \frac{P}{1 + e\cos\theta_P} = \frac{P}{1+e}$$

en A : $\theta_A = \pi$ et $r_A = 24\,000$ km

$$r_A = \frac{P}{1 + e\cos\theta_A} = \frac{P}{1-e}$$

On a donc
$$\begin{cases} e = \dfrac{r_A - r_P}{r_A + r_P} \\ P = \dfrac{2 r_A r_P}{r_A + r_P} \end{cases}$$

AN : $\boxed{e = \frac{1}{2}}$ et $\boxed{P = 12\,000 \text{ km}}$

2) $\vec{OM} = r\vec{e_r}$ $(z=0)$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ $\left(\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}\right)$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$

$\vec{a}$ est seulement selon $\vec{e_r}$ donc $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$

donc $r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}$

Or $2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$ donc $\boxed{r^2\dot{\theta} = cst}$

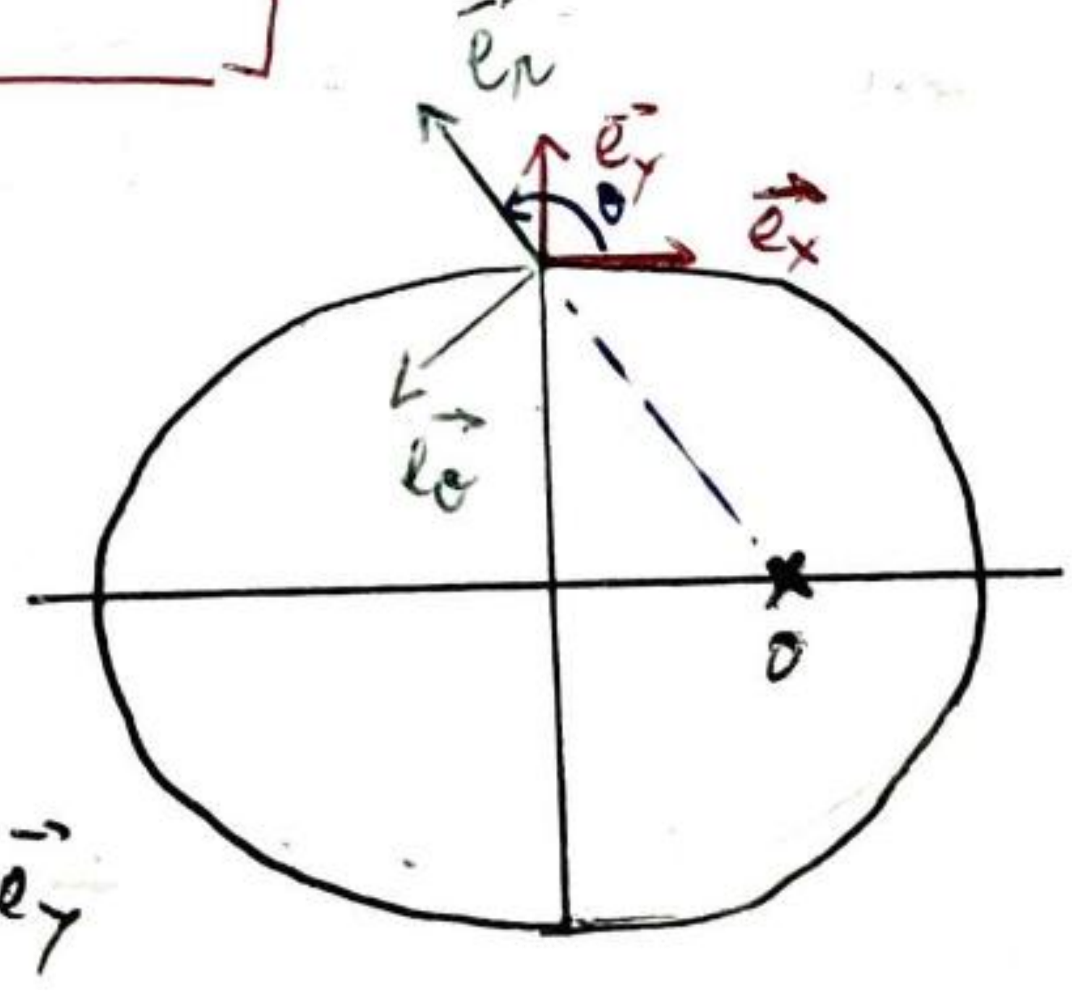
$r^2\dot{\theta} = C$ en tout point. En particulier en P :

$\theta_P = 0$, $r_P = 8000\,km$, $v_P = r_P\dot{\theta}_P = 8640\,km.s^{-1}$

Ainsi $C = r_P(r_P\dot{\theta}) = 6,9.10^7\,m^2.s^{-1}$

3) $C = r^2\dot{\theta} = rv$

Ainsi $\boxed{v_A = \frac{C}{r_A} = 2880\,m.s^{-1}}$



4) $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{v}$ est selon $\vec{e_x}$ seulement

donc $\vec{v}\cdot\vec{e_y} = 0 = (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})\vec{e_y}$

$= \left(\dot{r}(\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}) + r\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y})\right)\vec{e_y}$

$= (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)$

Scanned by TapScanner

De plus $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ donc $\dot{r} = \dfrac{\dot{\theta} p e \sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$.

Ainsi $0 = \dfrac{\dot{\theta} p e \sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2} + \dfrac{\dot{\theta} p \cos\theta}{1+e\cos\theta}$

Soit $\dfrac{e\sin^2\theta}{1+e\cos\theta} + \cos\theta = 0 \Leftrightarrow e\sin^2\theta + \cos\theta(1+e\cos\theta) = 0$

$\Leftrightarrow e(1-\cos^2\theta) + \cos\theta + e\cos^2\theta = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\cos\theta = -e}$

Ainsi $r_B = \dfrac{p}{1+e\cos\theta_B} = \dfrac{p}{1-e^2} = \dfrac{\dfrac{2r_A r_p}{r_A+r_p}}{1-\dfrac{(r_A-r_p)^2}{(r_A+r_p)^2}}$

$r_B = \dfrac{2r_A r_p}{r_A+r_p} \dfrac{(r_A+r_p)^2}{4r_A r_p}$

Finalement $\boxed{r_B = \dfrac{r_A+r_p}{2} = 16000 \text{ km}}$

Scanned by TapScanner

Exercice 6 : Mouvement d'un point sur une roue

1) $\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IG} + \vec{GM}$

$= x\,\vec{e_x} + r\,\vec{e_y} + r\,\vec{e_r}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e_x} + \frac{dr}{dt}\vec{e_y} + \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

ici $r = cst$ donc $\frac{dr}{dt} = 0$ et $\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e_x} + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_y}$$

Ainsi $\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e_x} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y} \\ \vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e_y} = \sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta} \\ \vec{e_x} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta} \end{cases}$$

Donc $\boxed{\vec{v} = \dot{x}\cos\theta\,\vec{e_r} + (r\dot{\theta} - \dot{x}\sin\theta)\,\vec{e_\theta}}$

$$\vec{v} = 6t\cos(-10t^2)\,\vec{e_r} + (-20rt - 6t\sin(-10t^2))\,\vec{e_\theta}$$

2) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \cancel{\dot{r}}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\,\vec{e_r})$

$= \ddot{x}\,\vec{e_x} + r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$

$= (\ddot{x}\cos\theta - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} - \ddot{x}\sin\theta)\,\vec{e_\theta}$

$$\vec{a} = \left(6\cos(-10t^2) - r(20t)^2\right)\vec{e_r} + \left(r(-20) - 6\sin(-10t^2)\right)\vec{e_\theta}$$